



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# Polyèdres réguliers sous différents angles

## D'Euclide à Schläfli

---

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de  
*Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique*

Année académique 2022-2023

*Auteur :*  
Ludovic SIMONIS

*Promoteur :*  
Pierre MATHONET

*Co-Promoteur :*  
Naïm ZENAÏDI

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Polyèdres de Platon et d'Archimède</b>	<b>7</b>
1.1	Les polyèdres de Platon	8
1.1.1	Classification des polyèdres de Platon par Euclide	10
1.1.2	Classification des polyèdres de Platon via la relation d'Euler	11
1.2	Les polyèdres d'Archimède	12
1.2.1	Classification des polyèdres d'Archimède par Kepler	14
1.2.2	Classification des polyèdres d'Archimède via la relation d'Euler	21
1.3	Remise en question	32
<b>2</b>	<b>Variations sur les polygones</b>	<b>33</b>
2.1	Les polygones dans le plan affine euclidien	33
2.2	Polygones réguliers	34
<b>3</b>	<b>Notions générales sur la convexité</b>	<b>45</b>
3.1	Définitions et premiers résultats	45
3.2	Enveloppe convexe	48
3.3	Topologie des convexes	49
3.4	L'intérieur relatif d'un convexe	50
3.5	Théorème de Hahn-Banach	53
3.6	Polaire d'un convexe, dualité	55
3.7	Hyperplans d'appui	58
3.8	Théorème de Krein et Milman	61
3.9	Structure faciale d'un convexe	64
3.10	Polyèdres convexes	67
3.11	Angles dièdres d'un polytope	73
<b>4</b>	<b>Le théorème de rigidité de Cauchy</b>	<b>76</b>
4.1	Les polygones sphériques	76
4.2	Le théorème de rigidité	86
4.2.1	Conclusion	90
<b>5</b>	<b>Classification des sous-groupes finis de <math>SO(3)</math></b>	<b>91</b>
5.1	Les sous-groupes finis de $SO(3)$	91
5.2	Le groupe du tétraèdre	97
5.3	Le groupe du cube (ou de l'octaèdre)	99
5.4	Le groupe de l'icosaèdre (ou du dodécaèdre)	102
<b>6</b>	<b>Le théorème de Schläfli</b>	<b>104</b>
6.1	Définition des polyèdres réguliers et premiers exemples	104
6.2	Classification des polytopes réguliers	105

<b>7 La relation d'Euler</b>	<b>118</b>
7.1 Polytopes équivalents et duaux . . . . .	118
7.2 Polytopes simpliciaux et simples . . . . .	120
7.3 Relation d'Euler . . . . .	122
7.4 Relations de Dehn–Sommerville . . . . .	127
<b>A Florilège de définitions peu satisfaisantes</b>	<b>129</b>
<b>B Espaces affines</b>	<b>130</b>
<b>C Isométries d'un espace affine euclidien</b>	<b>133</b>
C.1 Rotations en dimension 2 et 3 . . . . .	133
<b>D Rudiments de topologie</b>	<b>137</b>
<b>E Rudiments de théorie des groupes</b>	<b>139</b>
E.1 Les groupes . . . . .	139
E.2 Groupe cyclique . . . . .	141
E.3 Action d'un groupe sur un ensemble . . . . .	142

# Remerciements

Tout d'abord, j'aimerais remercier tout particulièrement mon promoteur Pierre Mathonet et mon co-promoteur Naïm Zenaïdi pour le temps consacré à ce mémoire. Merci à vous deux pour les différentes réunions et discussions qui m'auront permis d'avoir une compréhension plus fine de la géométrie et des polyèdres. Je garderai en mémoire nos échanges.

Ensuite, je remercie tous les professeurs du département de mathématique. Vos différents cours m'ont permis d'acquérir le niveau de mathématiques que j'ai atteint aujourd'hui.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien indéfectible tout au long de ces cinq années d'étude.

Un grand merci à vous tous!

# Introduction

Ce mémoire a pour objectif d'étudier les polyèdres, en particulier les polyèdres convexes. Pour ce faire, et c'est l'objet du premier chapitre, nous proposons de parcourir la littérature en présentant quelques études classiques des polyèdres réguliers convexes (les polyèdres de Platon) et des polyèdres d'Archimède, appelés également polyèdres semi-réguliers. Nous présentons différents arguments de classification utilisés par Euclide, Kepler ou encore ceux qui utilisent la relation d'Euler. En analysant de près les approches classiques comme celles des références [11], [17] et [28], on prend conscience des multiples difficultés inhérentes au sujet, déjà présentes lorsqu'il s'agit de définir les notions de base. Ainsi, ce premier chapitre a pour double objectif de présenter les premières tentatives de classification ainsi que la mise en exergue des lacunes de ces approches. Parmi celles-ci, pour n'en citer qu'une seule, il n'est pas évident de prime abord d'apporter une définition satisfaisante d'un polyèdre régulier (convexe). Ces premières réflexions justifieront les développements menés dans le troisième chapitre consacré à la convexité.

Étant donné les difficultés rencontrées au premier chapitre dans le contexte tridimensionnel, il paraît raisonnable de consacrer le deuxième aux polygones du plan affine euclidien. Nous y développons une approche plutôt piétonne du sujet qui a le mérite de mettre une fois encore en lumière les difficultés liées aux différentes définitions possibles des polygones et de la régularité. Ce chapitre nous offre l'opportunité de sonder la pertinence des définitions rencontrées habituellement<sup>1</sup> et d'établir l'équivalence de différentes notions de régularité rencontrées dans la littérature. C'est également l'occasion d'utiliser concrètement certaines notions acquises lors des cours de géométrie [20] pour se familiariser avec le sujet et établir de manière personnelle certains résultats d'apparence élémentaire mais souvent passés sous silence pour cette raison.

Avec le troisième chapitre, nous entrons dans le vif du sujet et présentons les rudiments de la théorie de la convexité nécessaires à la formulation de définitions adéquates des objets géométriques en vue, en particulier la notion fondamentale de polyèdres convexes. Nous y présentons entre autres les notions d'enveloppe convexe, de polarité, de point extrémaux qui seront utilisées tout au long du présent mémoire. Le chapitre culmine avec l'énoncé et la preuve de certains résultats importants comme le théorème de Krein et Milman.

Le quatrième chapitre est consacré au théorème de rigidité de Cauchy prouvé par Augustin Louis Cauchy en 1813 dans [7]. La preuve de ce résultat est décrite dans [1]. Cependant, dans ce mémoire, nous avons décidé de suivre la monographie [3] de Berger pour établir ce théorème. Le théorème de rigidité de Cauchy joue un rôle fondamental dans l'approche classique de la classification des polyèdres réguliers convexes. En effet, il permet d'obtenir l'unicité, à similitude près, des polyèdres présentés dans le premier chapitre.

Le cinquième chapitre offre une classification plus moderne des polyèdres de Platon fondées sur la classification des sous-groupes finis de  $SO(3)$ , le groupe orthogonal spécial en dimension trois. Dans ce chapitre, on s'intéressera aux trois sous-groupes exceptionnels, que sont les groupes d'isométries du tétraèdre, du cube et de l'icosaèdre.

---

1. L'annexe A reprend une liste de définitions peu satisfaisantes souvent rencontrées.

Ensuite, dans le sixième chapitre, nous approfondissons le sujet en étudiant le problème de classification en dimension quelconque. Le résultat principal de chapitre est le théorème de Schläfli, pionner de l'étude des polytopes réguliers en dimension quelconque.

Le septième et dernier chapitre présente une démonstration en dimension quelconque de la célèbre relation d'Euler dont le cas classique en dimension trois est utilisé abondamment au cours des développements entrepris dans ce mémoire.

# Chapitre 1

## Études classiques des polyèdres de Platon et d'Archimède

Les peintres, artistes et sculpteurs ont représenté, façonné les polyèdres dans leurs œuvres à travers les siècles. Un dodécaèdre datant d'au moins 500 ans avant J.-C. a été mis au jour lors d'une fouille sur le mont Loffa près de Padoue, en Italie. La perspective était une caractéristique importante des œuvres d'art de la Renaissance. Les polyèdres et les squelettes des polyèdres étaient d'excellents sujets pour démontrer la maîtrise de la perspective par un artiste. Des artistes tels que Piero della Francesca (né entre 1412 et 1420, il décède en 1492), Albrecht Dürer (1471–1528) ou encore Daniele Barbaro (1514–1570) ont contribué à la fois aux mathématiques et à l'art par leurs écrits sur la perspective dans les polyèdres. Parmi les nombreux artistes qui ont représenté des polyèdres dans leurs œuvres d'art, citons Léonard de Vinci (1452 – 1519), qui s'est chargé des illustrations dans le livre de Fra Luca Pacioli (né vers 1445 et décède en 1517) intitulé *De Divina Proportione* (1509) ; Wentzel Jamnitzer (1508 – 1585), qui a créé des gravures complexes et élaborées de polyèdres ; Jacopo de Barbari (né à Venise vers 1445 et mort à Bruxelles en 1516), qui a peint un portrait de Luca Pacioli avec ses polyèdres ; Paolo Uccello (1397 – 1475), qui a inclus des polyèdres dans ses tableaux et dans les mosaïques posées dans le sol de la basilique Saint-Marc à Venise ; ou encore Fra Giovanni da Vérone (1457 – 1525), qui a créé de magnifiques intarsia (mosaïques en bois).

Tout au long de ce chapitre, nous allons utiliser le vocabulaire suivant lorsque nous travaillerons avec des polyèdres.

- Chaque polygone est appelé une face du polyèdre ;
- un segment de droite le long duquel deux faces se rencontrent est appelé une arête ;
- un point où plusieurs arêtes et faces se rejoignent est appelé un sommet.

Nous dirons que deux faces qui ont une arête en commun sont adjacentes. Il y a différentes sortes d'angles dans un polyèdre :

- les angles planaires qui sont les angles des différents polygones ;
- les angles solides qui sont délimités par au moins trois angles planaires.

Nous sommes conscients que ces définitions ne sont pas satisfaisantes. Comme expliqué lors de l'introduction, ce premier chapitre est consacré à explorer les différentes approches classiques de classification des polyèdres de Platon et d'Archimède. Cependant, ces différentes notions feront l'objet d'une approche beaucoup plus rigoureuse dans les chapitres ultérieurs.

## 1.1 Les polyèdres de Platon

Cette section a été rédigée suite aux lectures des références [9], [11] et [28]. Le lecteur désireux d'en apprendre davantage est invité à les consulter.

L'idée que la matière se compose de quelques substances combinées de différentes manières est proposée par des écrivains du V<sup>e</sup> siècle av. J.-C. En effet, Empédocle (vers 490 – 430 av. J.-C.) maintient qu'il y a quatre éléments : l'eau, la terre, l'air et le feu. Leucippe et Démocrite<sup>1</sup> proposent également des théories atomiques de la matière. Platon (427 – 347 av. J.-C.) examine ce qui rend ces éléments différents les uns des autres. Il suggère qu'ils correspondent à différentes sortes de particules fondamentales (d'ailleurs cette idée est reprise au XIX<sup>e</sup> siècle par John Dalton, un des fondateurs de la chimie moderne). Platon explique que le feu, la terre, l'air et l'eau sont composés de corps qui sont des solides délimités par des surfaces planes composées de triangles. Il choisit deux triangles fondamentaux : le triangle rectangle isocèle et un triangle rectangle scalène. Le premier est unique, mais parmi le nombre illimité de triangles rectangles scalènes, il choisit ceux dont une paire compose un triangle équilatéral.

Platon affirme alors que si on assemble quatre triangles équilatéraux, trois de leurs angles planaires se rencontrent pour former un angle solide. Lorsque quatre tels angles ont été formés, on obtient un solide qui divise la sphère circonscrite en quatre morceaux égaux. Platon obtient ainsi son premier polyèdre : le *tétraèdre*.

Platon décrit deux autres polyèdres en utilisant également des triangles équilatéraux. L'un possède un total de huit faces disposées de manière telle que chacun des six angles solides soit entouré de quatre angles planaires. Il s'agit de l'*octaèdre*. L'autre possède vingt faces formant douze angles solides qui sont chacun délimités par cinq angles planaires. Il se nomme *icosaèdre*.

Il construit ensuite un quatrième polyèdre en utilisant deux triangles isocèles isométriques permettant de construire un carré. Platon remarque alors que six carrés assemblés forment des angles solides qui sont chacun composés de trois angles droits du plan. Il s'agit du *cube*. Il explique alors comment il associe chaque polyèdre à chaque élément. Le tétraèdre possède le moins de faces et est donc le plus léger. Il possède les angles les plus pointus et est donc le plus pénétrant. Platon décide donc d'associer le feu au tétraèdre. La stabilité du cube est associée à la terre. Par des arguments similaires, il associe l'air à l'octaèdre et l'eau à l'icosaèdre.

Plutarque (46 – 125), dans le cinquième chapitre de *Platonicae quaestiones*, se demande pourquoi Platon écarte la plus parfaite des figures (c'est-à-dire la sphère) et utilise une figure rectiligne pour représenter l'orbite céleste à savoir le pentagone. Il suggère alors que le dodécaèdre peut jouer le rôle d'une sphère car selon lui, il est flexible et en étant gonflé il deviendrait distendu et sphérique. Le fait que le nombre d'éléments ne corresponde pas au nombre de polyèdres pose un problème. Dans les comptes rendus de la théorie écrits par les derniers platoniciens, un cinquième élément, l'éther, est ajouté et associé au dodécaèdre.

---

1. Leucippe est un philosophe présocratique grec, considéré comme l'inventeur de l'atomisme philosophique. Il est actif vers 440 av. J.-C. et est le maître de Démocrite qui est né vers 460 av. J.-C. à Abdère et mort en 370 av. J.-C.



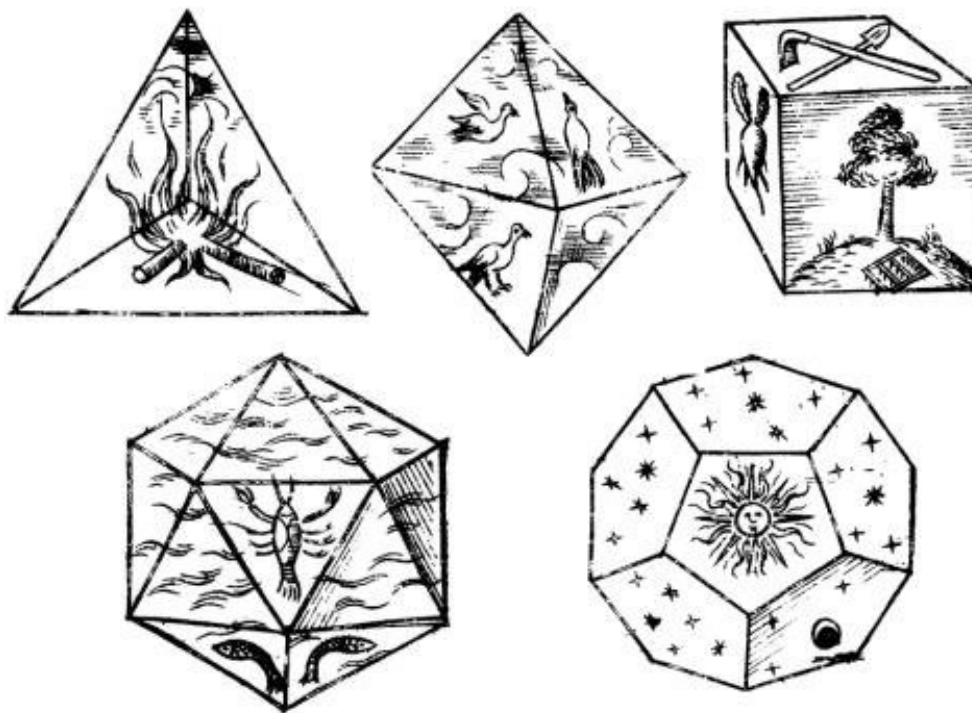


FIGURE 1.1 – Les croquis de Kepler (1571–1630), dans *Harmonices Mundi*, sur les cinq polyèdres de Platon montrant leur association avec les éléments.

Il est courant de trouver la définition suivante pour les polyèdres de Platon.

**Définition 1.1.1.** *Un polyèdre est régulier, ou de Platon si toutes ses faces sont des polygones réguliers d'une seule sorte et dont tous les sommets sont identiques (ils sont tous entourés par le même nombre de faces).*

**Remarque 1.1.1.** *Cette définition, bien que naturelle en apparence, n'est pas satisfaisante. En effet, les notions intuitives de faces, sommets ne sont pas clairement définies. Il faudrait également préciser que les polyèdres de Platon sont des polyèdres convexes car pour l'instant cette définition n'exclut pas les polyèdres de Kepler-Poinsot ou encore l'icosaèdre punché représenté ci-dessous.*

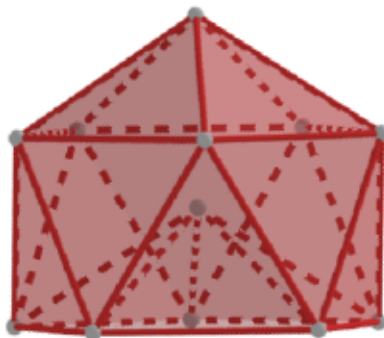


FIGURE 1.2 – L'icosaèdre punché.

### 1.1.1 Classification des polyèdres de Platon par Euclide

Dans le livre 13 des *Éléments* (le lecteur intéressé peut consulter la référence [17]) Euclide (vers 325 – 265 av.J.-C.) s'intéresse aux polyèdres de Platon comme le montre la proposition 18 du livre 13.

**Proposition 1.1.1. (*Proposition 18 du livre 13*)**

*Je dis aussi qu'excepté les cinq polyèdres de Platon, on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles.*

La proposition 21 du livre 11 nous apprend que la somme des angles qui entourent chaque sommet d'un polyèdre est strictement inférieure à  $2\pi$ . Cette proposition est utilisée pour montrer qu'il existe exactement cinq polyèdres de Platon. En effet, dans la littérature, il est commode de trouver la preuve suivante.

Étant donné que la somme des angles qui entourent chaque sommet d'un polyèdre est strictement inférieure à  $2\pi$  et qu'un angle interne d'un polygone régulier à  $p$ -côtés vaut  $\pi - \frac{2\pi}{p}$ , on en tire que si  $q$  faces se rencontrent en chaque sommet, alors

$$q \left( \pi - \frac{2\pi}{p} \right) < 2\pi.$$

Cela est équivalent à

$$q\pi - \frac{2\pi q}{p} - 2\pi < 0.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par  $\frac{p}{\pi}$ , nous obtenons que

$$qp - 2q - 2p < 0.$$

En ajoutant 4 aux deux membres, il vient

$$(p - 2)(q - 2) < 4. \tag{1.1}$$

Ainsi, les seuls couples  $(p, q)$  qui satisfont cette inégalité sont au nombre de cinq et sont donnés par

$$(3, 3) ; (4, 3) ; (3, 4) ; (5, 3) \text{ et } (3, 5).$$

Ils correspondent respectivement au tétraèdre, au cube, à l'octaèdre, au dodécaèdre et à l'icosaèdre. Ils sont repris dans le tableau suivant.

(3, 3)	tétraèdre
(4, 3)	cube
(3, 4)	octaèdre
(5, 3)	dodécaèdre
(3, 5)	icosaèdre

### 1.1.2 Classification des polyèdres de Platon via la relation d'Euler

D'autres sources [9] ou encore [28], obtiennent la relation (1.1), en utilisant la relation d'Euler<sup>2</sup> pour les polyèdres.

**Proposition 1.1.2. (Relation d'Euler)**

Étant donné un polyèdre, si on désigne respectivement par  $S$ ,  $A$ ,  $F$  le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de ce polyèdre, alors on a

$$S - A + F = 2.$$

Nous pouvons obtenir la relation (1.1) en remarquant que si  $q$  polygones à  $p$ -côtés se rencontrent en chaque sommet, alors

$$pF = 2A = qS.$$

Cela revient à dire que

$$A = \frac{qS}{2} \quad \text{et} \quad F = \frac{qS}{p}.$$

Par la relation d'Euler, nous obtenons alors que

$$S - \frac{qS}{2} + \frac{qS}{p} = 2.$$

Cela est équivalent à

$$(2p - pq + 2q)S = 4p.$$

On en tire que

$$2p - pq + 2q > 0$$

et donc que

$$(p - 2)(q - 2) < 4.$$

Les différents polyèdres illustrés dans la figure suivante proviennent de [12].

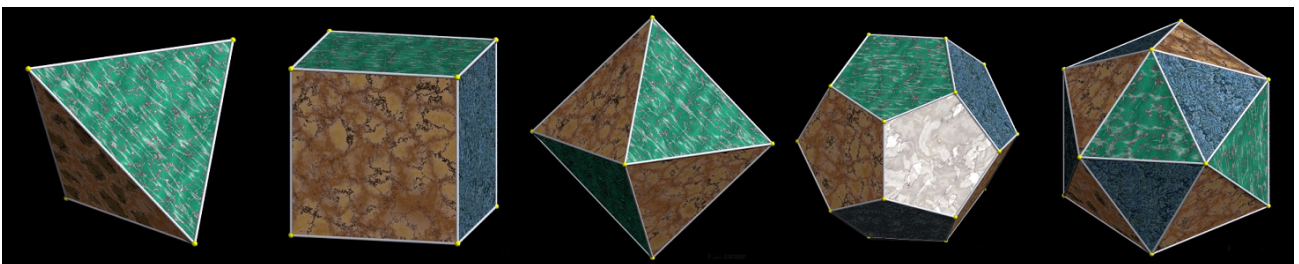


FIGURE 1.3 – Les cinq polyèdres de Platon.

<sup>2</sup>. Cette relation à été énoncée et démontrée par Leonhard Euler (1707 – 1783) en 1752 dans *Elementa Doctrinae Solidorum*.

## 1.2 Les polyèdres d'Archimède

À présent, nous allons nous intéresser aux polyèdres d'Archimède. Le lecteur souhaitant approfondir le sujet pourra consulter les références [9], [11] et [28].

Dans le cinquième livre de sa *Collection mathématique*, Pappus (290 – 350) attribue la découverte de treize polyèdres à Archimède (287 – 212 av. J.-C.). Même si le récit qu'en a fait ce dernier est perdu, ces treize polyèdres sont connus sous le nom de *polyèdres d'Archimède* (ils sont parfois appelés *les polyèdres semi-réguliers*). Pappus va les décrire en les classant via le nombre total de faces et en énumérant le type de faces qui compose chaque polyèdre comme le montre le tableau suivant.

Faces	Triangles	Carrés	Pentagones	Hexagones	Octogones	Décagones
8	4			4		
14	8	6				
14		6		8		
14	8				6	
26	8	18				
26		12		8	6	
32	20		12			
32			12	20		
32	20					12
38	32	6				
62	20	30	12			
62		30		20		12
92	80		12			

TABLE 1.1 – Composition des polyèdres d'Archimède.

Certains de ces polyèdres ont été découverts plusieurs fois. Selon Héron (premier siècle après J.-C.), le deuxième polyèdre de la liste ci-dessus (connu aujourd'hui sous le nom de *cuboctaèdre*) était connu par Platon. Durant la Renaissance, après l'introduction de la perspective en art et dans les peintures, les artisans ont fait des représentations des polyèdres de Platon. Pour varier leurs œuvres, ils ont décidé de couper les sommets de leurs polyèdres, ce qui a produit des polyèdres d'Archimède. Le procédé d'élimination des sommets de manière symétrique est appelé *troncature*.

Johannes Kepler (1571 – 1630) a redécouvert les treize polyèdres d'Archimède et il leur a attribué les noms qu'on leur donne encore aujourd'hui. Les cinq polyèdres d'Archimède obtenus par troncature des sommets des cinq polyèdres de Platon sont désignés par : *tétraèdre tronqué*, *cube tronqué*, *octaèdre tronqué*, *dodécaèdre tronqué* et *icosaèdre tronqué*. Kepler attribue le nom de *cuboctaèdre* au polyèdre qui se trouve à mi-chemin entre le cube et l'octaèdre et le nom d'*icosidodécaèdre* à celui se trouvant entre le dodécaèdre et l'icosaèdre.

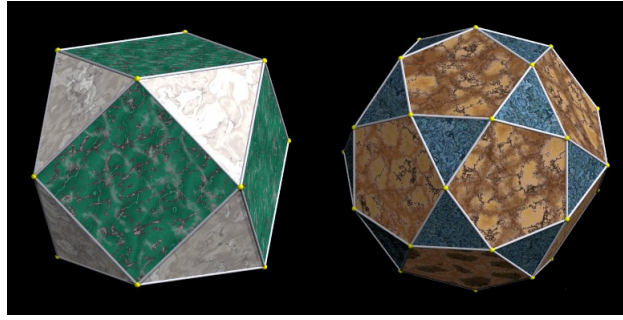


FIGURE 1.4 – Le cuboctaèdre à gauche et l'icosidodécaèdre à droite.

Les polyèdres que Kepler nomme cuboctaèdre tronqué et icosidodécaèdre tronqué ne sont pas obtenus via une vraie troncature. En effet, lorsque l'on tronque le cuboctaèdre ou l'icosidodécaèdre, toutes les faces obtenues ne sont pas des polyèdres réguliers puisque certaines d'entre elles sont des rectangles. Cependant, on peut obtenir des polyèdres semi-réguliers en déformant les polyèdres ainsi obtenus par troncature de sorte que les rectangles deviennent des carrés. D'ailleurs, Kepler en est conscient puisqu'il déclare : "Je donne le nom de cuboctaèdre tronqué : pas parce qu'il peut être formé par une troncature mais parce que c'est comme un cuboctaèdre qui a été tronqué."

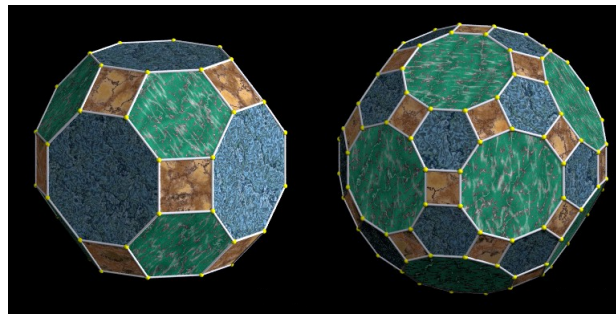


FIGURE 1.5 – Le cuboctaèdre tronqué à gauche et l'icosidodécaèdre tronqué à droite.

À cause de cette anomalie, des noms alternatifs ont été proposés, les plus communs étant respectivement : *grand rhombicuboctaèdre* et *grand rhombicosidodécaèdre*. Kepler en nomme deux autres via les noms : (*petit*) *rhombicuboctaèdre* (car ce polyèdre a des faces en commun avec le cube, l'octaèdre et un polyèdre rhombique) et (*petit*) *rhombicosidodécaèdre*.

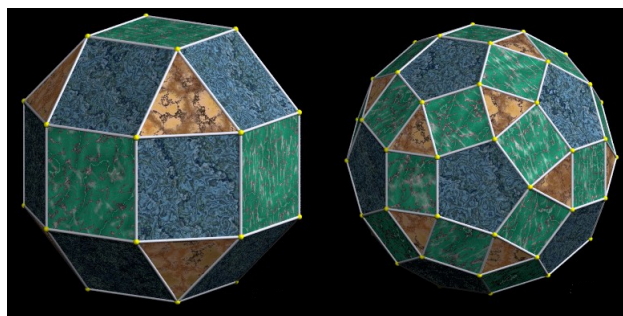


FIGURE 1.6 – Le rhombicuboctaèdre à gauche et le rhombicosidodécaèdre à droite.

Les deux polyèdres restants diffèrent des autres. En effet, ils ne peuvent pas être obtenus par une troncature des sommets des polyèdres de Platon. Ils sont également dépourvus de toute



symétrie miroir : ils peuvent donc exister sous deux formes, chacune étant une image miroir de l'autre (un peu comme la main droite et la main gauche), on dit que ces polyèdres sont énantiomorphes. Kepler leur donne le nom de *cube adouci* et de *dodécaèdre adouci*.

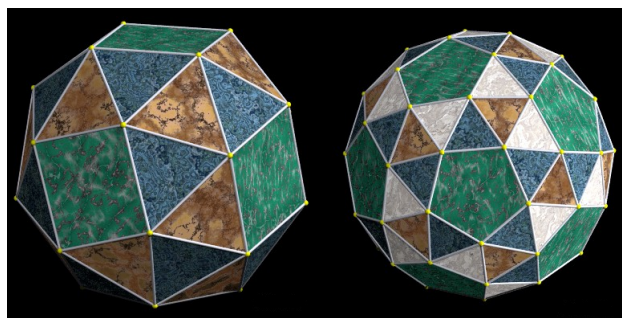


FIGURE 1.7 – Le cube adouci à gauche et le dodécaèdre adouci à droite.

Le tableau suivant est la TABLE 1.1 de Pappus dans laquelle chaque polyèdre est associé à son nom.

Noms	Faces	Triangles	Carrés	Pentagones	Hexagones	Octogones	Décagones
Tétraèdre tronqué	8	4			4		
Cuboctaèdre	14	8	6				
Octaèdre tronqué	14		6		8		
Cube tronqué	14	8				6	
Rhombicuboctaèdre	26	8	18				
Cuboctaèdre tronqué	26		12		8	6	
Icosidodécaèdre	32	20		12			
Icosaèdre tronqué	32			12	20		
Dodécaèdre tronqué	32	20					12
Cube adouci	38	32	6				
Rhombicosidodécaèdre	62	20	30	12			
Icosidodécaèdre tronqué	62		30		20		12
Dodécaèdre adouci	92	80		12			

Kepler a également fait des recherches sur deux autres familles de polyèdres construits à partir de polygones réguliers : les prismes et les antiprismes. Un prisme est un polyèdre formé de deux polygones réguliers à  $n$  côtés séparés par un "anneau" de  $n$  carrés. Un antiprisme contient aussi deux polygones réguliers à  $n$  côtés mais cette fois, ils sont séparés par un "anneau" de  $2n$  triangles équilatéraux.

**Définition 1.2.1.** *Un polyèdre est semi-régulier ou d'Archimède si toutes ses faces sont des polygones réguliers convexes de deux ou trois sortes et si tous ses sommets sont entourés de la même façon.*

### 1.2.1 Classification des polyèdres d'Archimède par Kepler

L'énumération des polyèdres d'Archimède réalisée par Kepler se fait en considérant toutes les façons possibles de former un angle solide à partir de polygones réguliers de deux ou trois sortes. Deux observations simples facilitent le processus. Nous allons les présenter via deux lemmes. Le premier concerne le nombre de types de faces qui peuvent entourer un sommet.

**Lemme 1.2.1.** *Si les faces d'un polyèdre convexe sont toutes des polygones réguliers alors au plus trois sortes de faces différentes peuvent apparaître autour d'un angle solide.*

*Démonstration.* Les quatre polygones réguliers dont l'amplitude des angles internes est la plus petite sont le triangle équilatéral  $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , le carré  $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , le pentagone  $\left(\frac{3\pi}{5}\right)$  et l'hexagone  $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ . La somme totale de ces quatre angles vaut

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} = \frac{21\pi}{10}$$

qui est strictement supérieur à  $2\pi$ . On en tire que ces quatre polygones réguliers ne peuvent pas être tous présents en même temps autour d'un sommet. Ainsi, quatre polygones réguliers différents ou plus ne peuvent pas entourer un sommet, d'où la conclusion.  $\square$

Le second lemme est utilisé afin d'exclure certaines combinaisons de polygones ayant un nombre impair de côtés. Faisons la distinction entre l'ensemble de faces qui délimitent un angle solide et l'ordre dans lequel elles apparaissent. L'espèce d'un angle solide est une liste non-ordonnée de faces qui sont présentes autour d'un sommet tandis que le type d'un angle solide spécifie l'ordre dans lequel les différentes sortes de face apparaissent autour d'un sommet. La FIGURE 1.8 permet de visualiser cette distinction :

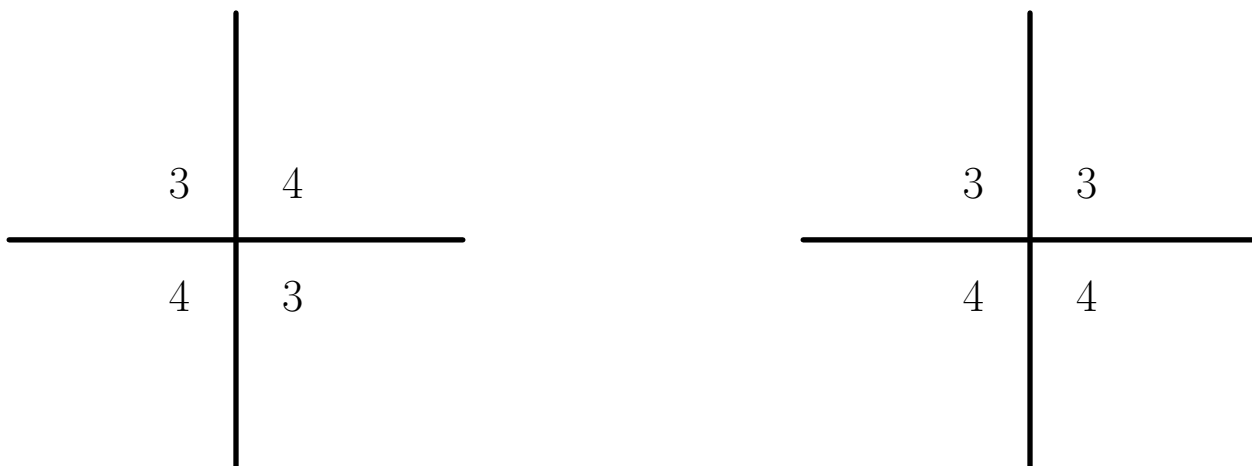


FIGURE 1.8 – Deux types d'une même espèce d'un angle solide.

Les diagrammes représentés dans la FIGURE 1.8 représentent la région autour d'un sommet. Les nombres indiquent le nombre de côtés des polygones qui délimitent le sommet et la place de ces nombres dans le diagramme indique la position des polygones. Ces informations peuvent être résumées en écrivant  $(3, 4, 3, 4)$  pour le premier diagramme et  $(3, 3, 4, 4)$  pour le second. Kepler établit que trois polygones de différentes sortes ne peuvent former un angle d'un polyèdre régulier si l'un d'entre eux possède un nombre impair de côtés. Un analogue de ce résultat qui s'applique aux sommets entourés par quatre polygones peut être utilisé pour exclure le cas  $(3, 3, 4, 4)$  ci-dessus. Ces deux résultats sont mis ensemble pour former le lemme suivant.

**Lemme 1.2.2.** *Un polyèdre dans lequel tous les angles solides sont de même type ne peut pas avoir des angles solides des types suivants :*

- (1)  $(a, b, c)$  où  $a$  est impair et  $b \neq c$ .
- (2)  $(a, b, c, 3)$  où  $a \neq c$ .

*Démonstration.*

- (1) Dans le premier cas, le fait que tous les angles solides soient du même type implique que les faces du  $b$ -gone doivent s'alterner avec les faces du  $c$ -gone autour de chaque sommet de l' $a$ -gone. Or, par hypothèse  $a$  est impair, d'où une contradiction. Cette situation est représentée à la FIGURE 1.9 dans le cas particulier où  $a = 5$ . En commençant avec le sommet  $A$  et en continuant de proche en proche, on constate que l'arête  $CD$  doit séparer l' $a$ -gone avec un  $b$ -gone et un  $c$ -gone ce qui est impossible.

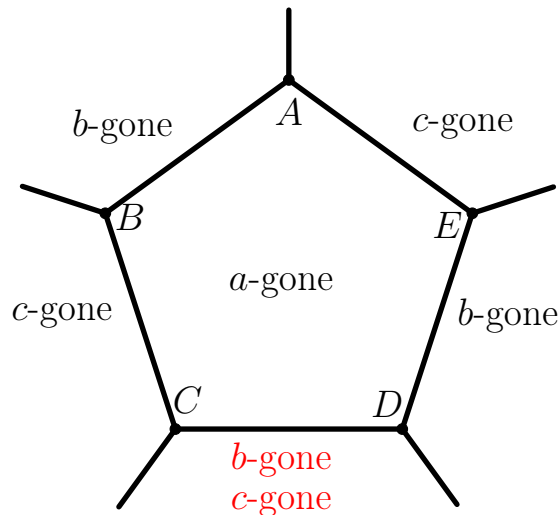


FIGURE 1.9 – Le cas où  $a$  est impair mène à une contradiction.

- (2) Dans le second cas, nous considérons la façon dont les faces doivent être arrangées autour du 3-gone. Pour chaque angle, la face opposée du 3-gone sera toujours un  $b$ -gone. Comme tous les sommets ont le même type, les côtés du 3-gone doivent être joints au  $a$ -gone et au  $c$ -gone et ces derniers doivent s'alterner autour du 3-gone car  $a \neq c$  par hypothèse. À nouveau cela mène à une contradiction comme nous pouvons le remarquer sur la FIGURE 1.10.

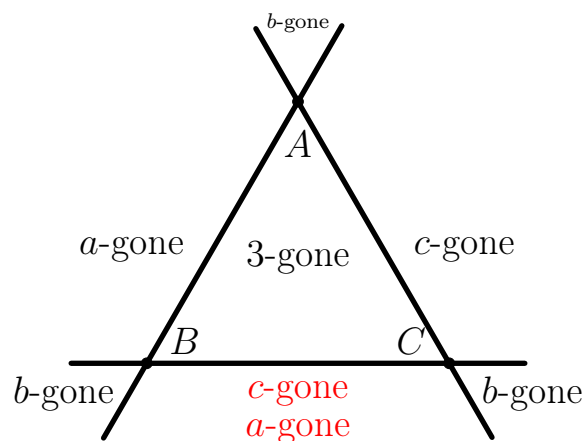


FIGURE 1.10

□

À présent, nous pouvons nous intéresser au résultat de Kepler qui offre une classification des polyèdres d'Archimède. Il est à noter que le mot *convexe* n'était pas écrit dans l'énoncé original.



**Théorème 1.2.1.** *Supposons que tous les angles solides d'un polyèdre convexe soient de même type. Outre les deux types de familles :  $(4, 4, n)$  et  $(3, 3, 3, n)$ , il y a treize types d'angles solides qui peuvent apparaître. Ces possibilités sont respectivement réalisées par les familles de prismes, d'antiprismes et par les polyèdres d'Archimède.*

*Démonstration.* Nous allons prouver ce résultat en passant en revue toutes les combinaisons de faces qui peuvent former un angle solide et en excluant celles qui ne satisfont pas les conditions établies dans les deux lemmes précédents.

(1) Considérons d'abord les espèces d'angles solides formés par deux sortes de faces.

(a) Les espèces d'angles solides formés seulement par des triangles équilatéraux et des carrés.

- Supposons qu'il y a seulement un carré pour chaque angle solide. Dans ce cas, chaque angle solide présente au plus quatre triangles équilatéraux. En effet, s'il y en avait cinq au plus, la somme des angles des faces vaudrait au moins

$$\frac{\pi}{2} + 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{6} > 2\pi.$$

Dès lors, il y a trois types possibles d'angles solides :

- \*  $(3, 3, 3, 3, 4)$  appelé *cube adouci* ;
- \*  $(3, 3, 3, 4)$  appelé *antiprisme carré* ;
- \*  $(3, 3, 4)$  que l'on exclut vu le point (1) du lemme 1.2.2.
- Supposons à présent qu'il y a deux carrés. Par conséquent, si on considère trois triangles équilatéraux et deux carrés, on a

$$3 \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Donc, on ne peut considérer qu'au plus deux triangles équilatéraux. Les espèces d'un angle solide contenant deux carrés et deux triangles équilatéraux sont donnés par :

- \*  $(4, 4, 3, 3)$  que l'on exclut vu le point (2) du lemme 1.2.2 ;
- \*  $(3, 4, 3, 4)$  appelé *cuboctaèdre*.

Il reste à considérer le cas de deux carrés et d'un seul triangle. On a

- \*  $(4, 4, 3)$  appelé *prisme triangulaire*.
- S'il y a strictement plus de deux carrés, alors on a
  - \*  $(4, 4, 4, 3, 3)$  que l'on rejette car  $3 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{6} > 2\pi$  ;
  - \*  $(3, 4, 4, 4)$  appelé *rhombicuboctaèdre*.

(b) On considère les espèces d'angles solides formés uniquement par des triangles équilatéraux et des 5-gones.

- S'il y a un seul 5-gone pour chaque angle solide, alors il ne peut y avoir cinq triangles équilatéraux car

$$\frac{3\pi}{5} + 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{34\pi}{15} > 2\pi.$$

Donc, il y a au plus quatre triangles et les différentes possibilités sont données par :

- \*  $(3, 3, 3, 3, 5)$  appelé *dodécaèdre adouci* ;
- \*  $(3, 3, 3, 5)$  appelé *antiprisme pentagonal* ;

\*  $(3, 3, 5)$  que l'on rejette vu le point (1) du lemme 1.2.2.

- S'il y a deux 5-gones pour chaque angle solide, alors il ne peut y avoir trois triangles équilatéraux car

$$2 \cdot \frac{3\pi}{5} + 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{33\pi}{15} > 2\pi.$$

On en tire qu'il y a au plus deux triangles équilatéraux et les différents cas sont donnés par :

\*  $(5, 5, 3, 3)$  que l'on exclut vu le point (2) du lemme 1.2.2 ;

\*  $(3, 5, 5, 3)$  appelé *icosidodécaèdre* ;

\*  $(5, 5, 3)$  que l'on omet vu le point (1) du lemme 1.2.2.

- Il n'y a pas d'autres espèces d'angles solides formés uniquement par des triangles équilatéraux et des 5-gones. En effet, si l'on considère trois 5-gones, alors il n'est pas possible de considérer au moins un triangle équilatéral puisque

$$3 \cdot \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{32\pi}{15} > 2\pi.$$

- (c) Les espèces d'angles solides formés uniquement par des triangles équilatéraux et des 6-gones.

- S'il y a un seul 6-gone pour chaque angle solide. Étant donné que

$$\frac{2\pi}{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi,$$

on ne peut considérer qu'au plus trois triangles équilatéraux. On a

\*  $(3, 3, 3, 6)$  appelé *antiprisme hexagonal* ;

\*  $(3, 3, 6)$  que l'on rejette vu le point (1) du lemme 1.2.2.

- S'il y a deux 6-gones pour chaque angle solide. Comme

$$2 \cdot \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi,$$

on en tire que l'on ne peut considérer qu'un seul triangle équilatéral. On obtient

\*  $(6, 6, 3)$  appelé *tétraèdre tronqué*.

- (d) Les espèces d'angles solides formés uniquement par des triangles équilatéraux et des  $n$ -gones où  $n$  est un entier strictement supérieur à 6.

- S'il y a un seul  $n$ -gone, alors on ne peut considérer qu'au plus trois triangles équilatéraux car

$$4 \cdot \frac{\pi}{3} + \underbrace{\left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right)}_{> \frac{2\pi}{3} \text{ car } n > 6} > 2\pi.$$

On en tire que seuls les deux cas suivants sont possibles :

\*  $(3, 3, 3, n)$  appelé *antiprisme  $n$ -gonal* ;

\*  $(3, 3, n)$  que l'on exclut vu le point (1) du lemme 1.2.2.

- S'il y a deux  $n$ -gones, alors on ne peut considérer qu'un seul triangle équilatéral puisque

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right) > 2\pi.$$

On a

\*  $(n, n, 3)$

- ▲ Si  $n$  est impair alors on rejette la configuration vu le point (1) du lemme 1.2.2.
- ▲ Si  $n = 12$ , alors  $\frac{\pi}{3} + 2\left(\pi - \frac{2\pi}{12}\right) = 2\pi$  ce qui est impossible. Par conséquent, nous pouvons rejeter tous les cas supérieurs ou égaux à 12.

Donc, seuls deux cas sont possibles :

- \*  $(8, 8, 3)$  appelé *cube tronqué* ;
- \*  $(10, 10, 3)$  appelé *dodécaèdre tronqué*.

(e) Les espèces d'angles solides formés uniquement par des carrés et des  $n$ -gones où  $n$  est un entier strictement supérieur à 4.

- S'il y a un seul  $n$ -gone, alors on ne peut considérer que deux carrés car

$$3 \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}_{\geq \frac{3\pi}{5} \text{ car } n > 4} > 2\pi.$$

Donc, un seul cas est à envisager. On a

- \*  $(4, 4, n)$  appelé *prisme  $n$ -gonal*.
- S'il y a deux  $n$ -gones, alors on ne peut considérer qu'un seul carré car

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \underbrace{\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}_{\geq \frac{6\pi}{5} \text{ car } n > 4} > 2\pi.$$

De nouveau, un seul cas est à envisager. On a

\*  $(n, n, 4)$ .

- ▲ Si  $n$  est impair, alors on rejette vu le point (1) du lemme 1.2.2.
- ▲ Si  $n \geq 8$ , on a  $\frac{\pi}{2} + 2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) \geq 2\pi$ .

On en tire qu'un seul cas est à envisager. On a

\*  $(6, 6, 4)$  appelé *octaèdre tronqué*.

- On ne peut avoir trois  $n$ -gones ou plus car

$$\frac{\pi}{2} + 3 \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) > 2\pi.$$

(f) Les espèces d'angles solides formés uniquement par des 5-gones et des  $n$ -gones où  $n$  est un entier strictement supérieur à 5.

- Un seul  $n$ -gone. On ne peut considérer que deux 5-gones pour chaque angle solide car si l'on en considérait trois, on aurait

$$3 \cdot \frac{3\pi}{5} + \underbrace{\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}_{\geq \frac{2\pi}{3} \text{ car } n > 5} > 2\pi.$$

On a

- \*  $(5, 5, n)$  que l'on rejette vu le point (1) du lemme 1.2.2.

- Deux  $n$ -gones. Étant donné que

$$2 \cdot \frac{3\pi}{5} + \underbrace{2 \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right)}_{\geq \frac{4\pi}{3} \text{ car } n > 5} > 2\pi$$

on ne peut considérer qu'un seul 5-gone. On a

\*  $(n, n, 5)$ .

▲ Si  $n = 7$ , alors  $\frac{3\pi}{5} + \left( \pi - \frac{2\pi}{7} \right) > 2\pi$ .

▲ Si  $n = 6$ , on a  $(6, 6, 5)$  appelé *icosaèdre tronqué*.

Les espèces d'angles solides formés par des 6-gones et des  $n$ -gones où  $n$  est un entier strictement supérieur à 6 ne conviennent pas. En effet,

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2 \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right) > 2\pi. \\ 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right) > 2\pi. \end{cases}$$

Ainsi, plus aucune espèce d'angle solide ne convient. Cela termine le point (1).

(2) Considérons à présent les espèces d'angles solides formés par trois sortes de faces différentes.

(a) Les espèces d'angles solides formés par des triangles équilatéraux, des carrés et des  $n$ -gones où  $n$  est un entier strictement supérieur à 4.

- S'il y a un seul  $n$ -gone et un seul carré, alors il y a au plus deux triangles équilatéraux car

$$3 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right)}_{\geq \frac{3\pi}{5}} > 2\pi.$$

Donc, les différents cas à envisager sont les suivants :

- \*  $(n, 4, 3, 3)$  que l'on rejette vu le point (2) du lemme 1.2.2;
- \*  $(4, 3, n, 3)$  que l'on exclut vu le point (2) du lemme 1.2.2;
- \*  $(3, 4, n)$  que l'on omet vu le point (1) du lemme 1.2.2.
- S'il y a deux carrés et un seul  $n$ -gone, alors il y a au plus un seul triangle équilatéral car

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right)}_{\geq \frac{3\pi}{5}} > 2\pi.$$

De plus, si  $n \geq 6$  alors  $\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right)}_{\geq \frac{3\pi}{5}} \geq 2\pi$ . On a alors

- \*  $(5, 4, 4, 3)$  que l'on rejette vu le point (2) du lemme 1.2.2;
- \*  $(3, 4, 5, 4)$  appelé *rhombicosidodécaèdre*.
- S'il y a deux  $n$ -gones alors

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \underbrace{2 \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right)}_{\geq \frac{6\pi}{5}} > 2\pi.$$

(b) Les espèces d'angles solides formés par trois sortes de faces différentes dont aucune n'est un triangle équilatéral.

- Par le point (1) du lemme 1.2.2, nous savons qu'aucune de ces trois faces ne peut être un  $m$ -gone où  $m$  est impair. On a
  - \* (4, 6, 12) que l'on rejette car  $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} + (\pi - \frac{2\pi}{12}) = 2\pi$  ;
  - \* (4, 8, 10) que l'on exclut car  $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{5} > 2\pi$  ;
  - \* (4, 6, 8) appelé *cuboctaèdre tronqué* ;
  - \* (4, 6, 10) appelé *icosidodécaèdre tronqué*.

Toutes les possibilités de placer des polygones réguliers afin de former un angle solide ont été considérées. En effet, par le lemme 1.2.1, nous savons qu'au plus trois sortes de faces différentes peuvent apparaître autour d'un angle solide. Si l'on ne tient pas compte des familles de prismes et d'antiprismes, les treize polyèdres trouvés sont les treize polyèdres d'Archimède. □

### 1.2.2 Classification des polyèdres d'Archimède via la relation d'Euler

Dans [28], Mark Villarino propose d'utiliser la relation d'Euler afin d'obtenir l'énumération faite par Kepler. Pour ce faire, trois lemmes sont nécessaires. Étant donné un polyèdre, nous désignerons par

- $S$  le nombre total de sommets ;
- $S_p$  le nombre total de sommets appartenant à  $p$  arêtes distinctes ;
- $A$  le nombre total d'arêtes ;
- $F$  le nombre total de faces ;
- $F_p$  le nombre total de faces  $p$ -gonales.

**Lemme 1.2.3.** *Pour tout polyèdre, on a*

- (1)  $3F_3 + 2F_4 + F_5 = 12 + 2S_4 + 4S_5 + \dots + F_7 + 2F_8 + \dots$ .
- (2) *Au moins une de ses faces est soit un triangle, soit un quadrilatère, soit un pentagone ; cela signifie qu'il n'existe pas de polyèdres dont toutes les faces sont des hexagones ou des polygones ayant strictement plus de six côtés.*

*Démonstration.* Il est clair que

- (a)  $F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + \dots = F$  ;
- (b)  $3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + 7F_7 + 8F_8 + \dots = 2A$  ;
- (c)  $S_3 + S_4 + S_5 + \dots = S$  ;
- (d)  $3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \dots = 2A$ .

Multiplions la première égalité par six et soustrayons lui la deuxième égalité, nous obtenons alors que

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 - F_7 - 2F_8 + \dots = 6F - 2A.$$

Par la relation d'Euler, on a

$$6F = 12 + 6A - 6S$$

donc,

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 - F_7 - 2F_8 - \dots = 12 + 4A - 6S.$$

Par l'égalité (d), on a

$$4A = 6S_3 + 8S_4 + 10S_5 + \dots$$

et par l'égalité (c), on a

$$6S = 6S_3 + 6S_4 + 6S_5 + \dots$$

Donc,

$$4A - 6S = 2S_4 + 4S_5 + \dots$$

Ainsi, nous obtenons que

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 - F_7 - 2F_8 - \dots = 12 + 2S_4 + 4S_5 + \dots$$

qui est équivalent à

$$3F_3 + 2F_4 + F_5 = 12 + 2S_4 + 4S_5 + \dots + F_7 + 2F_8 + \dots$$

Cela achève la démonstration du point (1). Étant donné que le deuxième membre de l'égalité du point (1) est strictement positif, il est clair que  $F_3$ ,  $F_4$  et  $F_5$  ne peuvent pas être nuls simultanément. D'où la conclusion. □

**Lemme 1.2.4.** *Pour tout polyèdre d'Archimède, si l'on désigne par  $r$  le nombre d'arêtes se rencontrant en chaque sommet, on a*

(1)

$$rS = 2A;$$

(2) si l'on désigne par  $q$  le nombre de  $p$ -gones entourant chaque sommet, on a

$$pF_p = qS;$$

(3) si  $p_1$ -gone,  $\dots$ ,  $p_r$ -gone (où les  $p_k$  ( $k \in \{1, \dots, r\}$ ) ne sont pas toujours tous différents), et se rencontrent en chaque sommet, alors on a

$$S = \frac{2}{1 - \frac{r}{2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_r}}.$$

*Démonstration.* Clairement, l'égalité (1) est vérifiée puisque chaque arête est délimitée par deux sommets. Dès lors, le produit  $rS$  compte deux fois chaque arête. D'où

$$rS = 2A.$$

Montrons l'égalité (2). Comme  $pF_p$  compte le nombre total de sommets qui apparaissent dans les faces  $p$ -gonales et puisque  $q$  désigne le nombre de  $p$ -gones qui entourent chaque sommet, il est clair que chaque sommet apparaît exactement dans  $q$  faces  $p$ -gonales. Ainsi, dans  $pF_p$ , chaque sommet est compté exactement  $q$  fois.

Il nous reste à montrer le point (3) pour achever la démonstration. Par la relation d'Euler, on a

$$S - A + F = 2.$$

Par (1), on a

$$A = \frac{rS}{2}$$

et par (2) on a

$$F_p = \frac{qS}{p}.$$

De plus, comme

$$F = F_3 + F_4 + \dots$$

et comme chaque sommet appartient à  $r$  arêtes, on obtient que

$$F = F_{p_1} + F_{p_2} + \cdots + F_{p_r}$$

où  $p_1, \dots, p_r$  ne sont pas forcément tous différents. Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned} S - A + F &= 2 \\ \Leftrightarrow S - \frac{rS}{2} + \left( \frac{1}{p_1}S + \cdots + \frac{1}{p_r}S \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow S &= \frac{2}{1 - \frac{r}{2} + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r}}. \end{aligned}$$

□

Il nous reste à énoncer un dernier lemme avant d'établir que les polyèdres d'Archimède sont au nombre de treize.

**Lemme 1.2.5.** *Si  $r$  désigne le nombre d'arêtes qui se rencontrent en chaque sommet d'un polyèdre d'Archimède, alors  $r$  est inférieur ou égal à 5.*

*Démonstration.* Par le point (3) du lemme 1.2.4, nous savons que

$$1 - \frac{r}{2} + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r} > 0.$$

Cela revient à dire que

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r} > \frac{r-2}{2}.$$

Or,

$$p_1 \geq 3, p_2 \geq 3, \dots, p_r \geq 3.$$

On en tire que

$$\frac{r}{3} \geq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r} > \frac{r-2}{2}$$

et donc que

$$\frac{r}{3} > \frac{r-2}{2}.$$

Ainsi,

$$r < 6.$$

Cela achève la démonstration.

□

Pour obtenir que les polyèdres d'Archimède sont au nombre de treize, nous allons passer en revue les différents cas possibles. Par le lemme 3, nous devons traiter trois cas :

- le cas où  $r = 5$  : cinq faces se rencontrent en chaque sommet ;
- le cas où  $r = 4$  : quatre faces se rencontrent en chaque sommet ;
- le cas où  $r = 3$  : trois faces se rencontrent en chaque sommet.

**Proposition 1.2.1.** *(Cas où  $r = 5$ )*

*Le cas où cinq faces se rencontrent en chaque sommet nous donne deux polyèdres d'Archimède : le dodécaèdre adouci et le cube adouci.*

*Démonstration.* Par le point (3) du lemme 1.2.4, on a

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} = \frac{2}{V} > 0.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} - \frac{3}{2} > 0. \quad (1.2)$$

Par le point (2) du lemme 1.2.3, nous savons qu'au moins un des  $p_k$  ( $k \in \{1, \dots, 5\}$ ) doit valoir 3, 4 ou bien 5. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5.$$

- Au moins une face est un triangle.

Dans ce cas, l'inéquation (1.2) devient

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} - \frac{7}{6} > 0.$$

Par hypothèse, on a

$$3 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5.$$

Supposons que  $p_4$  vaut au moins 4, dans ce cas, on a

$$p_2 \geq 3, p_3 \geq 3, p_4 \geq 4 \text{ et } p_5 \geq 4.$$

Alors, on a

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

et cela contredit l'inéquation (1.2). On en tire que  $p_4 = 3$ .

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{p_5} - \frac{7}{6} < 0$$

si et seulement si

$$p_5 < 6.$$

On conclut alors que trois quintuplets sont possibles, on a

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (3, 3, 3, 3, 5)$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (3, 3, 3, 3, 4)$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (3, 3, 3, 3, 3).$$

Ils correspondent respectivement au dodécaèdre adouci, au cube adouci et à l'icosaèdre qui est d'ailleurs un polyèdre de Platon comme nous l'avons vu dans la section précédente.

- Toutes les faces ont au moins quatre côtés :  $p_1 \geq 4$ .

On a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{p_5} - \frac{3}{2} > 0.$$

Cela revient à dire que  $p_5 < 2$  ce qui est impossible. Cela termine la démonstration.

□



À présent, nous allons traiter le deuxième cas en démontrant la proposition suivante.

**Proposition 1.2.2.** (Cas où  $r = 4$ ) *Le cas où quatre faces se rencontrent en chaque sommet nous donne quatre polyèdres d'Archimède : le cubocatèdre, l'icosidodécaèdre, le rhombicuboctaèdre et le rhombicosidodécaèdre.*

*Démonstration.* Par le point (3) du lemme 1.2.4, on a

$$1 - \frac{4}{2} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} > 0$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} - 1 > 0.$$

À nouveau, par le point (2) du lemme 1.2.3, au moins un des  $p_k$  ( $k \in \{1, \dots, 4\}$ ) doit valoir 3, 4 ou 5.

- Au moins une face est un triangle :  $p_1 = 3$ .

Dans ce cas, on a

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} - \frac{2}{3} > 0. \quad (1.3)$$

Nous sommes dans le cas de figure où chaque sommet est entouré par une face triangulaire, une face  $p_2$ -gonale, une face  $p_3$ -gonale et une face  $p_4$ -gonale. On remarque alors que

$$p_2 = p_4$$

comme le montre la FIGURE 1.11.

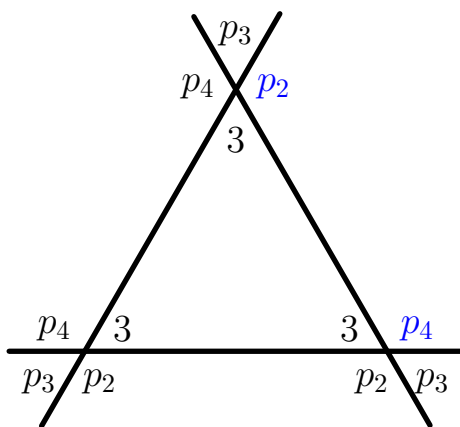


FIGURE 1.11 – Chaque sommet présente un triangle, un  $p_2$ -gone, un  $p_3$ -gone et un  $p_4$ -gone.

Par conséquent, l'inégalité (1.3) devient

$$\frac{2}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{2}{3} > 0.$$

Cela revient à dire que

$$6p_3 + 3p_2 - 2p_2p_3 > 0.$$

Si l'on retranche 9 aux deux membres de cette inégalité, on obtient

$$6p_3 + 3p_2 - 2p_2p_3 - 9 > -9$$

ce qui est équivalent à

$$(-1)(p_2 - 3)(2p_3 - 3) > -9$$

ou encore à

$$(p_2 - 3)(2p_3 - 3) < 9.$$

Si  $p_2 = 3$ , il est clair que  $p_3$  peut valoir n'importe quel naturel supérieur ou égal à 3. Dans le cas contraire et de manière générale, pour que cette dernière inégalité soit satisfaite, il faut que

$$1 < 2p_3 - 3 < 9.$$

Or,  $2p_3 - 3$  est un nombre impair. Donc, nous savons que

$$2p_3 - 3 = 3 \text{ ou } 2p_3 - 3 = 5 \text{ ou } 2p_3 - 3 = 7.$$

Cela revient à dire que

$$p_3 = 3 \text{ ou } p_3 = 4 \text{ ou } p_3 = 5.$$

Étant donné que

$$(p_2 - 3)(2p_3 - 3) < 9,$$

\* si  $p_3 = 3$ , alors

$$p_2 = 3 \text{ ou } p_2 = 4 \text{ ou } p_2 = 5$$

\* si  $p_3 = 4$  ou  $p_3 = 5$ , alors

$$p_2 = 3 \text{ ou } p_2 = 4.$$

En conclusion, les différents couples  $(p_2, p_3)$  possibles sont donnés par

$$(p_2, p_3) = (3, 3)$$

$$(p_2, p_3) = (4, 3)$$

$$(p_2, p_3) = (5, 3)$$

$$(p_2, p_3) = (4, 4)$$

$$(p_2, p_3) = (4, 5)$$

$$(p_2, p_3) = (3, m)$$

où  $m$  est un naturel supérieur ou égal à 4. Comme  $p_1 = 3$  et comme  $p_2 = p_4$ , les différents polyèdres possibles sont donc donnés par :

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (3, 3, 3, 3)$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (3, 4, 3, 4)$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (3, 5, 3, 5)$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (3, 4, 4, 4)$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (3, 4, 5, 4)$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (3, 3, m, 3).$$

Ils correspondent respectivement à l'octaèdre (qui est un polyèdre de Platon), au cuboctaèdre, à l'icosidodécaèdre, au rhombicuboctaèdre, au rhombicosidodécaèdre et aux antiprismes.

- Toutes les faces ont au moins 4 côtés :  $p_1 \geq 4$ .

Comme précédemment, nous pouvons supposer que

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4.$$

Par le point (3) du lemme 1.2.4, nous savons que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} - 1 > 0.$$

Or, comme

$$p_1 \geq 4$$

et comme

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4,$$

nous obtenons que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} - 1 \leq 0$$

d'où une contradiction. Par conséquent, le cas  $r = 4$  est achevé.

□

Pour conclure, il nous reste à prouver la proposition suivante.

**Proposition 1.2.3.** (*Cas où  $r = 3$* )

*Le cas où trois faces se rencontrent en chaque sommet nous donne sept polyèdres d'Archimède : le tétraèdre tronqué, le cube tronqué, le dodécaèdre tronqué, l'icosidodécaèdre tronqué, le cuboctaèdre tronqué, l'octaèdre tronqué et l'icosaèdre tronqué.*

*Démonstration.* Par le point (3) du lemme 1.2.4, on a

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{2} > 0.$$

Par le point (2) du lemme 1.2.3, au moins un des  $p_k$  ( $k \in \{1, \dots, 3\}$ ) doit valoir 3, 4 ou 5. Nous allons traiter les différents cas séparément.

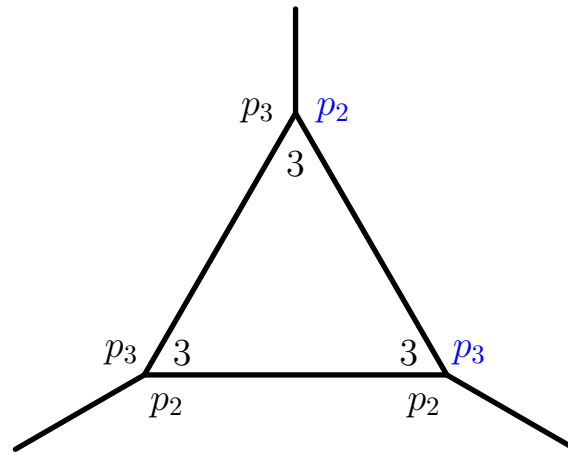
- Au moins une face est un triangle :  $p_1 = 3$ .

On obtient alors que

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{6} > 0.$$

Comme précédemment, la situation générale est représentée sur la FIGURE 1.12, nous arrivons à la conclusion que

$$p_2 = p_3.$$

FIGURE 1.12 – Chaque sommet présente un triangle, un  $p_2$ -gone et un  $p_3$ -gone.

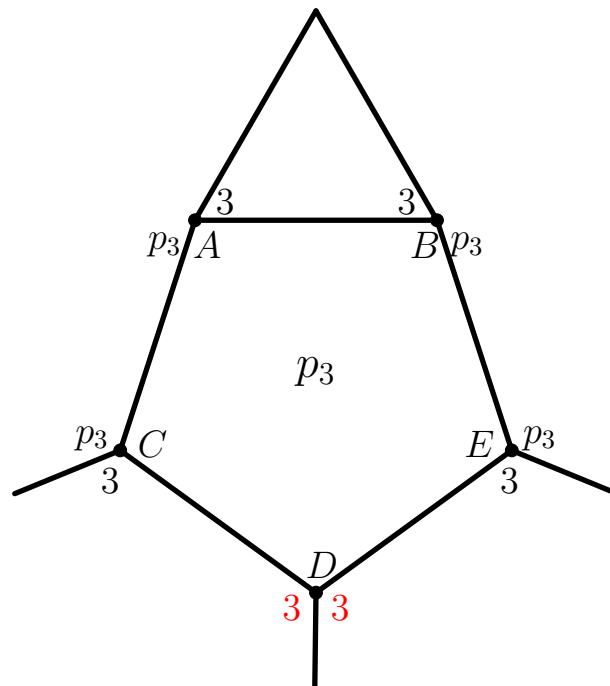
On obtient alors que

$$\frac{2}{p_3} - \frac{1}{6} > 0.$$

Cela revient à dire que

$$3 \leq p_3 \leq 11.$$

Comme chaque sommet est entouré par un triangle et deux  $p_3$ -gones, nous savons que chaque arête est commune à soit un triangle et un  $p_3$ -gone soit à deux  $p_3$ -gones. Supposons que  $p_3$  est différent de 3 et montrons que  $p_3$  est pair. Procédons par l'absurde et supposons que  $p_3$  est impair. Intéressons-nous à la FIGURE 1.13. Comme le sommet  $A$  est entouré par un triangle et deux  $p_3$ -gones, il est clair que l'arête  $AC$  sépare deux  $p_3$ -gones. Il en est de même pour l'arête  $BE$ . Par conséquent, l'arête  $CD$  et l'arête  $ED$  séparent un  $p_3$ -gone et un triangle. Il en résulte que le sommet  $D$  est entouré par deux triangles et un  $p_3$ -gone ce qui est impossible.

FIGURE 1.13 – Le cas  $p_3$  impair mène à une contradiction.

Donc, comme

$$3 \leq p_3 \leq 11$$

les seules valeurs possibles pour  $p_3$  sont données par

$$p_3 \in \{3, 4, 6, 8, 10\}.$$

Donc, comme  $p_1 = 3$  et comme  $p_2 = p_3$ , nous obtenons que

\* si  $p_3 = 3$ , alors

$$(p_1, p_2, p_3) = (3, 3, 3)$$

\* si  $p_3 = 4$ , alors

$$(p_1, p_2, p_3) = (3, 4, 4)$$

\* si  $p_3 = 6$ , alors

$$(p_1, p_2, p_3) = (3, 6, 6)$$

\* si  $p_3 = 8$ , alors

$$(p_1, p_2, p_3) = (3, 8, 8)$$

\* si  $p_3 = 10$ , alors

$$(p_1, p_2, p_3) = (3, 10, 10).$$

Les différents polyèdres obtenus correspondent respectivement au tétraèdre, au prisme à bases triangulaires, au tétraèdre tronqué, au cube tronqué et au dodécaèdre tronqué.

Considérons à présent le cas où toutes les faces ont au moins quatre côtés et dont une en présente exactement quatre.

- $p_1 = 4 \leq p_2 \leq p_3$ .

Nous devons donc considérer l'inéquation

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{2} > 0$$

qui est équivalente à

$$4p_3 + 4p_2 - p_2p_3 > 0.$$

En retranchant 16 aux deux membres, nous obtenons

$$4p_3 + 4p_2 - p_2p_3 - 16 > -16.$$

Cela revient à dire que

$$(-1)(p_2 - 4)(p_3 - 4) > -16$$

et donc que

$$(p_2 - 4)(p_3 - 4) < 16.$$

En raisonnant de la même manière que précédemment, on arrive à la conclusion que  $p_2$  et  $p_3$  sont pairs. Puisque

$$(p_2 - 4)(p_3 - 4) < 16,$$

les différents polyèdres possibles sont donnés par

$$(p_1, p_2, p_3) = (4, 6, 10)$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (4, 6, 8)$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (4, 6, 6)$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (4, 4, 4)$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (4, 4, m)$$

où  $m$  est un naturel pair supérieur ou égal à 6. On les désigne respectivement par icosaédraèdre tronqué, cuboctaèdre tronqué, octaèdre tronqué, cube et prismes.

Il ne nous reste plus qu'un seul cas à considérer. Il s'agit du cas où toutes les faces ont au moins cinq côtés dont une en a exactement cinq.

- $p_1 = 5 \leq p_2 \leq p_3$ .

Dans ce cas, nous avons l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} - \frac{3}{10} > 0$$

qui est équivalente à

$$10p_3 + 10p_2 - 3p_2p_3 > 0.$$

En multipliant les deux membres par 3 et en leur retranchant ensuite 100. Nous obtenons que

$$30p_3 + 30p_2 - 9p_2p_3 - 100 > -100$$

qui est équivalent à

$$(-1)(3p_2 - 10)(3p_3 - 10) > -100$$

ou encore à

$$(3p_2 - 10)(3p_3 - 10) < 100.$$

En raisonnant comme précédemment, nous remarquons que

$$p_2 = p_3.$$

On obtient alors que

$$(3p_2 - 10)^2 < 100.$$

Cela revient à dire que

$$0 < 3p_2 < 20.$$

Ainsi,

$$p_2 = 5 \text{ ou } p_2 = 6.$$

Nous obtenons alors deux polyèdres supplémentaires donnés par

$$(p_1, p_2, p_3) = (5, 5, 5)$$

et

$$(p_1, p_2, p_3) = (5, 6, 6)$$

qui correspondent respectivement au dodécaèdre (qui est un polyèdre de Platon) et à l'icosaèdre tronqué.

□

Si parmi les polyèdres trouvés dans les preuves des trois propositions précédentes, nous rejetons les polyèdres de Platon ainsi que les prismes et les antiprismes. Il ne nous reste plus que treize polyèdres repris dans le tableau suivant.

1	(3, 3, 3, 3, 5)	dodécaèdre adouci
2	(3, 3, 3, 3, 4)	cube adouci
3	(3, 4, 3, 4)	cuboctaèdre
4	(3, 5, 3, 5)	icosidodécaèdre
5	(3, 4, 4, 4)	rhombicuboctaèdre
6	(3, 4, 5, 4)	rhombicosidodécaèdre
7	(3, 6, 6)	tétraèdre tronqué
8	(3, 8, 8)	cube tronqué
9	(3, 10, 10)	dodécaèdre tronqué
10	(4, 6, 10)	icosidodécaèdre tronqué
11	(4, 6, 8)	cuboctaèdre tronqué
12	(4, 6, 6)	octaèdre tronqué
13	(5, 6, 6)	icosaèdre tronqué

TABLE 1.2 – Les treize polyèdres d'Archimède associés aux symboles trouvés.

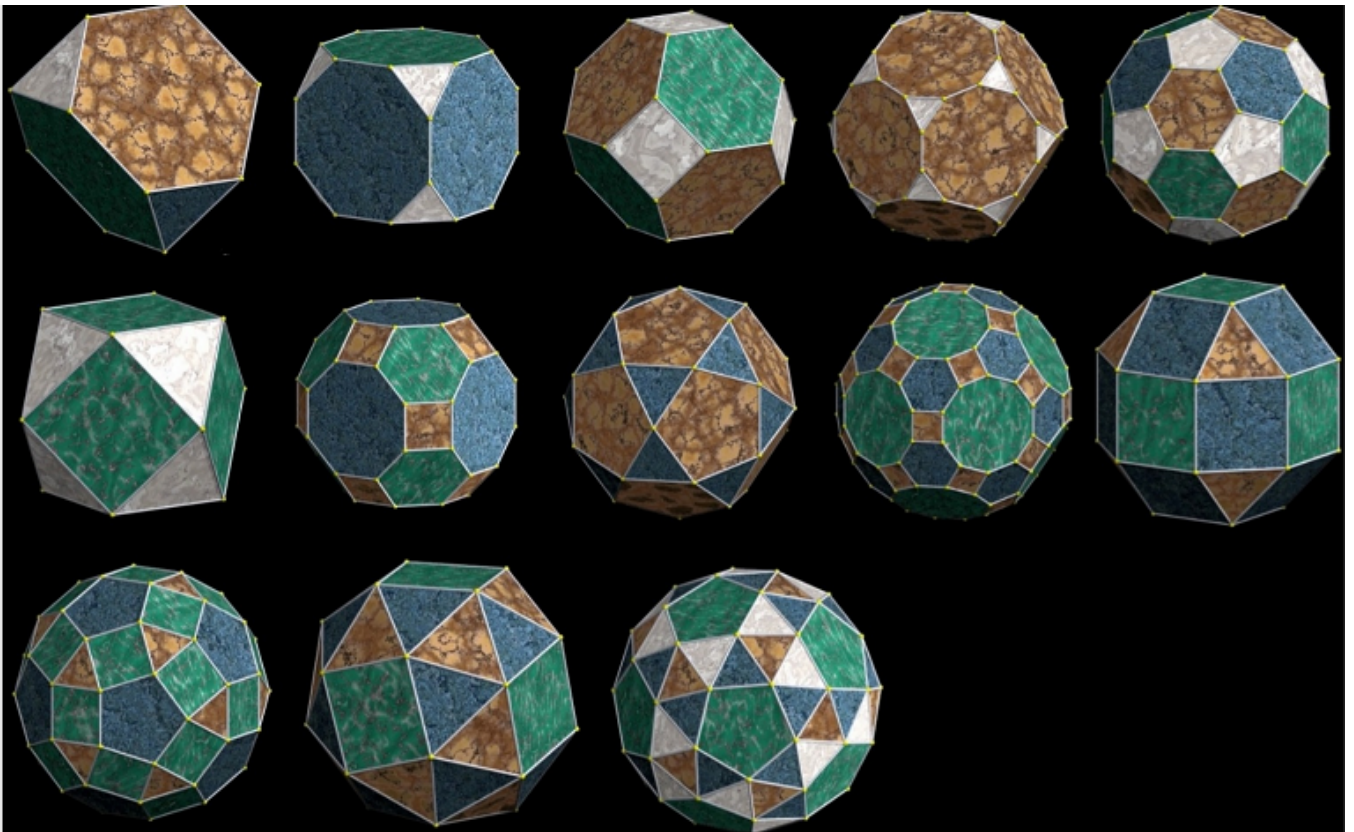


FIGURE 1.14 – Les treize polyèdres d'Archimède.

Le lecteur intéressé trouvera d'autres illustrations de ce type en consultant [12].

### 1.3 Remise en question

Dans les deux sections précédentes nous avons présenté les preuves que l'on trouve le plus souvent dans la littérature concernant les polyèdres de Platon et d'Archimède. Dans les différentes preuves présentées, nous nous sommes contentés de discuter les différents cas possibles. À la fin du raisonnement, nous obtenons cinq polyèdres pour Platon et treize pour Archimède. Que peut-on vraiment dire de l'existence et de l'unicité de ces polyèdres ? À ce stade, pas grand chose... En effet, les preuves présentées ne nous donnent aucune information concernant l'existence ou l'unicité de tels polyèdres. Nous savons simplement que si l'on dispose d'un polyèdre de Platon ou d'Archimède, alors le type des angles est parmi une liste de cinq ou treize possibilités. On a montré des exemples où ces cinq ou treize possibilités semblent satisfaites. Mais on n'a pas vraiment démontré que l'objet correspondant à la belle représentation donnée existe réellement. C'est en fait fort difficile, faute d'une représentation explicite. La question de l'existence n'a donc pas été réglée. En ce qui concerne l'unicité, nous avons obtenu une liste finie de types possibles. Mais comment être certain qu'il n'y a pas plusieurs polyèdres qui correspondent à ce type et qui sont d'une certaine façon "inéquivalents", c'est-à-dire par exemple non similaires ?

Nous avons travaillé avec beaucoup d'objets tels que des polygones réguliers convexes, des polyèdres, des faces, des arêtes, des sommets,... Il nous faudrait des définitions précises car pour l'instant, il nous est nécessaire d'avoir recours à un dessin afin de nous mettre d'accord sur les différentes notions. Nous avons utilisé beaucoup de résultats en voici une liste :

- la relation d'Euler ;
- la somme des angles autour d'un sommet d'un polyèdre convexe est strictement inférieure à  $2\pi$  ;
- une arête est délimitée par deux sommets ;
- une arête est à la frontière de deux faces ;
- l'amplitude des angles d'un polygone régulier à  $n$  côtés est donnée par

$$\pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Il nous faudra donc prouver tous ces résultats. Cela se fera tout au long de ce travail. Nous serions peut-être tentés de penser que la difficulté de définir proprement les différentes notions est inhérente à la dimension. En effet, force est de constater qu'en dimension 3, nous avons des définitions "visuelles" et littéraires de faces, d'arêtes, de sommets, mais pour pouvoir démontrer, il est nécessaire d'avoir des définitions précises... Dès le début de ce premier chapitre, nous avons expliqué que les faces des polyèdres sont des polygones. Le temps est donc venu de s'y intéresser. Dans le prochain chapitre, nous allons nous placer en dimension 2 et étudier un peu plus en détail les polygones.



# Chapitre 2

## Variations sur les polygones

Nous avons mis en évidence dans le chapitre précédent les difficultés liées à la définition des polyèdres. La familiarité acquise à leur sujet par des manipulations et des raisonnements empiriques ont constitué un obstacle à la prise de la nécessité de les définir précisément. Ce constat reste valide déjà dans le contexte bidimensionnel. Pour cette raison, nous consacrons ce chapitre à l'analyse de certaines définitions de polygones et polygones réguliers présentes dans des ouvrages de référence [3] et [9]. Nous abordons dans ce contexte plus élémentaire la notion fondamentale de régularité. Ce chapitre se compose de deux sections : la première est consacrée à l'analyse d'une définition naturelle pour les polygones du plan affine euclidien et à ses conséquences. La seconde section est consacrée plus particulièrement aux polygones réguliers.

### 2.1 Les polygones dans le plan affine euclidien

Avant d'entrer dans le vif du sujet, commençons par fixer le cadre de travail et quelques notations. Tout au long de ce chapitre, nous travaillons dans un espace affine réel euclidien  $\mathcal{A}$  de dimension 2. Quelques rudiments de la théorie relative aux espaces affines sont rassemblés dans l'annexe B qui constitue un résumé sommaire du cours de première année [20]. La définition de polygone adoptée dans ce chapitre repose sur l'idée intuitive de ligne brisée [8]. Le lecteur trouvera dans l'annexe A quelques définitions de la notion de polygones peu satisfaisantes. Il s'avère que ces définitions peuvent mener à quelques confusions si elles ne sont pas précisées, notamment au sujet de la définition des polygones réguliers. En particulier, la notion intuitive d'angle en un sommet d'un polygone est déjà subtile. Nous sommes amenés à décider entre autres s'il est légitime de considérer uniquement des angles non-orientés ou orientés. Voici une première définition possible.

**Définition 2.1.1** (Ligne brisée, angle non orienté). *Soit  $n$  un naturel supérieur ou égal à 2. Un polygone  $P_1 \dots P_n$  est la donnée d'un  $n$ -uplet  $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{A}^n$ . Les sommets de ce polygone sont les points  $P_1, \dots, P_n$  et les  $n$  côtés de ce polygone sont donnés par les segments  $[P_i, P_{i+1}]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  où l'on pose  $P_{n+1} = P_1$ . L'angle relatif au sommet  $P_i$  est donné par l'angle non orienté des vecteurs  $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  où l'on pose  $P_0 = P_n$  et  $P_{n+1} = P_1$ .*

**Remarque 2.1.1.** *En pratique, on ne distingue généralement pas le polygone  $P_1 \dots P_n$  de ses permutations circulaires.*

Nous pouvons à présent étudier les implications de cette définition et en particulier tenter d'approcher la notion de régularité dans ce contexte. Il est commode de définir un polygone régulier comme étant un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les

angles sont égaux. Nous y reviendrons dans la prochaine section. Sachant cela, est-il judicieux de travailler avec des angles non orientés? Il est difficile de trancher catégoriquement mais en faisant ce choix, le polygone de la FIGURE 2.1 est régulier puisque tous ses côtés ont même longueur et tous ses angles non orientés valent  $\frac{\pi}{2}$ .

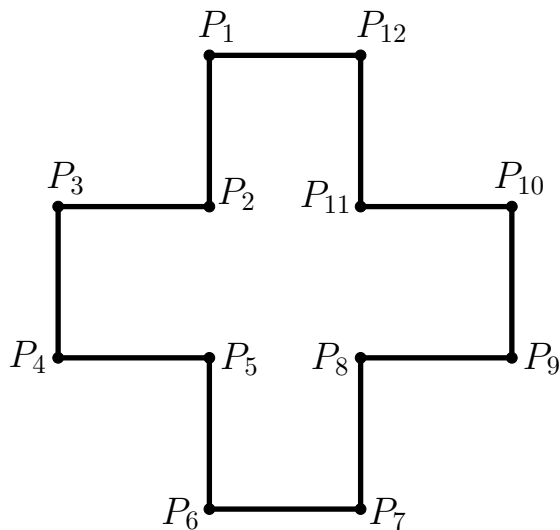


FIGURE 2.1 – Un polygone en forme de croix.

Il est intuitivement assez clair que ce polygone ne partage pas toutes les propriétés du dodécagone régulier<sup>1</sup>. Cette constatation impose de revoir et d'affûter la définition choisie ci-dessus.

**Définition 2.1.2** (Ligne brisée, angle orienté). Soit  $n$  un naturel supérieur ou égal à 2. Un polygone  $P_1 \dots P_n$  est la donnée d'un  $n$ -uplet  $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{A}^n$ . Les sommets de ce polygone sont les points  $P_1, \dots, P_n$  et les  $n$  côtés de ce polygone sont donnés par les segments  $[P_i, P_{i+1}]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  où l'on pose  $P_{n+1} = P_1$ . L'angle relatif au sommet  $P_i$  est donné par l'angle orienté des vecteurs  $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  où l'on pose  $P_0 = P_n$  et  $P_{n+1} = P_1$ .

Dans ce cas, nous constatons que le polygone de la FIGURE 2.1 n'est pas régulier puisqu'il présente des angles orientés de  $\frac{3\pi}{2}$  et de  $\frac{\pi}{2}$ . Évidemment, nous observons que le choix de départ n'est pas sans conséquences.

## 2.2 Polygones réguliers

Dans la littérature, il est fréquent de trouver différentes définitions de la régularité des polygones variant d'un ouvrage à l'autre. Dans cette section nous allons montrer que certaines approches usuelles sont bien équivalentes.

**Définition 2.2.1.** Un polygone  $P = P_1 \dots P_n$  ( $n \geq 2$ ) de  $\mathcal{A}$  est régulier s'il existe un repère orthonormé dans lequel les coordonnées de  $P_k$  où  $k \in \{1, \dots, n\}$  sont données, à un multiple non nul près, par les parties réelle et imaginaire de  $\omega^k$  où  $\omega$  est une racine  $n$ -ème primitive de l'unité, disons par exemple  $\omega = e^{2il\pi/n}$  où  $l$  est premier avec  $n$ .

Nous n'avons pas choisi de définir les polygones réguliers comme étant ceux pour lesquels la mesure des côtés et les angles sont égaux. Cependant, les deux définitions sont équivalentes. C'est l'objet de la proposition suivante.

1. Cette intuition peut être développée en terme de symétries de la figure.

**Proposition 2.2.1.** *Si  $P = P_1 \dots P_n$  est un polygone régulier si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles orientés ont la même amplitude.*

Nous proposons ci-dessous une preuve élémentaire basée sur le calcul explicite en coordonnées des longueurs des côtés et des angles orientés.

*Démonstration.*

- La condition est nécessaire.

Soit  $P = P_1 \dots P_n$  un polygone régulier. Commençons par montrer que tous ses côtés ont la même longueur. Par la définition 2.2.1, nous savons que le polygone est inscrit dans un cercle de rayon  $R$ . Considérons le repère fourni par la définition 2.2.1 dans lequel les coordonnées des sommets sont données par

$$P_k : R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $l$  premier avec  $n$  fixé a priori. Nous allons calculer la norme du vecteur  $\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . On a

$$\|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\| = R \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right)\right)^2}$$

En développant et en appliquant la formule fondamentale, on obtient

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\| &= R \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right) - 2 \sin\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right)} \\ &= \sqrt{2} R \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Par les formules d'addition, on obtient

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\| &= \sqrt{2} R \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2kl\pi - 2(k+1)l\pi}{n}\right)} \\ &= \sqrt{2} R \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

On en tire que la norme du vecteur  $\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$  est indépendante de  $k$ . Donc, tous les côtés ont la même longueur. Il nous reste à montrer que tous les angles du polygone ont la même amplitude. Soit  $\alpha$  un angle du polygone dont les côtés sont donnés par les vecteurs

$$u_k = \overrightarrow{P_{k+1} P_k} \text{ et } v_k = \overrightarrow{P_{k+1} P_{k+2}}.$$

Nous savons que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u_k, v_k \rangle}{\|u_k\| \|v_k\|}.$$

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , les vecteurs  $u_k$  et  $v_k$  ont pour composantes :

$$u_k : R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2kl\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \text{ et } v_k : R \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2(k+2)l\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2(k+2)l\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{2(k+1)l\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

En utilisant les formules de Simpson, nous obtenons

$$u_k : R \begin{pmatrix} 2 \sin\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) \\ -2 \cos\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \text{ et } v_k : R \begin{pmatrix} -2 \sin\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) \\ 2 \cos\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \langle u_k, v_k \rangle &= -4R^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) - 4R^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) \\ &= -4R^2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Comme tous les côtés ont la même longueur, on a  $\|u_k\| = \|v_k\|$ . On obtient alors

$$\cos(\alpha) = \frac{-2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}.$$

En utilisant les formules de Carnot, nous obtenons

$$\cos(\alpha) = -\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right).$$

Dans repère orthonormé positif, nous savons également que

$$\sin(\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} u_{k,1} & v_{k,1} \\ u_{k,2} & v_{k,2} \end{vmatrix}}{\|u_k\| \|v_k\|}.$$

On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_{k,1} & v_{k,1} \\ u_{k,2} & v_{k,2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 \sin\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) & -2 \sin\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) \\ -2 \cos\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) & 2 \cos\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) \end{vmatrix} \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) - 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \left( \cos\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{(2k+1)l\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{(2k+3)l\pi}{n}\right) \right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

A nouveau, puisque  $\|u_k\| = \|v_k\|$ , on a

$$\sin(\alpha) = \frac{2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}.$$

En utilisant les formules de Carnot, il vient

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right).$$

On en tire que tous les angles orientés ont la même amplitude puisque le cosinus et le sinus de chaque angle sont indépendants de  $k$ . L'amplitude de chaque angle vaut donc

$$\pi - \frac{2l\pi}{n}.$$

- La condition est suffisante<sup>2</sup>.

Par hypothèse, les angles (orientés)  $\widehat{P_1P_2P_3}$  et  $\widehat{P_2P_3P_4}$  ont même amplitude, donc les triangles  $P_1P_2P_3$  et  $P_2P_3P_4$  sont isométriques. Il existe donc une isométrie  $I$  telle que

$$I(P_1) = P_2, \quad I(P_2) = P_3 \text{ et } I(P_3) = P_4.$$

Par hypothèse encore, l'application  $I$  préserve l'orientation des angles  $P_1P_2P_3$  et  $P_2P_3P_4$  : il s'agit donc d'une rotation. En itérant ce raisonnement, on prouve que les sommets du polygone étudié sont images l'un de l'autre par cette rotation. Vu que

$$P_{n+1} = P_1,$$

la rotation  $I^n$  a deux points fixes distincts, donc  $I^n$  est l'identité et ce n'est le cas pour aucune des puissances  $I^k$  avec  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Si on prend un repère positif où l'origine est le centre du cercle circonscrit à  $P_1P_2P_3$  (c'est-à-dire le centre de la rotation  $I$ ) et où le premier axe est déterminé par  $I^{-1}(P_1)$ , alors les points  $P_k$  ont bien les coordonnées voulues.

□

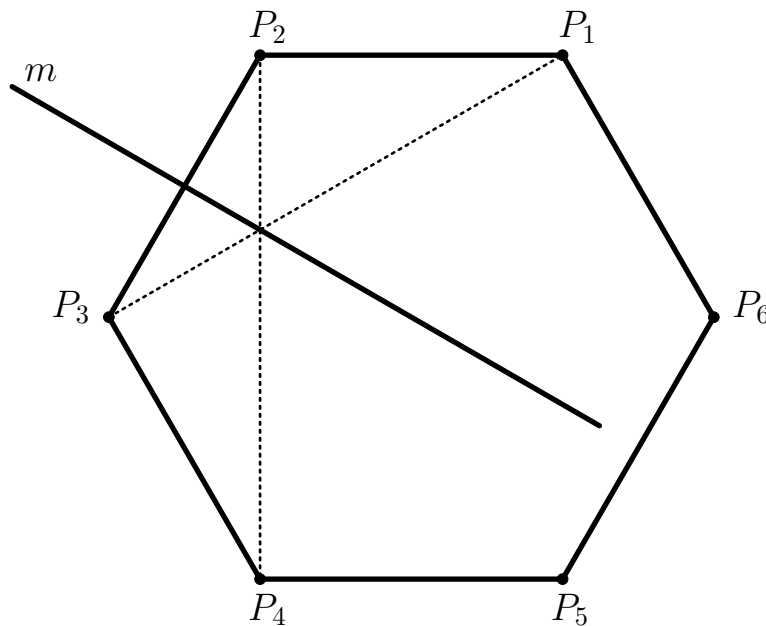


FIGURE 2.2

### Remarque 2.2.1.

- (1) Pour la condition nécessaire de la preuve, on aurait pu utiliser les propriétés des nombres complexes afin d'éviter le recours aux formules de trigonométrie. En effet, désignons par  $\omega$  la racine  $n$ -ème primitive de l'unité  $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . On a

$$\begin{aligned} z_1 \overline{z_2} &= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2). \end{aligned}$$

2. La FIGURE 2.2 permet de mieux visualiser les différents arguments utilisés dans la preuve.

On en tire que

$$\Re(z_1 \bar{z}_2) = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{et} \quad \Im(z_1 \bar{z}_2) = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Soient  $u_k$  et  $v_k$  les vecteurs introduits dans la preuve de la proposition précédente. Pour calculer la norme du vecteur  $u_k$ , il suffit de calculer la racine carrée de  $(\omega^{k+1} - \omega^k)(\overline{\omega^{k+1} - \omega^k})$ . On a

$$\begin{aligned} \Re\left((\omega^{k+1} - \omega^k)(\overline{\omega^{k+1} - \omega^k})\right) &= \Re(2 - \omega - \bar{\omega}) \\ &= 2 - 2\Re(\omega) \\ &= 2\left(1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Calculons à présent le produit scalaire de  $u_k$  par  $v_k$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . On a

$$\begin{aligned} \Re\left((\omega^{k+2} - \omega^{k+1})(\overline{\omega^k - \omega^{k+1}})\right) &= \Re(\omega^2 - 2\omega + 1) \\ &= \Re((\omega_1 - 1)^2) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) - 1\right)\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} -\Im\left((\omega^{k+2} - \omega^{k+1})(\overline{\omega^k - \omega^{k+1}})\right) &= -\Im(\omega^2 - 2\omega + 1) \\ &= 2\left(1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right)\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

On obtient bien que

$$\cos(\alpha) = -\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right).$$

- (2) Une analyse attentive des raisonnements menés dans la preuve de la proposition précédente établit que la notion de ligne brisée telle que définie dans la définition 2.1.2 est insatisfaisante. En effet, nous avons implicitement supposé que trois sommets consécutifs sont non alignés et nous avons abusivement utilisé le fait que la rotation utilisée est d'ordre  $n$ . Une considération attentive des diagrammes 2.3 présentés ci-dessous montre d'une part un exemple d'octogone régulier au sens de la définition 2.2.1 n'ayant que quatre sommets distincts et un carré n'exhibant que 2 sommets.

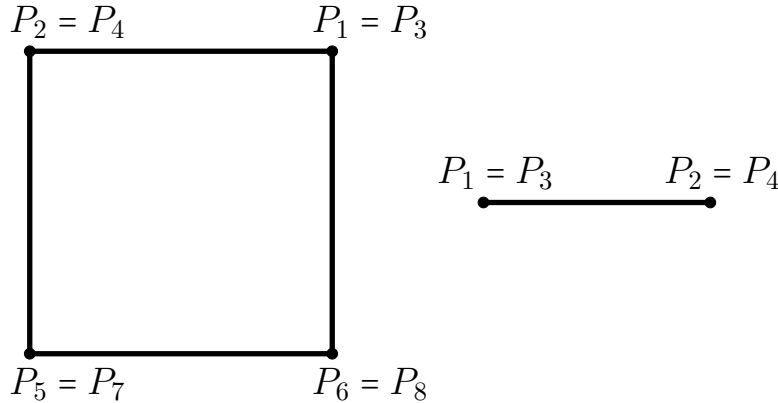


FIGURE 2.3

Par la définition 2.2.1, nous savons que n'importe quel polygone régulier est inscrit dans un cercle de rayon  $R$ .

**Proposition 2.2.2.** Soit  $P$  un polygone régulier à  $n$  côtés associé à la racine primitive  $\omega_l = e^{\frac{i2l\pi}{n}}$ . Si le rayon du cercle circonscrit à  $P$  vaut  $R$  et si l'on désigne par  $L_l$  la longueur de chacun des côtés de  $P$ , alors

$$L_l = 2R \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right).$$

*Démonstration.* Dans la démonstration de la proposition 2.2.1, nous avons vu que la longueur  $L_l$  de n'importe quel côté d'un polygone régulier était donnée par

$$L_l = \sqrt{2} R \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)}.$$

Par Carnot, nous obtenons que

$$L_l = \sqrt{2} R \sqrt{2 \sin^2\left(\frac{l\pi}{n}\right)}.$$

Ainsi,

$$L_l = 2R \sin\left(\frac{l\pi}{n}\right).$$

□

Dans [9], Harold Scott MacDonald Coxeter (1907 – 2003) propose de définir un polygone régulier de la manière suivante : un polygone est régulier s'il admet un cercle circonscrit et un cercle inscrit qui sont concentriques. Avant de montrer que notre définition est bien équivalente à celle de Coxeter, il convient de préciser ce que nous entendons par cercle circonscrit ou inscrit à un polygone.

**Définition 2.2.2.**

- Un polygone dont tous les sommets se trouvent sur un même cercle (on dit que les sommets sont cocycliques) est dit *inscritible*. On parle de *cercle circonscrit au polygone*.
- Un cercle qui est tangent à chaque côté d'un polygone est dit *inscrit au polygone*. On dit parfois que le polygone est *circonscrit au cercle*.

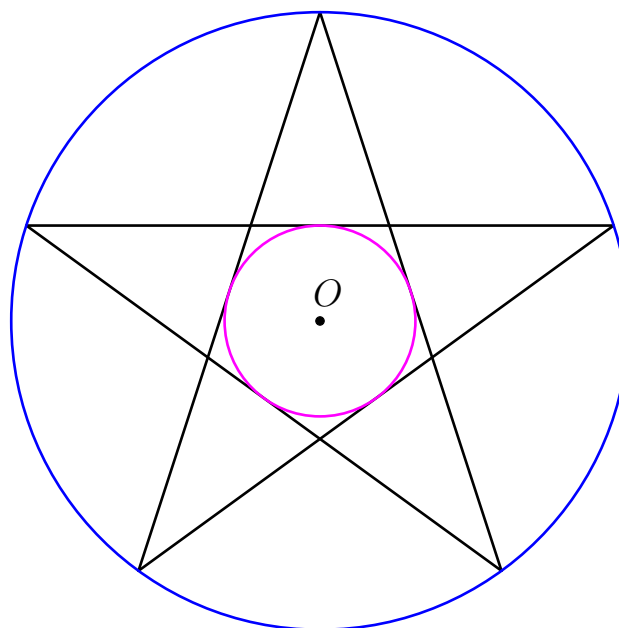


FIGURE 2.4 – Un pentagramme régulier avec ses cercles inscrit (mauve) et circonscrit (bleu).

Le résultat suivant permet de démontrer que la régularité au sens de la définition 2.2.1 et au sens de Coxeter sont équivalentes.

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $P = P_1 \dots P_n$  ( $n \geq 2$ ) un polygone. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $P$  est régulier ;
- (2)  $P$  admet un cercle circonscrit et un cercle inscrit qui sont concentriques.

*Démonstration.*

- Montrons que <sup>3</sup> (1)  $\Rightarrow$  (2).

Soit  $P = P_1 \dots P_n$  un polygone régulier. Les  $n$  racines de l'unité se trouvant sur un cercle, il est clair que ce polygone admet un cercle circonscrit. Notons  $O$  son centre et montrons que le point  $O$  est également le centre d'un cercle qui est inscrit au polygone. Pour ce faire, considérons le triangle  $P_1OP_2$ . Puisque  $[O, P_1]$  et  $[O, P_2]$  sont des rayons du cercle circonscrit au polygone, il est clair que le triangle  $P_1OP_2$  est isocèle et donc

$$|\widehat{P_2P_1O}| = |\widehat{OP_2P_1}|.$$

Remarquons à présent que les triangles  $P_1OP_2$  et  $P_3OP_2$  sont isométriques car leurs côtés homologues ont la même longueur. On en tire que

$$|\widehat{OP_2P_1}| = |\widehat{P_3P_2O}|.$$

Ainsi,  $OP_2$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{P_3P_2P_1}$ . On procède de même pour les autres angles du polygone. Finalement, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , les droites  $OP_i$  sont bissectrices de l'angle  $\widehat{P_{i+1}P_iP_{i-1}}$  et s'intersectent en le point  $O$ . On conclut alors que le point  $O$  est équidistant de chacun des côtés du polygone et est donc le centre du cercle inscrit au polygone.

- Montrons que (2)  $\Rightarrow$  (1).

Puisque les cercles inscrits et circonscrits sont concentriques, notons  $O$  leur centre commun. Considérons le quadrilatère  $OP_1P_2P_3$ . Par hypothèse,  $P_1$  et  $P_2$  se trouvent sur le cercle circonscrit au polygone. Donc,

$$\|\overrightarrow{OP_1}\| = \|\overrightarrow{OP_2}\|.$$

On en tire que le triangle  $OP_1P_2$  est isocèle et donc

$$|\widehat{P_2P_1O}| = |\widehat{OP_2P_1}|.$$

Or,  $OP_1$  et  $OP_2$  sont respectivement les bissectrices des angles  $\widehat{P_2P_1P_n}$  et  $\widehat{P_3P_2P_1}$ . On en tire que ces deux angles ont la même amplitude. Ainsi, de proche en proche on obtient que tous les angles du polygone ont la même amplitude. Il nous reste à montrer que tous les côtés du polygone ont la même longueur. Soient  $M_1$  et  $M_2$  les milieux respectifs de  $[P_1, P_2]$  et  $[P_2, P_3]$ . Il est clair que les triangles  $OM_1P_2$  et  $OM_2P_2$  rectangles respectivement en  $M_1$  et en  $M_2$  sont isométriques. On en tire que

$$\|\overrightarrow{P_1M_1}\| = \|\overrightarrow{M_1P_2}\| = \|\overrightarrow{P_2M_2}\| = \|\overrightarrow{M_2P_3}\|.$$

Ainsi, le polygone a tous ses angles de même amplitude et tous ses côtés de même longueur, d'où la conclusion par la proposition 2.2.1. □

---

3. La FIGURE 2.5 permet de mieux visualiser les arguments utilisés dans la preuve.



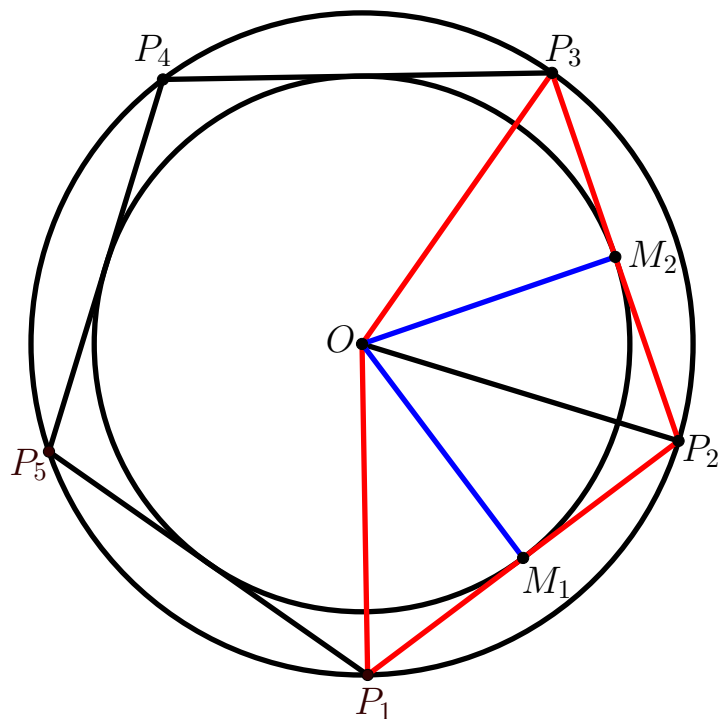
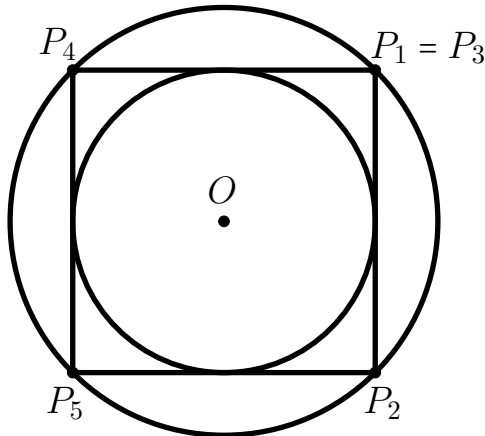


FIGURE 2.5 – Un pentagone régulier et ses cercles inscrit et circonscrit.

**Remarque 2.2.2.** Nous poursuivons les propos du point (2) de la remarque 2.2.1 précédente en considérant le diagramme suivant.



La surprise est de taille étant donné que ce simple exemple démontre que le résultat formulé à la proposition 2.2.3 est simplement faux. La faiblesse de la preuve vient du fait que nous avons supposé implicitement que les sommets sont distincts. Cette faille relève d'obstacles didactiques bien connus. D'un point de vue mathématique, on est amené à affûter la définition d'un polygone (ligne brisée) en imposant que les points qui la définissent soient deux à deux distincts.

Il est également important de se rendre compte que les différentes notions de régularité correspondant aux différentes définitions proposées ne sont pas équivalentes contrairement à la croyance commune. Elles le seront seulement après avoir rectifié les définitions et dissipé le flou artistique qui règne souvent à propos de ce sujet apparemment élémentaire.

Notons aussi en passant que la définition de régularité à la Coxeter exclut automatiquement le polygone de la FIGURE 2.1 de la liste des polygones réguliers. Cela confirme qu'il est judicieux de considérer des angles orientés dans la définition des polygones.

Après ces méta-réflexions concernant notre sujet, nous sommes amenés à définir un polygone de la manière suivante.

**Définition 2.2.3** (Polygone). *Soit  $n$  un naturel strictement supérieur à 2. Un polygone  $P_1 \dots P_n$  est la donnée d'un  $n$ -uplet  $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{A}^n$  satisfaisant  $P_i \neq P_j$  si  $i \neq j$ . Les  $n$  sommets de ce polygone sont les points  $P_1, \dots, P_n$  et les  $n$  côtés de ce polygone sont donnés par les segments  $[P_i, P_{i+1}]$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  où l'on pose  $P_{n+1} = P_1$ . Ses  $n$  angles sont donnés par les angles orientés des vecteurs  $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  où l'on pose  $P_0 = P_n$  et  $P_{n+1} = P_1$ .*

La définition 2.2.1 de la régularité est maintenue et on constate alors que la preuve de la proposition 2.2.3 devient alors satisfaisante. Pour s'en convaincre à peu de frais, on peut fixer un repère orthonormé centré en le centre  $O$ . Ce repère permet d'identifier le plan affine considéré avec le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Pour chaque  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on peut écrire

$$P_j : e^{i\alpha_j}.$$

Si on note  $M_j$  le milieu du segment  $[P_j, P_{j+1}]$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} r &= \left| \frac{e^{i\alpha_{j+1}} + e^{i\alpha_j}}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos(\alpha_{j+1} - \alpha_j)). \end{aligned}$$

où  $r$  désigne le rayon du cercle inscrit et ne dépend donc pas de  $j$ . La différence  $\alpha_{j+1} - \alpha_j$  est donc constante (vu que les points  $P_1, \dots, P_n$  sont deux à deux distincts) et on conclut que

$$e^{i\alpha_j} = \omega^{j-1} e^{i\alpha_1}$$

pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  comme voulu.

Pour conclure cette section, nous allons présenter la définition choisie par Marcel Berger dans [3]. Nous montrerons également que cette définition est équivalente à la nôtre. Avant d'arriver à cette nouvelle caractérisation des polygones réguliers, nous avons besoin de quelques rudiments de la théorie des espaces métriques et de théorie des groupes. Quelques précisions sont fournies dans l'annexe E.

**Définition 2.2.4.** *Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques, on désigne par  $\text{Is}(X, Y)$  l'ensemble des isométries de  $X$  dans  $Y$  c'est-à-dire l'ensemble des applications*

$$f : X \rightarrow Y$$

telles que

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

En particulier, nous noterons  $\text{Is}(X)$  pour  $\text{Is}(X, X)$ .

**Définition 2.2.5.** *Soit  $X$  un espace métrique et soit  $A \subset X$  un sous-ensemble de  $X$ . On définit le groupe d'isotropie ou stabilisateur de  $A$  comme étant*

$$\text{Is}_A(X) = G(A) = \{f \in \text{Is}(X) \mid f(A) = A\}.$$

**Définition 2.2.6.** *Une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est dite transitive si pour tous  $x, y$  dans  $X$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g(x) = y$ .*

Voici la proposition 2.2.4 qui indique la voie à suivre pour définir de manière moderne la notion de régularité d'un polygone et ainsi éviter les embûches habituellement rencontrés à ce sujet.

**Proposition 2.2.4.** *Un polygone  $P = P_1 \dots P_n$  de  $\mathcal{A}$  est régulier si et seulement si le groupe d'isotropie de  $P$ ,  $G(P) < \text{Is}(\mathcal{A})$ , agit transitivement sur les couples  $(S, F)$  où  $S$  est un sommet du polygone  $P$  et  $F$  est un côté de  $P$  qui contient le sommet  $S$ .*

*Démonstration.*

- La condition est nécessaire.

En effet, nous savons par la définition 2.2.1 que les sommets d'un polygone régulier  $P$  à  $n$  côtés sont, dans un repère bien choisi, les  $n$  racines de l'unité. Or, nous savons que  $P$  est invariant sous l'action du groupe de rotations  $U_n$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité qui agit transitivement sur les sommets. Par conséquent, nous devons juste considérer le cas de deux couples

$$(S, F) \text{ et } (S, F')$$

partageant un sommet. Si  $F = F'$ , il n'y a rien à faire. Sinon, on vérifie que deux côtés distincts issus d'un même sommet sont images au travers d'une symétrie orthogonale d'axe  $OS$  où  $O$  est le centre du cercle circonscrit au polygone. C'est évident (et suffit en toute généralité) si  $S : (1, 0)$  parce que l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité est stable par conjugaison.

- La condition est suffisante.

En effet, considérons

$$c = [P_j, P_{j+1}] \text{ et } c' = [P_k, P_{k+1}]$$

avec  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . On peut supposer  $j \neq k$ . Vu que  $G(P)$  agit transitivement notamment sur les côtés, on déduit directement que

$$|\overline{P_j P_{j+1}}| = |\overline{P_k P_{k+1}}|$$

parce que les éléments de  $G(P)$  sont des isométries. Nous avons bien démontré que les côtés du polygone étudié sont tous de même longueur. Il reste à montrer que les angles sont tous égaux deux à deux. Pour ce faire, il faut démontrer qu'étant donnés trois points consécutifs  $P_j, P_{j+1}, P_{j+2}$  et trois points consécutifs  $P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$ , il est possible de trouver un élément  $\phi \in \text{Is}(\mathcal{A})$  tels que

$$\phi(P_j) = P_k, \phi(P_{j+1}) = P_{k+1} \text{ et } \phi(P_{j+2}) = P_{k+2}.$$

Nous savons déjà qu'il existe une isométrie  $\phi \in \text{Is}(\mathcal{A})$  telle que

$$\phi(P_{i+1}) = P_{k+1} \text{ et } \phi(P_i) = P_k$$

vu l'hypothèse de transitivité de l'action de  $G(P)$  et que chacune des isométries est affine. Il reste à s'assurer que

$$\phi(P_{j+2}) = P_{k+2}.$$

Cela est direct parce que  $\phi$  envoie le segment  $[P_{j+1}P_{j+2}]$  sur un segment issu de  $P_{k+1}$ . L'injectivité de  $\phi$  garantit que cela ne peut pas être  $[P_k, P_{k+1}]$ . Il s'agit donc de  $[P_{k+1}P_{k+2}]$  parce que notre définition 2.2.3 de polygone impose qu'il n'y ait que deux côtés issus d'un même sommet.

□

À nouveau, par la proposition 2.2.4 le polygone en forme de croix représenté à la FIGURE 2.1 n'est pas régulier puisque l'action du groupe d'isométrie de la croix sur la croix n'est pas transitive sur les couples  $(S, F)$ . Par contre, le pentagramme représenté à la FIGURE 2.6 est un polygone régulier au sens de la définition 2.2.1.

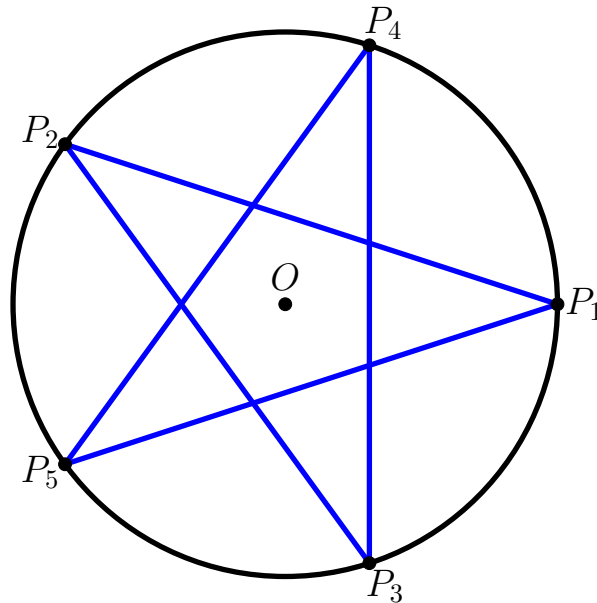


FIGURE 2.6 – Un pentagramme régulier.

Ces réflexions exploratoires concernant les notions dites élémentaires de polygone et de régularité fréquemment rencontrées dans la littérature débouchent naturellement sur la notion de convexité. En effet, du point de vue de la théorie des groupes, le pentagramme régulier et le pentagone régulier sont indiscernables. En gardant à l'esprit l'objectif de mieux comprendre et de mieux étudier les polyèdres de Platon, nous serons amenés à imposer des hypothèses de convexité sur les objets étudiés. Cette nécessité est dictée d'une part par les résultats de classification abordés dans le premier chapitre mais aussi par nos observations préliminaires en dimension 2 et en dimension 3. Il est donc nécessaire d'étudier plus en profondeur la notion de convexité. Si on s'était autorisé la considération de polygones/polyèdres réguliers non convexes, nous aurions été amenés à étudier entre autres les quatre polyèdres réguliers non convexes découverts par Kepler et redécouvert par Poincaré [22].

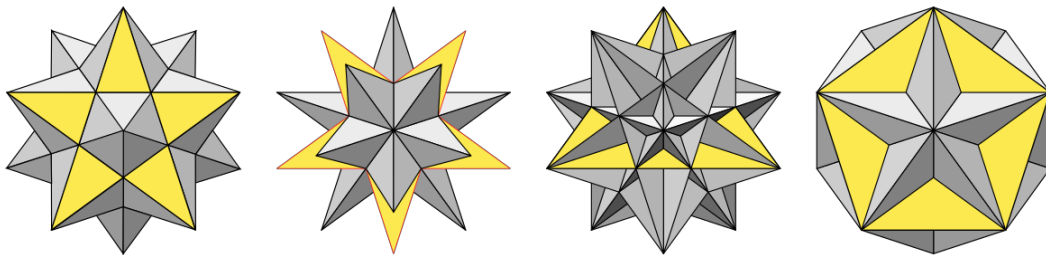


FIGURE 2.7 – Les quatre polyèdres de Kepler-Poinsot : dans l'ordre, le petit dodécaèdre étoilé, le grand dodécaèdre étoilé, le grand icosaèdre, le grand dodécaèdre.

Dans le présent mémoire, nous nous concentrons sur les polyèdres convexes qui seront étudiés en profondeur dans les chapitres suivants. Le lecteur intéressé par le cas non convexe peut consulter les références [10], [11] ou encore [22] pour en apprendre davantage.

# Chapitre 3

## Notions générales sur la convexité

La convexité joue un rôle central dans l'étude des polyèdres. Nous allons donc étudier cette notion plus en détail. Ce chapitre comporte onze sections. Dans la première, nous présentons la définition d'un ensemble convexe, quelques exemples et quelques résultats de base pour se familiariser avec la notion. Dans la deuxième section, on s'intéresse à l'enveloppe convexe d'une partie  $A$  d'un espace affine  $\mathcal{A}$ <sup>1</sup>. Nous consacrerons également une section à la topologie des convexes, à l'intérieur relatif d'un convexe. Dans la cinquième section, nous nous intéresserons au théorème de Hahn-Banach ainsi qu'à quelques corollaires de ce théorème. Les deux sections qui suivent s'intéressent respectivement au polaire d'un convexe et aux hyperplans d'appui. Les dernières sections sont consacrées aux points extrémaux et à la structure faciale d'un convexe. Ces différentes notions présentées tout au long de ces sections nous permettent de définir les polytopes convexes ainsi que les angles dièdres de ceux-ci. Tout au long de ce chapitre, nous avons consulté plusieurs références : [3], [5], [16] et [27] dont la plupart des développements sont directement repris.

### 3.1 Définitions et premiers résultats

Dans cette section, il s'agit de présenter les définitions ainsi que les résultats de base concernant les ensembles convexes.

**Définition 3.1.1.** *Une partie  $C$  d'un espace affine réel  $\mathcal{A}$  de dimension finie  $n$  est dite convexe si  $C$  contient le segment déterminé par deux de ses points.*

Nous allons présenter quelques exemples d'ensembles convexes.

#### Exemples 3.1.1.

- *Le vide et  $\mathcal{A}$  tout entier ;*
- *Tout sous-espace affine de  $\mathcal{A}$  : les points, les droites, les hyperplans ;*
- *Les convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles ;*
- *Dans un espace affine euclidien, toutes les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes. Mieux encore, quelle que soit la partie  $A$  de la sphère  $S(x, r)$ , la différence  $B(x, r) \setminus A$  est toujours convexe.*

---

1. Les espaces affines sont en effet le cadre naturel pour étudier la convexité. Certains résultats du chapitre ne sont cependant valables que dans le cadre plus restreint des espaces vectoriels.

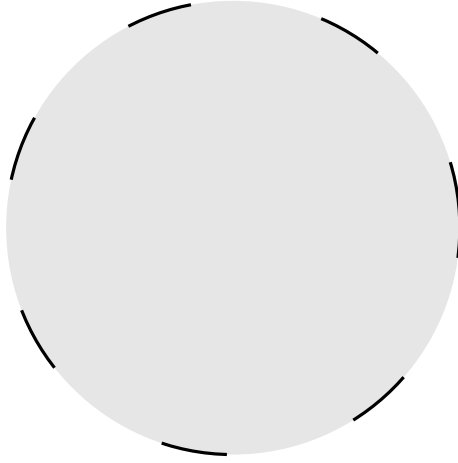


FIGURE 3.1

**Remarque 3.1.1.** Si l'on remplace la sphère de l'exemple précédent par un cube, alors l'ensemble obtenu n'est pas convexe comme en témoigne la figure 3.2.



FIGURE 3.2

On peut également définir les convexes via les parties étoilées d'un espace affine réel  $\mathcal{A}$  de dimension finie  $n$ .

**Définition 3.1.2.** Une partie  $E$  de  $\mathcal{A}$  est dite étoilée en  $X \in E$  si

$$[X, Y] \subset E$$

pour tout  $Y$  dans  $E$ .

Un convexe est donc une partie étoilée en chacun de ses points. La proposition suivante étudie l'image d'un convexe par une application affine.

**Proposition 3.1.1.** Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  deux espaces affines réels de dimension  $n$ ,  $C \subset \mathcal{A}$  un convexe et soit  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  une application affine. Alors,  $f(C) \subset \mathcal{A}'$  est convexe.

*Démonstration.* Soient  $A', B' \in f(C)$  et soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Nous devons montrer que

$$\lambda A' + (1 - \lambda)B' \in f(C).$$

Comme  $A', B' \in f(C)$ , on sait qu'il existe  $A, B \in C$  tels que  $f(A) = A'$  et  $f(B) = B'$ . Étant donné que  $C$  est convexe par hypothèse, on a

$$\lambda A + (1 - \lambda)B \in C.$$

On en tire que

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \in f(C).$$

Or,  $f$  est une application affine par hypothèse, on obtient alors

$$\lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B) \in f(C).$$

Ainsi,

$$\lambda A' + (1 - \lambda)B' \in f(C).$$

□

Nous allons nous intéresser aux demi-espaces que détermine un hyperplan. Commençons par rappeler la définition d'un hyperplan  $H$ .

**Définition 3.1.3.** *Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $m$ . Un hyperplan  $H$  est une variété affine de  $\mathcal{A}$  telle que  $\dim(H) = m - 1$ .*

Soit  $O \in \mathcal{A}$  et  $n$  une normale à l'hyperplan  $H$ , on a

$$H = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle = \alpha\}.$$

Cet hyperplan détermine deux demi-espaces ouverts donnés par

$$\mathcal{D}^- = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle < \alpha\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^+ = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle > \alpha\}.$$

Il détermine également deux demi-espaces fermés donnés par

$$\overline{\mathcal{D}^-} = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{D}^+} = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle \geq \alpha\}.$$

**Proposition 3.1.2.** *Si  $H \subset \mathcal{A}$  est un hyperplan, alors les demi-espaces (ouverts ou fermés) qu'il détermine sont convexes.*

*Démonstration.* Traitons le cas du demi-espace ouvert  $\mathcal{D}^+$ . Les autres cas se traitent de la même manière. Soient  $A, B \in \mathcal{D}^+$  et soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Nous devons montrer que

$$\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{D}^+.$$

Par linéarité du produit scalaire, nous avons

$$\langle \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}, n \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{OA}, n \rangle + (1 - \lambda)\langle \overrightarrow{OB}, n \rangle.$$

Comme  $A, B \in \mathcal{D}^+$ , nous savons que

$$\langle \overrightarrow{OA}, n \rangle > \alpha \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{OB}, n \rangle > \alpha.$$

Puisque  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  sont positifs par construction, on a finalement

$$\begin{aligned} \langle \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}, n \rangle &> \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha \\ &> \alpha. \end{aligned}$$

□

La proposition suivante nous servira par la suite, lorsque nous donnerons une définition des polyèdres convexes.

**Proposition 3.1.3.** *Toute intersection (finie ou non) de convexes est un convexe.*

*Démonstration.* Soient  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de convexes. Nous devons montrer que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} C_i$$

est un convexe. Soient  $A, B \in \mathcal{C}$  et soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Vérifions que

$$\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{C}.$$

Puisque  $A, B \in \mathcal{C}$ , pour tout  $i \in I$ , on a  $A, B \in C_i$ . Or, par hypothèse,  $C_i$  est convexe quel que soit  $i \in I$ . On en tire que

$$\lambda A + (1 - \lambda)B \in C_i \quad \forall i \in I,$$

d'où la conclusion. □

**Proposition 3.1.4. (Addition de convexes, Minkowski)**

*Soient  $C_1, C_2$  deux convexes d'un espace vectoriel  $X$ , alors*

$$\lambda C_1 + \mu C_2 = \{\lambda s + \mu t : s \in C_1, t \in C_2\}$$

*est convexe, quels que soit les deux réels  $\lambda, \mu$ .*

*Démonstration.* C'est immédiat en appliquant la proposition 3.1.1, en considérant l'application

$$\begin{aligned} f : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto \lambda x + \mu y. \end{aligned}$$

□

**Remarque 3.1.2.** *Si  $X$  est un espace affine, l'addition ci-dessus n'a de sens que si  $\lambda + \mu = 1$ .*

## 3.2 Enveloppe convexe

Débutons cette section par la définition de l'enveloppe convexe d'une partie d'un espace affine. Nous verrons dans la suite qu'il y a identité entre les enveloppes convexes des parties finies de  $\mathcal{A}$  et les polyèdres (compacts) de  $\mathcal{A}$ . La notion d'enveloppe se définit de manière habituelle à partir de la proposition 3.1.3.

**Définition 3.2.1.** *Pour toute partie  $A$  d'un espace affine  $\mathcal{A}$ , il existe un plus petit convexe contenant  $A$ . Par définition, ce plus petit convexe s'appelle l'enveloppe convexe de  $A$  et se note  $\mathcal{E}(A)$ .*

Comme nous l'avons vu dans la définition B.0.3 présente dans l'annexe, on peut définir l'enveloppe convexe de  $A$  comme étant l'ensemble des combinaisons convexes des points de  $A$ . Cette définition est bien équivalente à celle que nous venons de présenter comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1.** *Pour toute partie  $A$  d'un espace affine  $\mathcal{A}$ , on a*

$$\mathcal{E}(A) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i : I \text{ fini}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \right\}.$$



*Démonstration.* Soient  $i \in I$ ,  $a_i \in A$  et  $\lambda_i \geq 0$  tels que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

Alors, pour tout convexe  $C$  tel que  $A \subset C$ , on a  $a_i \in C$  pour tout  $i \in I$  et donc,

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i \in C.$$

Donc,

$$D = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i a_i : I \text{ fini}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \right\} \subset \mathcal{E}(A).$$

Il est clair que  $D \supset A$  car  $D$  est convexe. En effet, une combinaison convexe d'une combinaison convexe d'éléments de  $A$  est combinaison convexe d'éléments de  $A$ . D'où la conclusion puisque par la définition 3.2.1,  $\mathcal{E}(A)$  est le plus petit convexe contenant  $A$ . □

**Définition 3.2.2.** *L'enveloppe convexe de  $n + 1$  points affinement indépendants est appelée simplexe de dimension  $n$ . On parle de  $n$ -simplexe.*

### 3.3 Topologie des convexes

Dans cette section, nous nous intéressons à l'adhérence, à l'intérieur ainsi qu'à la dimension d'un convexe pour la topologie euclidienne définie sur  $\mathcal{A}$  à l'aide d'un produit scalaire quelconque.

**Proposition 3.3.1.** *Si  $C$  est convexe, alors son adhérence  $\overline{C}$  est également convexe.*

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \overline{C}$  et soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Nous devons montrer que

$$\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \overline{C}.$$

Soient  $(X_n)_n$  et  $(Y_n)_n$  deux suites de  $C$  qui convergent respectivement vers  $X$  et  $Y$ . Par hypothèse  $S$  est convexe, donc

$$\lambda X_n + (1 - \lambda)Y_n \in C.$$

Comme  $\overline{C}$  est fermé, la limite de cette suite appartient à  $\overline{C}$  mais la limite de cette suite vaut

$$\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \overline{C}.$$

Cela achève la démonstration. □

**Définition 3.3.1.** *On appelle enveloppe fermée convexe d'une partie  $A$  l'intersection de tous les fermés convexes qui contiennent  $A$ . Cette enveloppe fermée convexe n'est autre que  $\mathcal{E}(A)$ .*

La démonstration du prochain résultat (le lemme 3.3.1) fait intervenir la notion d'homothétie. Rappelons la définition.

**Définition 3.3.2.** *Une homothétie est une transformation d'un espace affine déterminée par un point  $Z$  appelé le centre et par un réel non nul  $r$  appelé le rapport. L'image d'un point  $P$  par l'homothétie de centre  $Z$  et de rapport  $r$  est le point  $Q$  défini par*

$$Q = h_{Z,r}(P) = Z + r\overrightarrow{ZP}.$$

*On dit que  $Q$  est l'homothétique de  $P$ .*

**Lemme 3.3.1.** Soient  $C$  un convexe,  $X \in C^\circ$  et  $Y \in \overline{C}$ . Alors  $]X, Y[ \subset C^\circ$ .

*Démonstration.* Soit  $Z \in ]X, Y[$  et soit  $U$  est un ouvert de  $C$  contenant  $X$ . Choisissons  $Y'$  dans le segment  $]Y, Z[ \cap C$ , alors l'homothétie de  $U$  sous l'homothétie de centre  $Y'$  et qui envoie  $X$  sur  $Z$  appartient à  $C$ . D'où la conclusion.  $\square$

Nous obtenons alors immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.3.1.** Si  $C$  est convexe, alors l'intérieur  $C^\circ$  de  $C$  est également convexe.

À présent, définissons la notion de dimension d'un convexe non vide.

**Définition 3.3.3.** On appelle dimension d'un convexe  $C$  non vide, notée  $\dim C$ , la dimension du sous-espace affine  $\rangle C \langle_a$  engendré par  $C$ . On a  $\dim C = \dim \rangle C \langle_a$ .

**Proposition 3.3.2.** Soit  $C$  un convexe non vide d'un espace affine  $\mathcal{A}$ . Alors,

$$\dim C = \dim \mathcal{A} \Leftrightarrow C^\circ \neq \emptyset.$$

*Démonstration.*

- La condition est nécessaire.  
Soient  $X_1, \dots, X_{n+1}$  des points affinement indépendants de  $C$ , alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_{n+1}}{n+1} \in C^\circ.$$

- Il est clair que la condition est suffisante.  $\square$

**Proposition 3.3.3.** Si  $C$  est un convexe compact, alors  $C = \mathcal{E}(C^\bullet)$ .

*Démonstration.* Soient  $X \in C$  et  $\mathcal{D}$  une droite quelconque passant par  $X$ . Alors  $\mathcal{D} \cap C$  est un segment  $[U, V]$  contenant  $X$ . Comme  $U, V \in C^\bullet$ , on a  $X \in \mathcal{E}(C^\bullet)$ .  $\square$

## 3.4 L'intérieur relatif d'un convexe

Commençons par définir ce que l'on entend par intérieur relatif et frontière relative d'un convexe.

**Définition 3.4.1.** On définit l'intérieur relatif d'un convexe  $C$  comme étant l'intérieur de  $C$  dans le sous-espace affine qu'il engendre pour la topologie induite. On le note  $\text{ri}(C)$ . On a

$$\text{ri}(C) = \{X \in C \mid \exists B(X, r) : X \in B(X, r) \cap \rangle C \langle_a \subset C\}$$

où  $\rangle C \langle_a$  désigne l'enveloppe affine de  $C$ .

On définit de la même manière la frontière relative d'un convexe  $C$ .

**Définition 3.4.2.** La frontière relative d'un convexe  $C$  est la frontière de  $C$  dans le sous-espace affine qu'il engendre. On la note  $\text{rf}(C)$ . On a

$$\text{rf}(C) = \overline{C} \setminus \text{ri}(C).$$

Le lemme suivant nous apprend que l'intérieur relatif d'un  $n$ -simplexe est non vide.

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $S$  un simplexe d'un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$ . Alors,  $\text{ri}(S) \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Quand la dimension de  $S$  vaut  $k$ , nous savons, par la définition 3.2.2, qu'il existe  $X_1, \dots, X_{k+1}$  affinement indépendants et tels que

$$S = \mathcal{E}(X_1, \dots, X_{k+1}).$$

Ensuite,  $(X_1, \dots, X_{k+1})$  est une base de  $\rangle S\langle_a$ . Donc,  $\rangle S\langle_a$  est l'ensemble des points  $X$  de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i X_i$$

où pour tout  $X \in \rangle S\langle_a$ , les coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$  sont uniques et où leur somme vaut 1. Nous pouvons donc définir l'application affine continue

$$\varphi : \rangle S\langle_a \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$

en posant

$$\varphi \left( \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i X_i \right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}).$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, k+1\}$ , posons

$$K_i = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : \lambda_i > 0\}.$$

Alors,  $K_1, \dots, K_{k+1}$  sont des demi-espaces ouverts de  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Par continuité de  $\varphi$ , nous savons que pour tout  $i \in \{1, \dots, k+1\}$ ,

$$\varphi^{-1}(K_i)$$

est ouvert dans  $\rangle S\langle_a$ . Donc, l'ensemble

$$E = \bigcap_{i=1}^{k+1} \varphi^{-1}(K_i)$$

est également ouvert dans  $\rangle S\langle_a$ . Remarquons que

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i X_i, \lambda_i > 0 \right\},$$

cela implique  $E$  est non vide. Puisque les combinaisons affines

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_{k+1} X_{k+1}$$

où les  $\lambda_i$  sont tous strictement positifs et où leur somme vaut 1 sont des combinaisons convexes, il s'ensuit que  $E$  est un sous-ensemble de  $S$ . D'où la conclusion car  $S$  contient un ensemble non vide qui est ouvert dans  $\rangle S\langle_a$ , d'où

$$\text{ri}(S) \neq \emptyset.$$

□

Nous avons vu que l'intérieur relatif d'un  $n$ -simplexe est non vide. Il en est de même pour un convexe comme en témoigne la proposition suivante.

**Proposition 3.4.1.** *Soit  $C$  un ensemble convexe non vide d'un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$ . Alors,  $\text{ri}(C) \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Soit

$$k = \dim(C) = \dim(\rangle C \langle_a).$$

Alors, il existe  $k + 1$  points de  $C$  affinement indépendants. Soit

$$S = \mathcal{E}(X_1, \dots, X_{k+1}).$$

Donc,  $S$  est un simplexe inclus dans  $C$ . Par le lemme 3.4.1, l'intérieur relatif de  $S$  est non vide dans  $\rangle S \langle_a$ . Puisque

$$\rangle S \langle_a \subset \rangle C \langle_a \text{ et } \dim(\rangle S \langle_a) = k = \dim(\rangle C \langle_a),$$

on a

$$\rangle S \langle_a = \rangle C \langle_a.$$

Ainsi, l'intérieur relatif de  $S$  est non vide dans  $\rangle C \langle_a$ . Comme  $S$  est un sous-ensemble de  $C$ , il s'ensuit que l'intérieur relatif de  $C$  est non vide dans  $\rangle C \langle_a$ . □

**Proposition 3.4.2.** *Soit  $C$  un convexe d'un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$ . Alors, pour tout  $X_0 \in \text{ri}(C)$  et pour tout  $X_1 \in \overline{C}$  avec  $X_0 \neq X_1$ , on a  $[X_0, X_1[ \subset \text{ri}(C)$ .*

*Démonstration.* Soient  $X_0 \in \text{ri}(C)$  et  $X_1 \in \overline{C}$  avec  $X_0 \neq X_1$ . Pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ , soit

$$X_\lambda = (1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1.$$

Nous allons montrer que  $X_\lambda \in \text{ri}(C)$ . Puisque  $X_0 \in \text{ri}(C)$ , il existe un ouvert (relatif)  $U$  de  $\rangle C \langle_a$  tel que

$$X_0 \in U \subset C.$$

Posons

$$V = \lambda^{-1}(X_\lambda - (1 - \lambda)U).$$

Étant donné que

$$\lambda^{-1} - \lambda^{-1}(1 - \lambda) = 1,$$

on en tire que  $V$  est un ouvert (relatif) de  $\rangle C \langle_a$ . Puisque

$$X_1 = \lambda^{-1}(X_\lambda - (1 - \lambda)X_0),$$

on a  $X_1 \in V$ . Par hypothèse,  $X_1 \in \overline{C}$ , donc on sait qu'il existe

$$Y_1 \in V \cap C.$$

À présent, posons

$$W = (1 - \lambda)U + \lambda Y_1.$$

Alors,  $W$  est un ouvert (relatif) de  $\rangle C \langle_a$  et comme

$$U \subset C \text{ et } Y_1 \in C,$$

il s'ensuit que  $W \subset C$  par convexité de  $C$ . Pour achever la démonstration, il nous reste à montrer que  $X_\lambda \in W$ . Vu la définition de  $V$ , il existe  $Y_0 \in U$  tel que

$$Y_1 = \lambda^{-1}(X_\lambda - (1 - \lambda)Y_0).$$

Alors,

$$X_\lambda = (1 - \lambda)Y_0 + \lambda Y_1 \in (1 - \lambda)U + \lambda Y_1 = W;$$

d'où la conclusion. □

**Proposition 3.4.3.** *Soit  $C$  un convexe d'un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$  et soit  $X \in C$ . Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (1)  $X \in \text{ri}(C)$ ;
- (2) Pour toute droite  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{A}$  avec  $X \in \mathcal{D}$ , il existe  $Y_0, Y_1 \in \mathcal{D} \cap C$  tels que  $X \in ]Y_0, Y_1[$ ;
- (3) Pour tout  $Y \in C$  avec  $Y \neq X$ , il existe  $Z \in C$  tel que  $X \in ]Y, Z[$ .

*Démonstration.* Les implications (1)  $\Rightarrow$  (2) et (2)  $\Rightarrow$  (3) sont évidentes. Il nous reste donc à montrer que (3)  $\Rightarrow$  (1). Par la proposition 3.4.1, on sait qu'il existe  $Y \in \text{ri}(C)$ . Si  $Y = X$ , il n'y a rien à prouver. Supposons donc que  $Y \neq X$ . Par le point (3), il existe  $Z \in C$  tel que  $X \in ]Y, Z[$ . Ainsi,  $X \in \text{ri}(C)$  par la proposition 3.4.2. □

## 3.5 Théorème de Hahn-Banach

Le théorème de Hahn-Banach est un outil central de l'analyse fonctionnelle. Il permet d'étendre les fonctions linéaires bornées définies sur un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel à l'espace entier. Cependant, dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à une autre version du théorème de Hahn-Banach connue sous le nom de théorème de séparation de Hahn-Banach ou théorème de séparation des hyperplans. Ce théorème a de nombreuses utilisations en géométrie convexe.

### **Théorème 3.5.1. (Théorème de séparation de Hahn-Banach)**

*Soient  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $n$ ,  $U$  un ouvert convexe non vide de  $\mathcal{A}$  et  $X$  un point de  $\mathcal{A}$  n'appartenant pas à  $U$ . Alors il existe un hyperplan  $H$  de  $\mathcal{A}$  qui contient  $X$  et qui ne rencontre pas  $U$ .*

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $n$ . Le résultat étant trivial pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , prouvons-le pour  $n = 2$ . Soit  $U$  un ouvert convexe non vide de  $\mathcal{A}$  et soit

$$X \in \mathcal{A} \setminus U.$$

Nous devons prouver qu'il existe une droite  $L$  de  $\mathcal{A}$  telle que

$$X \in L \text{ et } L \cap U = \emptyset.$$

Soit  $S$  un cercle de centre  $X$ . Pour tout point  $P$  de  $U$ , désignons par  $P'$  l'unique point de  $S$  obtenu par intersection de la demi-droite d'origine  $X$  et passant par le point  $P$ . Alors,

$$V = \{P' : P \in U\}$$

est un arc ouvert de  $S$ . Comme  $X \notin U$  et comme  $U$  est convexe, deux points opposés de  $S$  ne peuvent appartenir tous les deux à  $V$ . En effet, si les points  $V_1$  et  $V_2$  appartaient à  $V$ , alors il existerait  $P_1$  et  $P_2$  appartenant à l'ouvert convexe  $U$  de sorte que  $V_1$  et  $V_2$  soient les projections de  $P_1$  et  $P_2$  et donc  $X \in [P_1, P_2]$ ; d'où une contradiction. Par conséquent, l'angle entre deux demi-droites d'origine  $X$  passant par deux points distincts de  $V$  vaut au plus  $\pi$ . L'une des deux droites déterminées par ces demi-droites peut alors être utilisée comme  $L$ .

Supposons que le résultat est vrai pour  $n - 1$  et montrons sa véracité pour  $n > 2$ . Soit  $U$  un ouvert convexe non vide de  $\mathcal{A}$  et soit  $X \in \mathcal{A} \setminus U$ . Considérons un sous-espace affine  $A$  de dimension 2 de  $\mathcal{A}$  tel que

$$X \in A \text{ et } A \cap U \neq \emptyset.$$

Alors,  $A \cap U$  est un ouvert convexe non vide dans  $A$  tel que

$$X \notin A \cap U.$$

En utilisant le début de la preuve, on déduit qu'il existe une droite  $L$  dans  $A$  telle que

$$X \in L \text{ et } L \cap (A \cap U) = \emptyset.$$

Soit  $\tilde{H}$  un hyperplan de  $\mathcal{A}$  orthogonal à  $L$  et soit

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{H}$$

la projection orthogonale. Alors,  $\pi(U)$  est un ouvert convexe non vide dans  $\tilde{H}$ . De plus, comme

$$\pi^{-1}(\pi(X)) = L,$$

on a

$$\pi(X) \in \pi(U).$$

Alors, par hypothèse de récurrence, il existe un hyperplan  $H'$  dans  $\tilde{H}$  tel que

$$\pi(X) \in H' \text{ et } H' \cap \pi(U) = \emptyset.$$

Ainsi,

$$H = \pi^{-1}(H') \cup L = \pi^{-1}(H')$$

est un hyperplan de  $\mathcal{A}$  tel que

$$X \in H \text{ et } H \cap U = \emptyset.$$

Cela achève la démonstration. □

**Définition 3.5.1.** Soient  $\mathcal{A}$  un espace affine,  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathcal{A}$  et  $H$  un hyperplan. On dit que  $H$  sépare (respectivement sépare strictement)  $A$  et  $B$  si  $A$  appartient à un des demi-espaces fermés (respectivement ouverts) déterminés par  $H$  et que  $B$  appartient à l'autre.

**Corollaire 3.5.1.** Soient  $\mathcal{A}$  un espace affine,  $A$  et  $B$  deux convexes non vides de  $\mathcal{A}$  tels que  $A$  est ouvert et  $A \cap B = \emptyset$ . Alors, il existe un hyperplan séparant  $A$  et  $B$ .

*Démonstration.* Quitte à fixer un point  $O$  servant d'origine dans  $\mathcal{A}$ , et à associer à tout point  $X$  le vecteur  $\overrightarrow{OX}$ <sup>2</sup>, on peut supposer que l'on travaille dans un espace vectoriel. De plus,

$$C = A - B = \bigcup_{u \in B} (A - u)$$

est ouvert car la translation de vecteur  $-u$  est un homéomorphisme. Puisque  $A$  et  $B$  sont disjoints,  $A - B$  ne contient pas  $0$ . On peut donc appliquer le théorème 3.5.1 et obtenir un hyperplan  $\pi$  tel que

$$0 \in \pi \text{ et } (A - B) \cap \pi = \emptyset.$$

Considérons maintenant la projection  $p$  de  $\mathcal{A}$  sur la droite vectorielle  $d$  normale à  $\pi$ . C'est une application continue et ouverte car  $\mathcal{A}$  s'identifie à  $\pi \times d$  et  $p$  est une projection sur un des facteurs. De plus,  $p$  est linéaire. Il s'ensuit que  $p(A)$  et  $p(B)$  sont des intervalles de  $d$  et  $p(A)$  est ouvert. De plus,  $p(A)$  et  $p(B)$  sont disjoints. Sinon, il existerait  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que

$$0 = p(a) - p(b) = p(a - b)$$

---

2. Cette application est affine si on considère  $\mathcal{A}$  comme un espace affine, et c'est un homéomorphisme.

donc tels que

$$a - b \in \mathbb{R}$$

d'où une contradiction. Il existe alors  $c \in d$  qui sépare  $p(A)$  et  $p(B)$  et  $p^{-1}(c)$  sépare alors  $A$  et  $B$ .

□

Comme  $H$  est la frontière de chacun des demi-espaces qu'il détermine, on obtient immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.5.2.** *Soient, dans un espace affine, deux ouverts convexes non vides disjoints. Alors, il existe un hyperplan les séparant strictement.*

**Corollaire 3.5.3.** *Si  $A, B$  sont deux convexes, avec  $A$  fermé non vide,  $B$  compact et  $A \cap B = \emptyset$ , alors il existe un hyperplan les séparant strictement.*

*Démonstration.* Nous savons qu'il existe une boule ouverte  $B(x, \varepsilon)$  avec  $\varepsilon > 0$  telle que

$$(A + B(x, \varepsilon)) + (B + B(x, \varepsilon)) = \emptyset.$$

Comme  $A + B(x, \varepsilon)$  et  $B + B(x, \varepsilon)$  sont deux ouverts convexes disjoints non vides, on conclut par le corollaire 3.5.2.

□

## 3.6 Polaire d'un convexe, dualité

Dans cette section, nous allons approfondir la notion de dualité. Elle permet d'étudier certaines propriétés d'un ensemble convexe à partir d'un autre convexe. Parmi les dualités possibles, nous allons nous intéresser à une en particulier, appelée polarité. Nous allons donc commencer cette section par définir le polaire d'un ensemble convexe.

**Définition 3.6.1.** *Soit  $A$  une partie quelconque d'un espace affine euclidien  $\mathcal{A}$  et soit  $O \in \mathcal{A}$ . Le sous-ensemble polaire  $A^*$  de  $A$  par rapport à  $O$  est défini par*

$$A^* = \left\{ Y \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1, \forall X \in A \right\}.$$

Le polaire d'un singleton  $\{X\}$  est un demi-espace. Il est défini par un hyperplan, par abus de langage, on l'appelle l'hyperplan polaire par du point  $X$  par rapport à  $O$ .

**Définition 3.6.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien et soit  $O \in \mathcal{A}$ . L'hyperplan polaire de  $X \in \mathcal{A}$  est défini par*

$$H^* = \left\{ Y \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle = 1 \right\}.$$

En guise d'exemple, déterminons le polaire de la boule ouverte centrée en le point  $O$  et de rayon  $r$ .

**Proposition 3.6.1.** *Soient  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien,  $O \in \mathcal{A}$  et soit  $r > 0$ . Le polaire de la boule ouverte  $B(O, r)$  est donné par la boule ouverte  $B\left(O, \frac{1}{r}\right)$ .*

*Démonstration.* Nous devons montrer que

$$B(O, r)^* = \left\{ Y \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1 \forall X \in B(O, r) \right\} = B\left(O, \frac{1}{r}\right).$$

Procédons par double inclusion. Montrons tout d'abord que

$$B(O, r)^* \subseteq B\left(O, \frac{1}{r}\right).$$

Procédons par contraposition. Si  $Y \notin B\left(O, \frac{1}{r}\right)$ , alors  $\exists \varepsilon > 0$  tel que

$$\|\overrightarrow{OY}\| > \frac{1}{r - \varepsilon}.$$

Nous devons trouver un point  $X$  appartenant à  $B(O, r)$  tel que

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle > 1.$$

Prenons

$$X = O + (r - \varepsilon) \frac{\overrightarrow{OY}}{\|\overrightarrow{OY}\|},$$

alors  $X \in B(O, r)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle &= \left\langle (r - \varepsilon) \frac{\overrightarrow{OY}}{\|\overrightarrow{OY}\|}, \overrightarrow{OY} \right\rangle \\ &= (r - \varepsilon) \|\overrightarrow{OY}\| > 1. \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $Y \notin B(O, \frac{1}{r})^*$ . Il nous reste à montrer que

$$B\left(O, \frac{1}{r}\right) \subseteq B(O, r)^*.$$

Soit  $Y \in B\left(O, \frac{1}{r}\right)$ . Pour tout  $X \in B(O, r)$ , on a

$$|\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle| \leq \|\overrightarrow{OX}\| \|\overrightarrow{OY}\|$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comme  $X \in B(O, r)$  et comme  $Y \in B\left(O, \frac{1}{r}\right)$ , nous obtenons que

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1.$$

Cela achève la démonstration. □

Il est raisonnable de se demander si la polarité préserve la convexité.

**Proposition 3.6.2.** *Soit  $C$  un convexe d'un espace affine euclidien  $\mathcal{A}$  et soit  $O \in A$ . Le sous-ensemble polaire  $C^*$  de  $C$  est un convexe.*

*Démonstration.* Remarquons que

$$C^* = \bigcap_{X \in C} \left\{ Y \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1 \right\}.$$

La proposition 3.1.3 implique alors que  $C^*$  est convexe. □

Le lemme suivant nous apprend que la polarité renverse l'inclusion.



**Lemme 3.6.1.** *Si  $A, B$  sont deux parties quelconque d'un espace affine euclidien  $\mathcal{A}$  tels que  $A \subset B$  et si  $O \in \mathcal{A}$ , alors  $B^* \subset A^*$ .*

*Démonstration.* Soit  $Y \in B^*$ . Nous devons montrer que  $Y \in A^*$ . Comme  $Y \in B^*$ , on sait par définition que

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1 \quad \forall X \in B.$$

Or,  $A \subset B$  par hypothèse. On a donc

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1 \quad \forall X \in A.$$

Ce qui signifie que  $Y \in A^*$ ; d'où la conclusion. □

Les résultats établis précédemment nous permettent de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 3.6.3.** *Soit  $A$  une partie de  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien d'origine  $O$  :*

- (1) *si  $A$  est borné, alors  $O \in (A^*)^\circ$  ;*
- (2) *si  $O \in A^\circ$ , alors  $A^*$  est borné ;*
- (3) *si  $A$  est un fermé convexe contenant  $O$ , alors  $A^{**} = A$ .*

*Démonstration.*

1. Comme  $A$  est borné, on peut supposer que

$$A \subset B(O, r)$$

pour un réel  $r$  strictement positif assez grand. Par le lemme 3.6.1, nous obtenons que

$$B(O, r)^* \subset A^*.$$

Par la proposition 3.6.1, nous savons que

$$B(O, r)^* = B\left(O, \frac{1}{r}\right).$$

Ainsi,

$$B\left(O, \frac{1}{r}\right) \subset A^*$$

et donc  $O \in (A^*)^\circ$ .

2. On procède de la même manière. Comme  $O \in A^\circ$ , on sait qu'il existe  $r > 0$  tel que

$$B(O, r) \subset A.$$

On en tire que

$$A^* \subset B(O, r)^* = B\left(O, \frac{1}{r}\right)$$

et donc que  $A^*$  est borné.

3. Soit  $A$  un fermé convexe contenant  $O$ . Tout d'abord, il est clair que  $A \subset A^{**}$  par la définition 3.6.1. Il nous reste donc à montrer que  $A^{**} \subset A$ . Procédons par contraposition. Si  $Y \notin A$ . Par le corolaire 3.5.3, puisque  $\{Y\}$  est compact, on sait qu'il existe un hyperplan

$$H = \left\{ X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ} \rangle = 1 \right\}$$

séparant strictement  $A$  de  $Y$  et puisque  $O \in A$ , on déduit que  $O \notin H$ . Autrement dit,

$$\langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ} \rangle > 1 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ} \rangle \leq 1 \quad \forall X \in A.$$

Ainsi,  $Z \in A^*$  et comme  $\langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ} \rangle > 1$ , on obtient que  $Y \notin A^{**}$ ; d'où la conclusion.

□

**Remarque 3.6.1.** Dans le point (3) de la démonstration précédente, nous avons considéré l'hyperplan

$$H = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ} \rangle = 1\}.$$

Le point  $Z$  utilisé pour définir  $H$  est appelé le pôle de  $H$ .

### 3.7 Hyperplans d'appui

Les deux précédentes sections nous amènent à la notion d'hyperplans d'appui. Débutons cette section par la définition.

**Définition 3.7.1.** Soit  $A$  une partie quelconque d'un espace affine  $\mathcal{A}$ . On appelle hyperplan d'appui de  $A$ , tout hyperplan  $H$  contenant un point  $X \in A$  et séparant  $\{X\}$  et  $A$ . On dit que  $H$  est un hyperplan d'appui de  $A$  en  $X$ .

**Proposition 3.7.1.** Soit  $A$  un convexe fermé. Alors, par tout point de la frontière de  $A$  passe un hyperplan d'appui en ce point.

*Démonstration.* Si  $X \in A^\bullet$ , alors

$$\{X\} \cap A^\circ = \emptyset.$$

On conclut alors en appliquant le théorème 3.5.1.

□

La proposition suivante a pour but de montrer qu'il y a une dualité entre les points  $A^\bullet$  et les hyperplans d'appui.

**Proposition 3.7.2.** Soient  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien d'origine  $O$ ,  $A$  un convexe fermé tel que  $O \in A^\circ$ . Alors, les hyperplans polaires des points de  $A^\bullet$  constituent l'ensemble des hyperplans d'appui de  $A^*$ . De plus, si  $X \in A^\bullet$  a pour hyperplan polaire  $H$ , les points d'appui de  $H$  sont les pôles des hyperplans d'appui de  $A$  en  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $X \in A^\bullet$ . Par la définition 3.6.1, on sait que  $A^*$  est contenu dans le demi-espace déterminé par  $H$ , à savoir, l'hyperplan polaire de  $X$ . De même, si  $H'$  est un hyperplan d'appui de  $A$  en  $X$  et si  $P$  est son pôle, alors  $P \in H$  et  $P \in A^*$  puisque  $A^{**} = A$  et puisque  $A$  est contenu dans le demi-espace, contenant  $O$ , déterminé par  $H'$ . On en tire que  $H$  est bien un hyperplan d'appui de  $A^*$  en  $P$ . Ainsi, nous obtenons tous les hyperplans d'appui de  $A^*$  parce que  $A^{**} = A$  par la proposition 3.6.3.

□

**Proposition 3.7.3.** Soit  $A$  un fermé d'intérieur non vide. Supposons que  $A$  possède un hyperplan d'appui en tout point de sa frontière, alors  $A$  est un convexe.

*Démonstration.* Procédons par l'absurde et supposons que  $A$  n'est pas convexe. Si  $X \in A^\circ$ , supposons qu'il existe des points  $Y, Z \in A$  et  $T \in [Y, Z]$  tel que  $T \notin A$ . Puisque  $T \notin A$  et  $X \in A^\circ$ , le segment  $[X, T]$  rencontre  $A^\bullet$  en au moins un point  $U \in ]X, T[$ . Soit  $H$  un hyperplan d'appui de  $A$  en  $U$ ; sa trace sur le plan affine engendré par  $X, Y, Z$  fournirait une droite passant par  $U$ . Or, toute droite passant par  $U$ , qui est dans l'intérieur du triangle  $XYZ$ , sépare strictement soit  $X$  et  $Y$ , soit  $X$  et  $Z$ . Cela contredit le fait que  $H$  est un hyperplan d'appui.

□

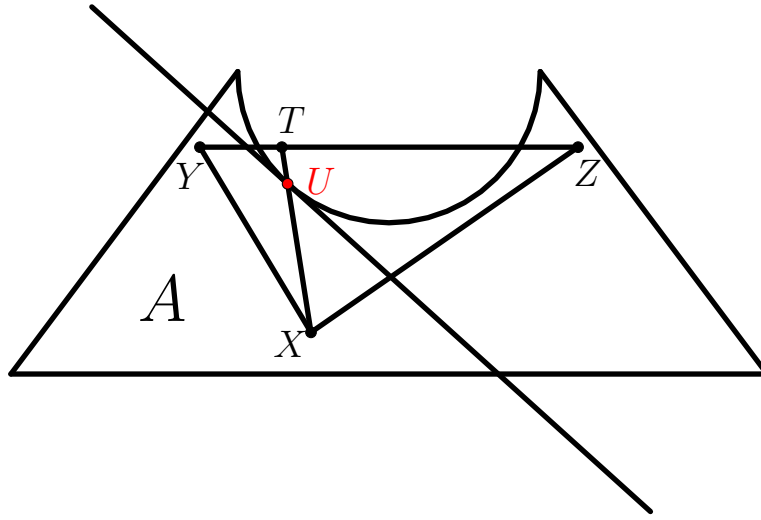


FIGURE 3.3

La proposition suivante caractérise certains hyperplans d'appui.

**Proposition 3.7.4.** *Soit  $C$  un convexe non vide de  $\mathcal{A}$  et soit  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{A}$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $H \cap \text{ri}(C) = \emptyset$  ;
- (2)  $C$  est inclus dans un des deux demi-espaces fermés délimités par  $H$ , mais pas dans  $H$ .

*Démonstration.*

- (1)  $\Rightarrow$  (2).

Par la proposition 3.4.1, on sait qu'il existe  $X_0 \in \text{ri}(C)$ . Alors,  $X_0 \notin H$  par hypothèse. En particulier,  $C$  n'est pas inclus dans  $H$ . Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe  $X_1 \in C$  tel que  $X_0$  et  $X_1$  sont sur des côtés opposés de  $H$ . Soit  $O \in \mathcal{A}$  et soit  $n$  une normale à l'hyperplan  $H$ . Alors,

$$\langle \overrightarrow{OX_0}, n \rangle < \alpha < \langle \overrightarrow{OX_1}, n \rangle.$$

Posons

$$\lambda = \frac{\alpha - \langle \overrightarrow{OX_0}, n \rangle}{\langle \overrightarrow{OX_1}, n \rangle - \langle \overrightarrow{OX_0}, n \rangle} \quad \text{et} \quad X_\lambda = (1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1.$$

Alors,  $\lambda \in ]0, 1[$ , et donc,  $X_\lambda \in ]X_0, X_1[$ . De plus, on a

$$\langle \overrightarrow{OX_\lambda}, n \rangle = \alpha,$$

ce qui implique que  $X_\lambda \in H$ . Or, puisque  $X_0 \in \text{ri}(C)$  et  $X_\lambda \in ]X_0, X_1[$ , on sait que

$$X_\lambda \in H \cap \text{ri}(C)$$

par la proposition 3.4.2 ; d'où une contradiction.

- (2)  $\Rightarrow$  (1).

Supposons qu'il existe  $X \in H \cap \text{ri}(C)$  et montrons que l'on arrive à une contradiction. Par hypothèse, il existe  $Y \in C \setminus H$ . Alors, par la proposition 3.4.3, il existe  $Z \in C$  tel que  $X \in ]Y, Z[$ , d'où

$$X = (1 - \lambda)Y + \lambda Z$$

pour un  $\lambda$  dans  $]0, 1[$ . Donc,

$$C \subset \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle \leq \alpha\}.$$

Alors,

$$\langle \overrightarrow{OY}, n \rangle < \alpha \text{ et } \langle \overrightarrow{OZ}, n \rangle \leq \alpha.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle &= \langle (1 - \lambda)Y + \lambda Z, n \rangle \\ &= (1 - \lambda)\langle \overrightarrow{OY}, n \rangle + \lambda\langle \overrightarrow{OZ}, n \rangle \\ &< (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Nous avons également que  $\langle \overrightarrow{OX}, n \rangle = \alpha$  car  $X \in H$ ; d'où une contradiction.

□

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.7.1.** *Un hyperplan d'appui  $H$  d'un ensemble convexe non vide  $C$  de  $\mathcal{A}$  est un hyperplan d'appui propre de  $C$  si et seulement si  $H \cap \text{ri}(C) = \emptyset$ .*

Le résultat suivant nous apprend que tout convexe non vide est déterminé par ses hyperplans d'appui.

**Théorème 3.7.1.** *Soit  $C$  un ensemble convexe non vide de  $\mathcal{A}$ . Alors,  $C$  est l'intersection de ses demi-espaces d'appui.*

*Démonstration.* Si  $\dim(C) = 0$ , alors le théorème est clairement vrai. Si  $C = \mathcal{A}$ , alors  $C$  ne possède pas d'hyperplans d'appui et le résultat est démontré. Supposons donc que  $\dim(C) \geq 1$  et que  $C \neq \mathcal{A}$ . Soit  $X$  un point de  $\mathcal{A} \setminus C$ . Nous allons prouver qu'il existe un demi-espace d'appui  $K$  de  $C$  tel que  $X \notin K$ . Si  $X \notin C\{a$ , alors il existe un hyperplan  $H$  de  $\mathcal{A}$  tel que

$$C\{a \subset H \text{ et } X \notin H.$$

Alors, le demi-espace fermé délimité par  $H$  qui ne contient pas  $X$  convient. Considérons à présent le cas où  $X \in C\{a$ . Par la proposition 3.4.1, on sait qu'il existe  $Z \in \text{ri}(C)$ . Alors, par la proposition 3.4.2,

$$[Z, X] \cap C$$

est le segment  $[Z, U]$  où

$$U \in \text{rf}(C) \text{ et où } [Z, U[ \subset \text{ri}(C).$$

Dès lors, par la proposition 3.7.1, il existe un hyperplan d'appui  $H$  de  $C$  tel que  $U \in H$ . Le sous-espace d'appui  $K$  délimité par  $H$  possède alors la propriété désirée. En effet, si on suppose que  $X \in K$ . Puisque  $Z \in \text{ri}(C)$ , il suit du corollaire 3.7.1 que  $Z \notin H$ , d'où  $Z \in K^\circ$ . Or, la proposition 3.4.2 montre que

$$]Z, X[ \subset K^\circ$$

ce qui contredit le fait que

$$U \in ]Z, X[$$

dans  $H = K^\circ$ .

□

### 3.8 Théorème de Krein et Milman

Cette section a pour but de démontrer le théorème de Krein et Milman qui nous apprend qu'un convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Avant d'énoncer et de démontrer ce théorème, nous allons examiner les différentes sortes de points appartenant à la frontière d'un convexe.

**Définition 3.8.1.** Soient  $C$  un convexe fermé d'un espace affine  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$  et  $X \in C^\bullet$ . On dit que  $X$  est d'ordre  $\alpha$  si le sous-espace affine, intersection de tous les hyperplans d'appui de  $C$  en  $X$ , est de dimension  $\alpha$ . Le point  $X$  est dit un sommet de  $C$  s'il est d'ordre  $\alpha = 0$ . Si à l'opposé,  $\alpha = n - 1$  (c'est-à-dire si l'hyperplan d'appui en  $X$  est unique), on dit que  $C$  est lisse en  $X$ .

**Exemple 3.8.1.**

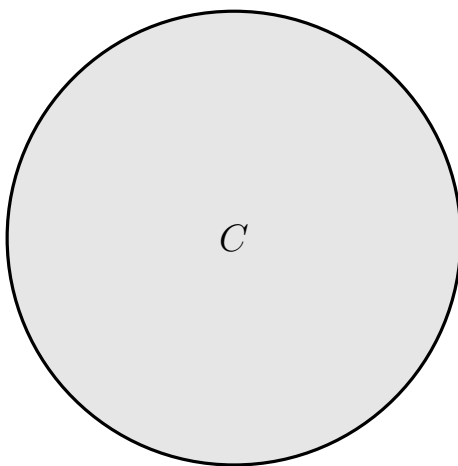


FIGURE 3.4

Tous les points du cercle représenté à la figure 3.4 sont lisses, il n'y a aucun sommet.

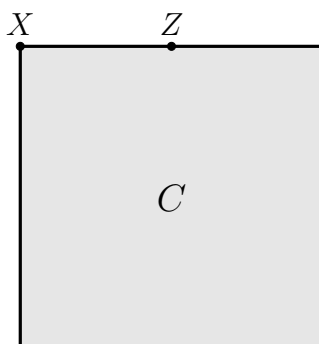


FIGURE 3.5

Le point  $X$  du carré représenté à la figure 3.5 est un sommet car son ordre  $\alpha$  vaut 0. En effet,  $X$  est le point d'intersection de tous les hyperplans d'appui de  $C$  en  $X$ . Nous savons que la dimension d'un point vaut 0. L'ordre  $\alpha$  du point  $Z$  vaut 1 car l'intersection de tous les hyperplans d'appui de  $C$  en  $Z$  est donnée par la droite  $XZ$ . Le point  $Z$  est lisse.

**Définition 3.8.2.** Soit  $C$  un convexe et soit  $X \in C^\bullet$ . Le point  $X$  est dit exposé s'il existe un hyperplan d'appui  $H$  en  $X$  tel que

$$H \cap C = \{X\}.$$

Le point  $X$  est dit extrémal si

$$X = \frac{Y + Z}{2} \text{ avec } Y, Z \in C$$

implique que

$$Y = Z.$$

Le convexe  $C$  est dit strictement convexe si tous ses points frontières sont exposés.

**Exemple 3.8.2.** Les points extrémaux d'un intervalle compact sont donnés par ses extrémités.

**Remarque 3.8.1.** Tous les sommets d'un convexe sont des points exposés.

**Proposition 3.8.1.** Soient  $C$  un convexe et  $X \in C^\bullet$ . Si  $X$  est un sommet de  $C$ , alors  $X$  est un point extrémal.

*Démonstration.* Procédons par l'absurde et supposons que  $X$  est un sommet du convexe  $C$  et que  $X$  n'est pas extrémal. Dans ce cas, il existe  $Y$  et  $Z$  deux points distincts de  $C$  tels que  $X$  est le milieu du segment  $[Y, Z]$ . Comme  $Y$  et  $Z$  appartiennent à  $C$  et comme  $X$  appartient au segment  $[Y, Z]$ , on peut affirmer que l'intersection de tous les hyperplans d'appui de  $C$  en  $X$  contient la droite  $YZ$ . Par conséquent, l'ordre de  $X$  vaut 1. Cela contredit le fait que  $X$  est un sommet. □

**Remarque 3.8.2.** Nous verrons dans la suite que la réciproque de la proposition 3.8.1 est vraie dans le cas des polyèdres convexes. Néanmoins, la réciproque de cette proposition est fautive en toute généralité comme le montre la figure 3.6.

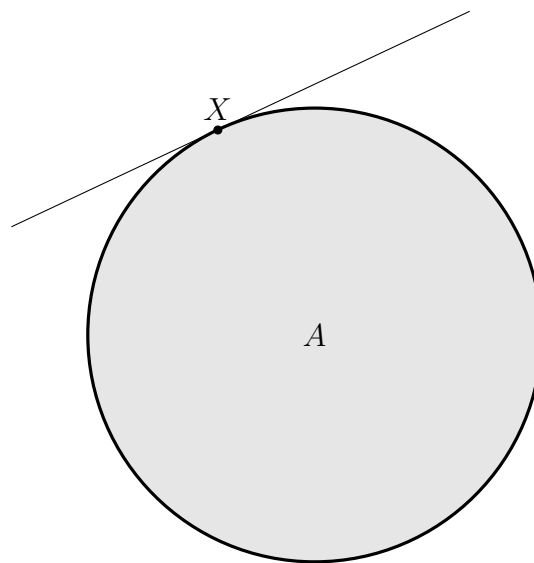


FIGURE 3.6

En effet, le point  $X$  est clairement extrémal. Cependant, ce point se trouve sur un cercle et est donc lisse. Ce n'est donc pas un sommet.

**Corollaire 3.8.1.** *Soient  $C$  un convexe et  $X \in C^\bullet$ . Si  $X$  est un point exposé de  $C$ , alors  $X$  est un point extrémal.*

*Démonstration.* Cela résulte de la remarque 3.8.1 et de la proposition 3.8.1. □

La proposition suivante nous fournit une caractérisation des points extrémaux d'un ensemble convexe.

**Proposition 3.8.2.** *Soient  $C$  un convexe et  $X \in C^\bullet$ . Le point  $X$  est extrémal si et seulement si  $C \setminus X$  est encore convexe.*

*Démonstration.*

- La condition est nécessaire car si  $X$  est extrémal alors tout segment déterminé par deux points de  $C$  contenant  $X$  est réduit au point  $X$ . Dès lors, pour tous points  $Y, Z$  appartenant à  $C \setminus X$ , le segment  $[Y, Z]$  est inclus dans  $C \setminus X$ . Cela montre que  $C \setminus X$  est convexe.
- La condition est suffisante. Si  $B = C \setminus X$  est convexe, alors pour tous points  $Y, Z$  de  $B$ , on a  $[Y, Z] \subset B$ . Puisque  $C$  est convexe et puisque  $C = B \cup X$ , on en tire que  $X$  n'est milieu d'aucun segment de  $C$ . Autrement dit, s'il existe deux points  $P$  et  $Q$  de  $C$  tels que

$$X = \frac{P + Q}{2},$$

alors  $P = Q$ . Cela montre que  $X$  est extrémal. □

### **Théorème 3.8.1. (Krein et Milman)**

*Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension finie  $n$ . Un convexe compact  $C$  est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

*Démonstration.* Désignons par  $\text{Extrem}(C)$ , l'ensemble des points extrémaux de  $C$ . Par la définition 3.8.2, on a

$$\text{Extrem}(C \cap H) = \text{Extrem}(C) \cap H \tag{3.1}$$

pour tout hyperplan d'appui  $H$  de  $C$ . Nous allons donc démontrer le théorème par récurrence sur la dimension  $n$  de  $\mathcal{A}$ . Le cas de base est donné par le cas où  $n = 1$  et est vérifié vu l'exemple 3.8.2. Supposons que le résultat est vérifié pour  $1 \leq k \leq n - 1$  et montrons qu'il est vrai pour  $n$ . Par la proposition 3.3.3, pour montrer que

$$C = \mathcal{E}(\text{Extrem}(C)),$$

il suffit de montrer que

$$C^\bullet \subset \mathcal{E}(\text{Extrem}(C)).$$

Soit  $X \in C^\bullet$ . Par la proposition 3.7.1, on sait qu'il existe un hyperplan d'appui  $H$  de  $C$  en  $X$ . Alors,  $C \cap H$  est un convexe de  $H$  et comme  $H$  est de dimension  $n - 1$  par la définition 3.1.3, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et affirmer que

$$\begin{aligned} X \in (C \cap H) &= \mathcal{E}(\text{Extrem}(C \cap H)) \\ &= \mathcal{E}(\text{Extrem}(C) \cap H) \text{ vu (3.1)} \\ &= \mathcal{E}(\text{Extrem}(C)) \cap H \\ &\subset \mathcal{E}(\text{Extrem}(C)). \end{aligned}$$

Cela montre que

$$C^\bullet \subset \mathcal{E}(\text{Extrem}(C))$$

et achève par conséquent la démonstration. □

### 3.9 Structure faciale d'un convexe

Dans la section précédente, nous avons défini la notion de sommet d'un convexe. Nous allons à présent définir ce qu'on entend par face d'un convexe. Durant toute cette section, nous désignerons par  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $n$ .

#### Définition 3.9.1.

Soit  $C$  un ensemble convexe fermé de  $\mathcal{A}$ .

- Un sous-ensemble convexe  $F$  de  $C$  est une face de  $C$  si pour tous points distincts  $Y, Z$  dans  $C$  tels que  $]Y, Z[$  est d'intersection non vide avec  $F$ , on a  $[Y, Z] \subset F$ .
- Si  $F \neq \emptyset$  et si  $F \neq C$ , alors on dit que  $F$  est une face propre de  $C$ .
- On dit que  $F$  est une  $k$ -face de  $C$  si  $\dim(F) = k$ . Une facette de  $C$  est une face telle que

$$0 \leq \dim(F) = \dim(C) - 1.$$

Nous noterons  $\mathcal{F}(C)$  l'ensemble des faces d'un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 3.9.1.** Chaque face  $F$  d'un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathcal{A}$  est fermée.

*Démonstration.* Pour  $\dim(F) = 0$ , il n'y a rien à prouver. Supposons donc que  $\dim(F) \geq 1$ . Soit  $X \in \overline{F}$ . Par la proposition 3.4.2, nous savons qu'il existe  $X_0 \in \text{ri}(F)$ . Si  $X = X_0$ , on a  $X \in F$  comme voulu. Si  $X \neq X_0$ , alors

$$[X_0, X[ \subset \text{ri}(F)$$

par la proposition 3.4.2. En particulier,

$$]X_0, X[ \cap F \neq \emptyset$$

d'où  $X \in F$  par la définition 3.9.1. □

**Proposition 3.9.2.** Soit  $F$  une face d'un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathcal{A}$  et soit  $G$  un sous-ensemble de  $F$ . Alors,  $G$  est une face de  $C$  si et seulement si  $G$  est une face de  $F$ .

*Démonstration.* Par la définition 3.9.1, si  $G$  est une face de  $C$ , alors  $G$  est également une face de  $F$ . Réciproquement, supposons que  $G$  soit une face de  $F$ , et soient  $Y, Z$  des points distincts de  $C$  tels que

$$]Y, Z[ \cap G \neq \emptyset.$$

Comme  $G \subset F$ , on a également

$$]Y, Z[ \cap F \neq \emptyset.$$

Il vient alors que  $Y, Z \in F$  car  $F$  est une face de  $C$ . Or,  $Y, Z \in G$  puisque  $G$  est une face de  $F$ . D'où la conclusion. □

**Proposition 3.9.3.** Soit  $F$  une face propre d'un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathcal{A}$ . Alors,  $F \subset \text{rf}(C)$ .

*Démonstration.* Pour  $\dim(C) = 0$ , il n'y a rien à prouver. Nous pouvons donc supposer que  $\dim(C) \geq 1$ . Soit  $F$  une face de  $C$  et  $X$  un point de  $F$  appartenant à  $\text{ri}(C)$ . Montrons que  $F = C$ . Soit  $Y \in C$ . Si  $Y = X$ , alors  $Y \in F$  comme désiré. Si  $Y \neq X$ , alors il existe  $Z \in C$  tel que

$$X \in ]Y, Z[$$

par la proposition 3.4.3. Puisque  $X \in F$  et puisque  $F$  est une face, nous obtenons que  $Y \in F$ . □



**Corollaire 3.9.1.** *Soient  $F$  et  $G$  deux faces d'un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $G \not\subseteq F$ . Alors  $G \subset \text{rf}(F)$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 3.9.2, nous savons que  $G$  est une face de  $F$ . D'où la conclusion par la proposition 3.9.3. □

**Corollaire 3.9.2.** *Soient  $F$  et  $G$  deux faces d'un ensemble convexe fermé  $C$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $G \not\subseteq F$ . Alors,  $\dim(G) < \dim(F)$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que

$$\rangle G \langle_a \subset \rangle F \langle_a$$

car  $G \subset F$ . Procédons par l'absurde et supposons que

$$\rangle G \langle_a = \rangle F \langle_a.$$

Dans ce cas,  $G \subset F$  et donc,  $\text{ri}(G) \subset \text{ri}(F)$ . Vu le corollaire 3.9.1, nous obtenons que

$$\text{ri}(G) = \emptyset.$$

Par la proposition 3.4.1, on obtient que  $G = \emptyset$  et donc  $F = \emptyset$  puisque  $\rangle F \langle_a = \rangle G \langle_a$ . Cela contredit le fait que  $G \neq F$  par hypothèse. En conclusion, nous devons avoir

$$\rangle G \langle_a \not\subseteq \rangle F \langle_a$$

et donc,

$$\dim(G) < \dim(F).$$

□

**Proposition 3.9.4.** *Soient  $C$  un ensemble convexe fermé de  $\mathcal{A}$ ,  $X \in C$  et soit  $F$  une face de  $C$  contenant  $X$ . Alors,  $F$  est la plus petite face contenant  $X$  si et seulement si  $X \in \text{ri}(F)$ .*

*Démonstration.* Si  $X \in \text{ri}(F)$ , alors  $F$  est la plus petite face contenant  $X$  par le corollaire 3.9.1. Si  $X \in \text{rf}(F)$ , alors il existe une face  $G$  de  $F$  telle que

$$X \in G \not\subseteq F$$

par la proposition 3.7.1. Par la proposition 3.9.2, nous savons que  $G$  est également une face de  $C$ , et donc  $F$  n'est pas la plus petite face contenant  $X$ . □

**Corollaire 3.9.3.** *Soit  $C$  un ensemble convexe fermé de  $\mathcal{A}$ . Alors, les ensembles  $\text{ri}(F)$ , où  $F \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ , forment une partition de  $C$ .*

*Démonstration.* Nous devons prouver que pour tout  $X \in C$ , il existe une unique face  $F$  de  $C$  telle que  $X \in \text{ri}(F)$ . C'est immédiat par la proposition 3.9.4. □

**Théorème 3.9.1.** *Soit  $C$  un ensemble convexe compact de  $\mathcal{A}$  et soit  $M$  un sous-ensemble de  $C$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $C = \mathcal{E}(M)$  ;
- (2)  $\text{Extrem}(C) \subset M$ .

*Démonstration.*

- (1)  $\Rightarrow$  (2).

Supposons qu'il existe un point extrémal  $X$  de  $C$  qui n'appartient pas à  $M$ . Alors,  $M$  est un sous-ensemble de  $C \setminus \{X\}$ , et puisque  $C \setminus \{X\}$  est convexe par la proposition 3.8.2, on en tire que  $\mathcal{E}(M)$  est aussi un sous-ensemble de  $C \setminus \{X\}$ .

- (2)  $\Rightarrow$  (1).

Par hypothèse, nous savons que

$$\text{Extrem}(C) \subset M.$$

Donc, on a

$$\mathcal{E}(\text{Extrem}(C)) \subset \mathcal{E}(M).$$

Par hypothèse, nous savons également que  $M \subset C$  et donc que

$$\mathcal{E}(M) \subset C.$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$C \subset \mathcal{E}(\text{Extrem}(C))$$

pour arriver à la conclusion que

$$C = \mathcal{E}(M).$$

Procédons par récurrence sur la dimension de  $C$ . Si  $\dim(C) = 0$ , il n'y a rien à prouver. Si  $\dim(C) = 1$ , le résultat est clairement vrai. Supposons que le résultat est vrai pour  $\dim(C) < m$  où  $m \geq 2$  et montrons-le pour  $\dim(C) = m$ . Soit  $X \in C$ . Nous allons montrer que  $X$  s'écrit comme une combinaison convexe des points extrémaux de  $C$ . Si  $X$  est un point extrémal de  $C$ , c'est terminé. Supposons donc que  $X$  n'est pas un point extrémal de  $C$ . Dans ce cas, il existe un segment de  $C$  qui contient  $X$  dans son intérieur relatif. En considérant la droite qui contient ce segment, on constate qu'il existe des points  $Y_0, Y_1 \in \text{rf}(C)$  tels que

$$X \in ]Y_0, Y_1[.$$

Soient  $F_0$  et  $F_1$  les plus petites faces de  $C$  contenant respectivement  $Y_0$  et  $Y_1$ . Par le corollaire 3.9.3, on sait que  $F_0$  et  $F_1$  sont des faces propres de  $C$ . En particulier,  $F_0$  et  $F_1$  sont des ensembles convexes compacts par la proposition 3.9.1. De plus,

$$\dim(F_0) < m \text{ et } \dim(F_1) < m$$

par le corollaire 3.9.2. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe des points

$$X_{0,1}, \dots, X_{0,p} \in \text{Extrem}(F_0) \text{ et } X_{1,1}, \dots, X_{1,q} \in \text{Extrem}(F_1)$$

tels que  $Y_0$  s'écrit comme combinaison convexe des  $X_{0,i}$  où  $i \in \{1, \dots, p\}$  et tels que  $Y_1$  s'écrit comme combinaison convexe de  $X_{1,j}$  où  $j \in \{1, \dots, q\}$ . Puisque  $X$  est une combinaison convexe de  $Y_0$  et  $Y_1$ , il vient que  $X$  s'écrit comme une combinaison convexe des points

$$X_{0,1}, \dots, X_{0,p}, X_{1,1}, \dots, X_{1,q}.$$

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que les  $X_{0,i}$  où  $i \in \{1, \dots, p\}$  et les  $X_{1,j}$  où  $j \in \{1, \dots, q\}$  sont des points extrémaux de  $C$  par la proposition 3.9.2.

□

### 3.10 Polyèdres convexes

À présent, nous avons tout en main pour définir les polyèdres convexes dans un espace affine réel  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$ . Nous commencerons par la définition et nous en donnerons quelques exemples. Nous nous intéresserons ensuite à un théorème de structure des polyèdres. Nous nous intéresserons ensuite à quelques résultats relatifs aux faces et aux sommets d'un polyèdre convexe. Nous avons consulté les références [3] et [5] lors de la rédaction, le lecteur désireux d'en apprendre davantage est invité à les consulter. Tout au long de cette section, sauf mention explicite du contraire, nous désignerons par  $\mathcal{A}$  un espace affine réel de dimension finie  $n$ .

**Définition 3.10.1.** *Un polyèdre convexe  $P$  de  $\mathcal{A}$  est une partie de  $\mathcal{A}$  qui est une intersection finie de demi-espaces fermés. On dit que  $P$  est un ensemble polyédrique de  $\mathcal{A}$ . Un polytope est un polyèdre convexe, compact et d'intérieur non vide. Lorsque  $\dim \mathcal{A} = 2$ , on dit plutôt polygone au lieu de polytope.*

**Corollaire 3.10.1.** *Tout polyèdre convexe est convexe.*

**Proposition 3.10.1.** *Une intersection finie de polyèdres convexes est encore un polyèdre convexe.*

*Démonstration.* Nous savons que toute intersection de fermés est un fermé. Nous savons également que toute intersection de convexes et un convexe par la proposition 3.1.3. D'où la conclusion. □

**Exemple 3.10.1.** *Soit  $\mathcal{R}$  un repère orthonormé de  $\mathcal{A}$ .*

(1) *Le cube standard associé à  $\mathcal{R}$ , noté  $\text{Cub}_n$ , est un polytope de  $\mathcal{A}$ . On a*

$$\text{Cub}_n = \{X : (x_1, \dots, x_n) \text{ tel que } |x_i| \leq 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

(2) *Le cocube standard associé à  $\mathcal{R}$ , noté  $\text{Coc}_n$ , est un polytope de  $\mathcal{A}$ . On a*

$$\text{Coc}_n = \left\{ X : (x_1, \dots, x_n) \text{ tel que } \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}.$$

Nous allons nous intéresser à l'image d'un convexe par une similitude. Cela nous permettra de définir ce que l'on entend par cube.

**Définition 3.10.2.** *Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien et soit  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  une application. On dit que  $S$  est une similitude de facteur  $k$  si pour tous points  $X, Y$  appartenant à  $\mathcal{A}$ , on a*

$$\left\| \overrightarrow{S(X)S(Y)} \right\| = k \left\| \overrightarrow{XY} \right\|.$$

**Proposition 3.10.2.** *L'image d'un convexe par une similitude est un convexe.*

*Démonstration.* Cela résulte directement de la proposition 3.1.1. □

**Définition 3.10.3.** *On appelle cube (respectivement cocube) de dimension  $n$ , tout polytope dont l'image par une similitude est le cube standard  $\text{Cub}_n$  (respectivement le cocube standard  $\text{Coc}_n$ ).*

**Remarque 3.10.1.** *Les cubes et les cocubes coïncident en dimension 2 mais nous verrons par la suite qu'ils diffèrent lorsque la dimension  $n$  est strictement supérieure à 2.*

Nous pouvons nous demander si le dual d'un polyèdre convexe est un polyèdre convexe.

**Proposition 3.10.3.** Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien de dimension finie  $n$  et soient  $O \in \mathcal{A}$ ,  $X_1, \dots, X_n$  un nombre fini de points de  $\mathcal{A}$  et  $P = \mathcal{E}(X_1, \dots, X_n)$  leur enveloppe convexe. Alors, le convexe  $P^*$  polaire de  $P$  est un polyèdre convexe. Si de plus,  $O \in P^\circ$ , alors c'est un polytope. On l'appelle le dual de  $P$ .

*Démonstration.* Nous savons par la définition 3.6.1 que

$$P^* = \bigcap_{X \in Q} \left\{ Y \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1 \right\}.$$

Vu la définition 3.10.1, on obtient immédiatement que  $P^*$  est un polyèdre convexe. Si en outre,  $O \in P^\circ$ , il suffit d'appliquer la proposition 3.6.3 pour obtenir que  $P^*$  est un polytope.  $\square$

Nous obtenons alors que le cube standard et le cocube standard sont des polyèdres duaux.

**Corollaire 3.10.2.** Le dual de  $\text{Cub}_n$  est  $\text{Coc}_n$ . De même, le dual de  $\text{Coc}_n$  est  $\text{Cub}_n$ .

*Démonstration.* Par la proposition 3.10.3, pour montrer que

$$\text{Cub}_n^* = \text{Coc}_n,$$

on peut se limiter au sommet  $X_1, \dots, X_n$  de  $\text{Cub}_n$ . Définissons pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la fonction

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\text{Cub}_n^* = \left\{ X \in \mathcal{A} : \sum_{i=1}^n (-1)^{\sigma_i} X_i \leq 1 \forall \sigma_i \in \{-1, 1\}^n \right\}$$

Comme

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{\sigma_i} X_i \leq \sum_{i=1}^n (-1)^{\frac{1-\sigma_i}{2}} X_i \leq 1$$

et comme

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{\frac{1-\sigma_i}{2}} X_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |X_i|,$$

on obtient que

$$\text{Cub}_n^* = \text{Coc}_n.$$

Il est alors évident que

$$\text{Coc}_n^* = \text{Cub}_n$$

car

$$\text{Cub}_n = \text{Cub}_n^{**} = \text{Coc}_n^*.$$

$\square$

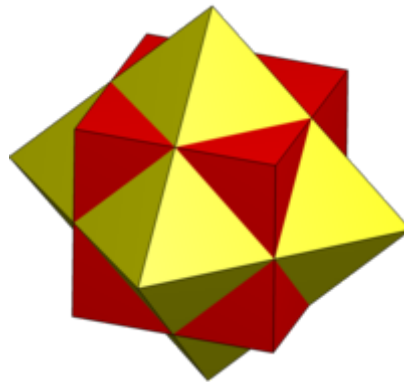


FIGURE 3.7 – Un cube et son polaire un peu dilaté.

Le théorème suivant nous fournit quelques informations concernant la structure des ensembles polyédriques.

**Théorème 3.10.1. (Structure des polyèdres)**

Soit  $P$  un ensemble polyédrique non vide de dimension  $n$  de  $\mathcal{A}$ . Supposons que

$$P = \bigcap_{i=1}^n R_i$$

soit une écriture minimale, cela signifie que les  $R_i$  sont des demi-espaces fermés et que  $P$  ne peut pas être écrit comme intersection finie d'un nombre strictement plus petit que  $n$  demi-espaces fermés. Alors,

- (1) à l'ordre près, les  $R_i$  sont bien déterminés ;
- (2) si  $H_i$  désigne l'hyperplan  $R_i^\bullet$  définissant  $R_i$ , alors  $H_i \cap P$  est un polyèdre convexe d'intérieur non vide dans  $H_i$ , appelé la  $i$ -ème face de  $P$  (côté si  $n = 2$ ). On la note  $F_i(P)$  ;
- (3) on a

$$P^\bullet = \bigcup_{i=1}^n F_i(P).$$

*Démonstration.* Fixons  $i$  et considérons

$$P = \bigcap_{j \neq i} R_j.$$

L'écriture étant minimale, on sait qu'il existe  $X \in Q \setminus R_i$ . Soit  $Y \in P^\circ$ . Par le lemme 3.3.1, le segment  $[X, Y]$  n'est pas inclus dans un des deux demi-espaces ouverts défini par  $H_i$ , donc il y a un point du segment, et un seul qui appartient à  $H_i$ . Comme

$$R_i^\circ = R_i \setminus H_i \text{ et } P^\circ = \bigcap_i R_i^\circ,$$

nous obtenons que

$$P^\bullet = \bigcup_i \left( R_i^\bullet \cap \left( \bigcap_{j \neq i} R_j \right) \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P^\bullet &= \bigcup_i (H_i \cap P) \\ &= \bigcup_i F_i(P). \end{aligned}$$

Enfin, comme les  $H_i$  sont distincts, le point (3) montre que les faces sont bien déterminées par  $P$  en tant que parties de  $\mathcal{A}$  et donc les  $R_i$  sont bien déterminés. □

La proposition suivante nous apprend que toute face propre d'un polyèdre convexe est incluse dans une facette de cet ensemble.

**Proposition 3.10.4.** Soit  $F$  une face propre d'un ensemble polyédrique  $P$  de  $\mathcal{A}$ . Alors, il existe une facette  $G$  de  $P$  contenant  $F$ .

*Démonstration.* Nous pouvons supposer que  $P$  est de dimension  $n$  et que

$$P = \bigcap_{i=1}^n R_i$$

soit une écriture minimale. Soit  $X \in \text{ri}(F)$ . Par le théorème 3.10.1, nous savons qu'il existe  $i$  tel que

$$X \in H_i \cap P$$

et nous savons également que

$$H_i \cap P$$

est une facette contenant  $X$ . Par la proposition 3.9.4,  $F$  est la plus petite face contenant  $X$ . Il suffit alors de prendre

$$G = H_i \cap P$$

pour conclure. □

Nous pouvons nous demander si toute face d'un ensemble polyédrique est un ensemble polyédrique.

**Corollaire 3.10.3.** *Soit  $P$  un ensemble polyédrique de  $\mathcal{A}$ . Alors, chaque face de  $P$  est également un ensemble polyédrique.*

*Démonstration.* Puisque  $P$  est un ensemble polyédrique, il nous suffit de prouver le résultat pour les faces propres de  $P$ . Par la proposition 3.10.4, nous savons que chaque face propre de  $P$  est une face d'une facette de  $P$ . Or, les facettes de  $P$  sont des ensembles polyédriques. D'où la conclusion. □

**Corollaire 3.10.4.** *Soit  $P$  un ensemble polyédrique de  $\mathcal{A}$ . Alors, le nombre de faces de  $P$  est fini.*

*Démonstration.* Le nombre de facettes d'un ensemble polyédrique  $P$  est fini par la proposition 3.10.1. Chaque face propre de  $P$  est une face d'une facette de  $P$  par la proposition 3.10.4. D'où la conclusion par induction sur la dimension. □

**Corollaire 3.10.5.** *Soit  $P$  un ensemble polyédrique de dimension  $n$  de  $\mathcal{A}$ . Soient  $F_j$  et  $F_k$  deux faces de  $P$  telles que*

$$F_j \subset F_k, \dim(F_j) = j \text{ et } \dim(F_k) = k,$$

où  $0 \leq j < j+1 \leq k-1 < k \leq n$ . Alors, il existe des faces  $F_{j+1}, \dots, F_{k-1}$  de  $P$  telles que

$$F_j \subset F_{j+1} \subset \dots \subset F_{k-1} \subset F_k$$

et

$$\dim(F_i) = i \quad \forall i \in \{j+1, \dots, k-1\}.$$

*Démonstration.* Par la proposition 3.9.2, nous savons que  $F_j$  est une face propre de  $F_k$ . De plus, par le corollaire 3.10.3,  $F_k$  est un ensemble polyédrique. La proposition 3.10.4 assure alors l'existence d'une facette  $F_{k-1}$  de  $F_k$  telle que

$$F_j \subset F_{k-1}.$$

Si  $j = k-2$ , nous obtenons la conclusion désirée. Si  $j < k-2$ , il suffit de considérer  $F_{k-1}$  au lieu de  $F_k$  dans le raisonnement du début de preuve. En continuant de la sorte, nous obtenons les faces  $F_i$  avec les propriétés voulues. □

**Corollaire 3.10.6.** *Soit  $P$  un ensemble polyédrique de  $\mathcal{A}$  non vide et borné. Alors  $P$  est un polytope.*

*Démonstration.* Par hypothèse,  $P$  est un ensemble convexe et compact de  $\mathcal{A}$ . Par le corollaire 3.10.4,  $\text{Extrem}(P)$  est un ensemble fini. □

**Proposition 3.10.5.** *Soit  $P$  un polytope de  $\mathcal{A}$ , et soit  $A$  un sous-espace affine de  $\mathcal{A}$  tel que  $P \cap A \neq \emptyset$ . Alors,  $P \cap A$  est également un polytope.*

*Démonstration.* Nous savons que n'importe quel sous-espace affine de  $\mathcal{A}$  est un ensemble polyédrique. Comme toute intersection de polytopes d'intersection non vide est un polytope, la conclusion en découle. □

**Théorème 3.10.2.** *Soit  $P$  un  $n$ -polytope de  $\mathcal{A}$  et soit  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{A}$  tel que*

$$H \cap P^\circ \neq \emptyset.$$

Alors,

- (1) *l'ensemble  $P' = H \cap P$  est un  $(n - 1)$ -polytope.*
- (2) *Soit  $F$  une face de  $P$ . Alors,  $F' = H \cap F$  est une face de  $P'$ , et  $\dim(F') \leq \dim(F)$ . Si  $F \neq \emptyset$  et si  $H$  n'est pas un hyperplan d'appui de  $F$ , alors  $\dim(F') = \dim(F) - 1$ .*
- (3) *Soit  $F'$  une face de  $P'$ . Alors, il existe au moins une face  $F$  de  $P$  telle que  $F' = H \cap F$ , et pour un tel  $F$ , on a  $\dim(F) \geq \dim(F')$ .*
- (4) *Soit  $F'$  une face de  $P'$ . Si  $F'$  n'est pas une face de  $P$ , alors il existe une unique face  $F$  de  $P$  telle que  $F' = H \cap F$ , et pour cette face  $F$ , on a  $\dim(F) = \dim(F') + 1$ .*

*Démonstration.*

- (1) L'ensemble  $P'$  est un polytope par la proposition 3.10.5. Clairement, la dimension de  $P'$  est  $n - 1$ .
- (2) Il suit directement de la définition d'une face que  $F'$  est une face de  $P'$  et on a

$$\dim(F') \leq \dim(F).$$

Si  $F \neq \emptyset$  et si  $H$  n'est pas un hyperplan d'appui de  $F$ , alors nous savons que

$$F \not\subseteq H \text{ et } H \cap \text{ri}(F) \neq \emptyset$$

par la proposition 3.7.4. Or,  $H \cap \rangle F \langle_a$  est un hyperplan dans  $\rangle F \langle_a$  intersectant l'intérieur de  $F$  dans  $\rangle F \langle_a$ . Donc,

$$\dim(H \cap F) = \dim(F) - 1.$$

- (3) Pour  $F' = \emptyset$ , le résultat est évident. Nous pouvons donc supposer que  $F' \neq \emptyset$ . Remarquons que si  $F$  est une face de  $P$  telle que  $F' = H \cap F$ , alors

$$\dim(F) \geq \dim(F').$$

Prouvons l'existence d'une telle face. Soit  $X_0 \in \text{ri}(F')$  et désignons par  $F_0$  la plus petite face de  $P$  contenant  $X_0$ . Alors,  $X_0 \in \text{ri}(F_0)$  par la proposition 3.9.4. Il nous reste à montrer que

$$F' = H \cap F_0.$$

Procédons par double inclusion. Soit  $Y \in F'$  avec  $Y \neq X_0$ . Alors, il existe  $Z \in F'$  tel que  $X_0 \in ]Y, Z[$  par la proposition 3.4.3. Puisque  $F_0$  est une face de  $P$  contenant  $X_0$ , on a  $Y \in F_0$ . Comme  $F' \subset H$ , nous venons de prouver que

$$F' \subset H \cap F_0.$$

Il nous reste à montrer la seconde inclusion. Soit  $Y \in H \cap F_0$  avec  $Y \neq X_0$ . Par la proposition 3.4.3, nous savons qu'il existe  $Z \in F_0$  tel que  $X_0 \in ]Y, Z[$ . Puisque  $X_0$  et  $Y$  sont dans  $H$ , il s'ensuit que  $Z$  se trouve également dans  $H$  et donc  $Y, Z \in F'$ . Étant donné que  $F'$  est une face de  $P'$  contenant  $X_0$ , on obtient que  $Y \in F'$ . Ainsi,

$$F' \supset H \cap F_0.$$

- (4) Pour  $F' = \emptyset$ , il n'y a rien à prouver. Supposons donc que  $F' \neq \emptyset$ . Nous nous référons à la preuve de (3). Soit  $F$  une face de  $P$  telle que

$$F' = H \cap F.$$

Alors,  $X_0$  doit appartenir à  $F$ . Donc,  $F_0 \in F$  par la définition de  $F_0$ . Le corollaire 3.9.2 montre que si  $F_0 \not\subset F$ , alors  $\dim(F_0) < \dim(F)$ . Pour achever la démonstration, il nous reste à montrer que

$$\dim(F_0) = \dim(F) = \dim(F') + 1.$$

Soit  $G$  une face de  $P$  telle que

$$F' = H \cap G.$$

Puisque  $F'$  n'est pas une face de  $P$  par hypothèse, le point (2) appliqué à  $G$ , nous informe que

$$\dim(G) = \dim(F') + 1.$$

Étant que cela s'applique à la fois pour  $G = F_0$  et pour  $G = F$ , on a la conclusion. □

Nous pouvons nous demander si les 0-faces sont les sommets du polyèdre au sens de la définition 3.8.1. C'est en effet le cas comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 3.10.6.** *Soit  $P$  un polyèdre convexe non vide d'intérieur non vide et soit  $X \in P^\bullet$ . Alors,*

- (1) *l'intersection des hyperplans des faces qui contiennent  $X$  coïncide avec l'intersection des hyperplans d'appui de  $P$  en  $X$ . En particulier, les points d'ordre  $\alpha$  de  $P$  sont les points intérieurs-relatifs des  $\alpha$ -faces de  $P$ ; ainsi les sommets de  $P$  coïncident avec les 0-faces;*
- (2) *les sommets de  $P$  coïncident avec les points extrémaux de  $P$ .*

*Démonstration.*

- (1) Si  $H$  est un hyperplan d'appui de  $P$ , alors l'un des demi-espaces que définit  $H$ , appelons-le  $R$ , est tel que

$$P = P \cap R,$$

donc le théorème 3.10.1 montre que si  $H$  n'est pas l'un des  $H_i$ , il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

- (2) Procédons par contraposition. Si  $X \in P^\bullet$  n'est pas extrémal, alors la définition 3.8.2 implique qu'il existe un segment  $[Y, Z] \subset P^\bullet$  avec  $X \in ]Y, Z[$ . Par conséquent, l'ordre de  $X$  est strictement positif et  $X$  n'est donc pas un sommet.



□

**Corollaire 3.10.7.** Soient  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien de dimension  $n$  et soit  $P$  un polytope d'intérieur non vide et  $O$  un point de  $P^\circ$ , par rapport auquel on va effectuer une polarité. Alors les  $k$ -faces de  $P$  sont en bijection avec les  $(n - k - 1)$ -faces du polytope dual  $P^*$ , de la manière suivante : si  $Y$  est le sous-espace affine de dimension  $k$  déterminant la face considérée, le sous-espace  $Y^*$  déterminant la face correspondante de  $P^*$  est l'intersection des hyperplans polaires des points de  $Y$ .

*Démonstration.* Ce corollaire résulte directement de la proposition 3.10.6 et de la proposition 3.7.2.

□

**Proposition 3.10.7.** Soit  $P$  un sous-ensemble non vide de  $\mathcal{A}$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $P$  est un polytope ;
- (2)  $P$  est un ensemble convexe compact avec un nombre fini de points extrémaux.

*Démonstration.*

- (1)  $\Rightarrow$  (2). Nous savons que  $P$  est compact et que

$$P = \mathcal{E}(X_1, \dots, X_n).$$

Par le théorème 3.9.1, on sait que

$$P \subset \{X_1, \dots, X_n\}$$

ce qui montre l'ensemble des points extrémaux de  $P$  est fini.

- (2)  $\Rightarrow$  (1). C'est immédiat vu le théorème 3.9.1.

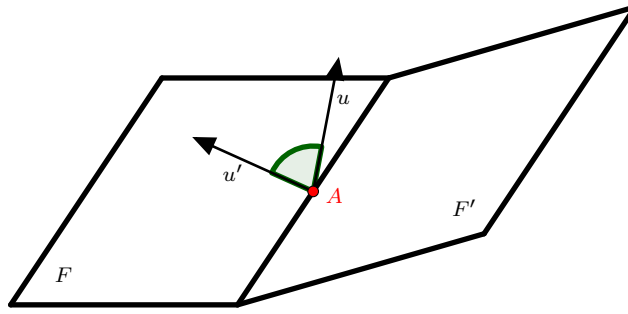
□

## 3.11 Angles dièdres d'un polytope

Comme par toute  $(n - 2)$ -face  $A$  d'un polytope  $P$  de dimension  $n$  passent exactement deux facettes, appelons-les  $F$  et  $F'$ , le corollaire 3.10.7 nous apprend que par dualité, ceci revient à chercher les sommets d'une arête, qui, étant un segment, contient bien deux sommets exactement.

Les hyperplans de  $F$  et  $F'$  déterminent respectivement deux vecteurs unitaires  $u$  et  $u'$  de  $\vec{\mathcal{A}}$ , bien définis par la condition que  $u$  soit orthogonal à  $F$  et du même côté de  $F$  que  $F'$ , et de même pour  $u'$ .

**Définition 3.11.1.** On appelle angle dièdre (ou angle si  $n = 2$ ) de  $P$  en la  $(n - 2)$ -face  $A$ , l'angle appartenant à  $]0, \pi[$  entre les vecteurs  $u$  et  $u'$ . On note  $\delta_A(P)$  l'angle dièdre en l'arête  $A$  d'un polytope  $P$ .

FIGURE 3.8 – L'angle dièdre entre les faces  $F$  et  $F'$ , représenté en vert.

**Proposition 3.11.1.** *Les sommets d'un polytope  $P$  de  $\mathcal{A}$  sont en nombre fini,  $P$  en est l'enveloppe convexe. Réciproquement, l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est un polyèdre convexe compact.*

*Démonstration.* Par le théorème 3.10.1, nous savons que le nombre de faces de  $P$  est fini. Il vient que toutes les  $k$ -faces ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ) sont en nombre fini. C'est donc en particulier le cas pour les 0-faces qui sont les sommets de  $P$ . Ensuite, le point (2) de la proposition 3.10.6 nous apprend que les sommets de  $P$  coïncident avec les points extrémaux de  $P$ . On conclut alors que  $P$  est l'enveloppe convexe de ses sommets par le théorème 3.8.1.

Il nous reste à montrer la réciproque. Par la proposition 3.3.2, on peut supposer que l'enveloppe convexe  $P$  est d'intérieur non vide en se plaçant si nécessaire dans le sous-espace affine qu'elle engendre. Par la proposition 3.10.3, on sait que  $P^*$  est un polytope. Vu la première partie de la proposition, on peut affirmer que  $P^*$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. En appliquant à nouveau la proposition 3.10.3, on obtient que

$$P^{**} = P$$

est un polytope ; d'où la conclusion. □

**Corollaire 3.11.1.** *Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  deux espaces affines réels de dimension finie  $n$ ,  $P$  un polytope de  $\mathcal{A}$  et soit  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  une application affine. Alors,  $f(P)$  est un polytope de  $\mathcal{A}'$ .*

*Démonstration.* Cela résulte directement des propositions 3.1.1 et 3.11.1. □

**Corollaire 3.11.2.** *Soient  $P$  et  $Q$  deux polytopes de  $\mathcal{A}$ . Alors, leur somme de Minkowski*

$$\lambda P + (1 - \lambda)Q$$

*est encore un polytope quel que soit le réel  $\lambda$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 3.11.1, on sait qu'il existe  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_m$  des points de  $\mathcal{A}$  tels que

$$P = \mathcal{E}(X_1, \dots, X_n) \text{ et } Q = \mathcal{E}(Y_1, \dots, Y_m).$$

Désignons respectivement par  $X$  l'ensemble fini de points  $(X_1, \dots, X_n)$  et par  $Y$  l'ensemble fini de points  $(Y_1, \dots, Y_m)$ . D'une part, on a

$$\lambda P + (1 - \lambda)Q \supset \mathcal{E}(\lambda X + (1 - \lambda)Y)$$

puisque

$$\lambda P + (1 - \lambda)Q$$

est un convexe par la proposition 3.1.4. D'autre part, nous avons

$$\lambda P + (1 - \lambda)Q \subset \mathcal{E}(\lambda X + (1 - \lambda)Y).$$

En effet, posons

$$U = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \quad \text{et} \quad V = \sum_{j=1}^m \mu_j Y_j$$

avec

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \sum_{j=1}^m \mu_j = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu_j \geq 0 \quad \forall i, j.$$

Alors,

$$\lambda U + \mu V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (\lambda X + (1 - \lambda)Y)$$

d'où la conclusion vu la proposition 3.2.1.

□

# Chapitre 4

## Le théorème de rigidité de Cauchy

En 1813, dans son *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, [7], Augustin-Louis Cauchy est le premier à fournir une preuve<sup>1</sup> du théorème de rigidité qui porte aujourd'hui son nom. Ce théorème permet d'établir le résultat de classification des polyèdres dits de Platon initié au premier chapitre.

Dans ce chapitre, nous allons énoncer et démontrer le théorème de rigidité de Cauchy. Pour ce faire, c'est l'objet de la première section, nous avons besoin de quelques résultats sur les polygones sphériques. La rédaction de ce chapitre s'est faite en consultant la référence [3].

### 4.1 Les polygones sphériques

Tout au long de cette section, nous restons dans un espace affine de dimension 3 euclidien et orienté, que l'on identifie à  $\mathbb{R}^3$  en fixant un repère orthonormé (positif) centré en un point  $O$  fixé dans la section. On identifie la sphère centrée à l'origine et de rayon 1 dans  $\mathcal{A}$  à la sphère standard de  $\mathbb{R}^3$ . On a

$$S = S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

où

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

**Définition 4.1.1.** *On appelle grand cercle la courbe obtenue par intersection de  $S$  avec le plan passant par deux points distincts non diamétralement opposés de  $S$  et son centre.*

**Définition 4.1.2. (Triangles sphériques)**

*Un triangle sphérique de  $S$  centré en  $O$ , est un triplet  $(X, Y, Z)$  de points de  $S$  qui sont tels que les vecteurs*

$$\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \text{ et } \overrightarrow{OZ}$$

*de  $\mathbb{R}^3$  sont linéairement indépendants. Cela revient à dire que les points  $X, Y$  et  $Z$  n'appartiennent pas à un même grand cercle.*

**Définition 4.1.3.** *Soit  $(X, Y, Z)$  un triangle sphérique de  $S$ . Les points  $X, Y, Z$  sont appelés les sommets de  $(X, Y, Z)$ . Par côtés de  $(X, Y, Z)$ , on entend les arcs de grands cercles déterminés<sup>2</sup> respectivement par*

$$(X, Y); (Y, Z) \text{ et } (Z, X).$$

---

1. Certains mathématiciens comme Henri Lebesgue (1875 – 1941) dans [19], Schoenberg et Zaremba dans [26] ou encore Aigner et Ziegler dans [1] améliorent la preuve apportée par Cauchy.

2. Bien sûr, il y en a deux, nous choisissons le plus petit des deux. Cela est univoque car les points ne sont pas diamétralement opposés.

On désigne par les réels

$$\begin{aligned} a &= |YZ| \\ b &= |ZX| \\ c &= |XY| \end{aligned}$$

la longueur des côtés (il s'agit de la mesure en radians des angles au centre qui déterminent les arcs de grands cercles). Les angles de  $(X, Y, Z)$  sont les angles non orientés appartenant à  $]0, \pi[$  donnés respectivement par

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos(\langle t_{XY}, t_{XZ} \rangle); \\ \beta &= \arccos(\langle t_{YZ}, t_{YX} \rangle); \\ \gamma &= \arccos(\langle t_{ZX}, t_{ZY} \rangle) \end{aligned}$$

où  $t_{AB}$  désigne le vecteur tangent unitaire à l'arc de courbe  $AB$  orienté de  $A$  vers  $B$  au point  $A$ .

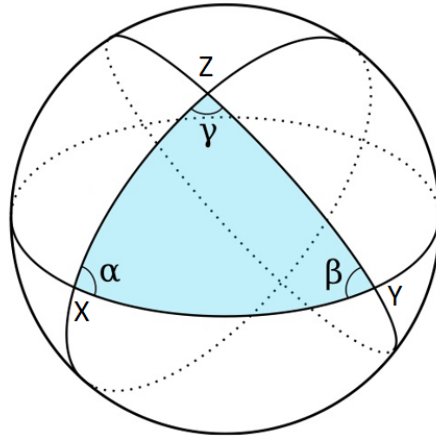


FIGURE 4.1 – Un des deux triangles sphériques déterminé par trois grands cercles.

Avant de nous intéresser à la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, intéressons-nous au lemme suivant.

**Lemme 4.1.1.** *Pour tout triangle sphérique  $(X, Y, Z)$  de  $S$ , on a*

$$\langle \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OY} \rangle = \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle \langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ} \rangle - \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ} \rangle \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle.$$

*Démonstration.* Les deux membres de l'égalité sont quadratiques en  $\overrightarrow{OX}$ . Il en résulte qu'elle est vraie quand  $\overrightarrow{OX}$  est nul, et que dans le cas contraire, il suffit de la démontrer quand  $\overrightarrow{OX}$  est normé, quitte à diviser les deux membres par sa norme. Si on ajoute un multiple de  $\overrightarrow{OX}$  à  $\overrightarrow{OY}$ , alors les deux membres restent inchangés, par les propriétés élémentaires du produit vectoriel et du produit scalaire. Nous pouvons donc supposer que  $\overrightarrow{OY}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{OX}$ . De même on peut supposer que  $\overrightarrow{OZ}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{OX}$ . Mais la multiplication par  $\overrightarrow{OX}$  préserve la norme des éléments du plan vectoriel orthogonal à  $\overrightarrow{OX}$ . Il s'agit alors d'une isométrie de ce plan et elle y préserve donc le produit scalaire, ce qu'il restait à démontrer.  $\square$

**Proposition 4.1.1.** (*Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique*)

Pour tout triangle sphérique  $(X, Y, Z)$  de  $S$ , avec les notations introduites précédemment, on a

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha).$$

*Démonstration.* Comme la sphère  $S$  est de rayon 1, nous savons que

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle &= 1; \\ \langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ} \rangle &= \cos(a); \\ \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ} \rangle &= \cos(b); \\ \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle &= \cos(c). \end{aligned}$$

Nous savons également que

$$\|\overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OY}\| = \sin(c) \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OZ}\| = \sin(b).$$

On peut montrer à partir de la définition que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OY} \rangle}{\|\overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OZ}\| \|\overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OY}\|}$$

et donc que

$$\sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) = \langle \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OY} \rangle.$$

Par le lemme 4.1.1, nous obtenons que

$$\sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) = \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle \langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ} \rangle - \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ} \rangle \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle.$$

Ainsi,

$$\sin(b) \sin(c) \cos(\alpha) = \cos(a) - \cos(b) \cos(c)$$

ce qui achève la démonstration. □

**Corollaire 4.1.1.** Pour tout triangle sphérique  $(X, Y, Z)$  de  $S$ , on a

$$|b - c| < a < b + c \quad \text{et} \quad a + b + c < 2\pi.$$

*Démonstration.* Par la proposition 4.1.1 et puisque

$$|\cos(\alpha)| < 1$$

car  $\alpha$  est différent de 0 et de  $\pi$  vu la définition 4.1.3. On a

$$\left| \frac{\cos(a) - \cos(b) \cos(c)}{\sin(b) \sin(c)} \right| < 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\cos(b + c) < \cos(a) < \cos(b - c).$$

Pour  $a, b, c \in ]0, \pi[$ , cela implique que

$$a < b + c < 2\pi - a \quad \text{et} \quad -a < b - c < a.$$

D'où,

$$a + b + c < 2\pi; \quad b < c + a \quad \text{et} \quad c < a + b.$$

Ainsi,

$$a + b + c < 2\pi \quad \text{et} \quad |b - c| < a. \quad \square$$

**Définition 4.1.4.** Soit  $(X, Y, Z)$  un triangle sphérique de  $S$ . On définit le point  $X' \in S$  comme étant le point de  $S$  qui satisfait

$$\langle \overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OY'} \rangle = \langle \overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OZ'} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OX} \rangle > 0.$$

On définit de manière analogue les points  $Y'$  et  $Z'$ . On dit que le triplet  $(X', Y', Z')$  est le triangle sphérique polaire de  $(X, Y, Z)$ . On le note  $(X, Y, Z)'$ .

Le point  $X'$  est donc l'unique point de la sphère  $S$  tel que la droite  $OX'$  soit orthogonale au plan  $OYZ$  et situé dans le même demi-espace que  $X$  par rapport à ce plan. La proposition suivante permet de vérifier que la définition est licite.

**Proposition 4.1.2. (Triangle sphérique polaire)**

Soit  $(X, Y, Z)$  un triangle sphérique de  $S$ . Le triplet  $(X', Y', Z')$  de la définition 4.1.4 est un triangle sphérique.

*Démonstration.* Procédons par l'absurde et supposons que les vecteurs  $\overrightarrow{OX'}$ ,  $\overrightarrow{OY'}$  et  $\overrightarrow{OZ'}$  soient linéairement dépendants. Un de ces trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres. Supposons sans perte de généralité que ce soit  $\overrightarrow{OZ'}$ . Dans ce cas, il existe des réels  $\lambda, \mu$  tels que

$$\overrightarrow{OZ'} = \lambda \overrightarrow{OX'} + \mu \overrightarrow{OY'}.$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OZ'}, \overrightarrow{OZ'} \rangle &= \langle \lambda \overrightarrow{OX'} + \mu \overrightarrow{OY'}, \overrightarrow{OZ'} \rangle \\ &= \lambda \langle \overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OZ'} \rangle + \mu \langle \overrightarrow{OY'}, \overrightarrow{OZ'} \rangle \\ &= 0; \end{aligned}$$

et cela contredit le fait que  $\langle \overrightarrow{OZ'}, \overrightarrow{OZ} \rangle > 0$ . □

**Proposition 4.1.3.** Pour n'importe quel triangle sphérique  $(X, Y, Z)$  de  $S$ , on a

$$((X, Y, Z)')' = (X, Y, Z).$$

Si l'on désigne les six éléments de  $(X, Y, Z)'$  par

$$a', b', c', \alpha', \beta' \quad \text{et} \quad \gamma'$$

alors on a

$$a + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma' = a' + \alpha = b' + \beta = c' + \gamma = \pi.$$

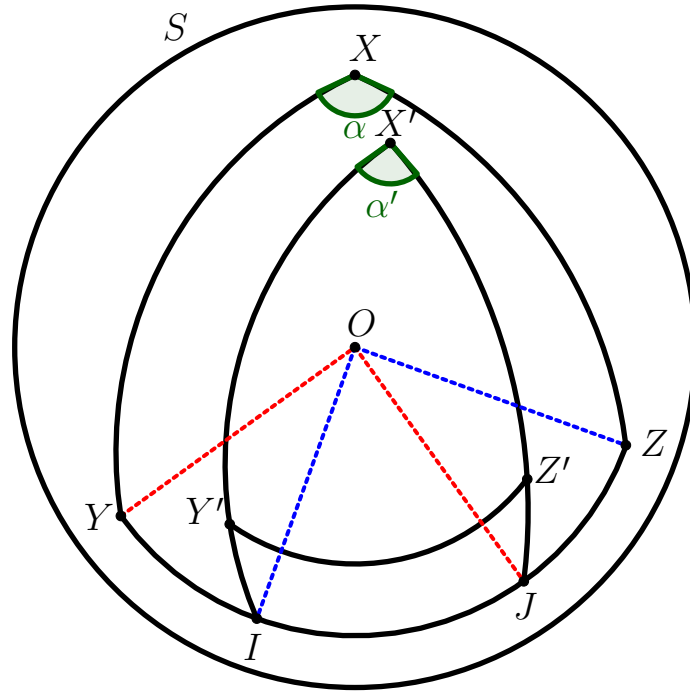
*Démonstration.* Il est clair que

$$((X, Y, Z)')' = (X, Y, Z)$$

par la définition 4.1.4. Pour montrer les différentes égalités, il nous suffit de montrer que

$$a + \alpha' = \pi.$$

Désignons par  $I$  (respectivement  $J$ ) un des deux points d'intersection du grand cercle passant par les points  $X'$  et  $Y'$  avec celui passant par les points  $Y$  et  $Z$  (respectivement le point d'intersection du grand cercle passant par les points  $X'$  et  $Z'$  avec celui passant par les points  $Y$  et  $Z$ ).



Par construction, le grand cercle passant par  $Y$  et  $Z$  est l'équateur relatif au pôle  $X'$ . Donc,

$$\alpha' = |IJ|$$

où  $|IJ|$  désigne la longueur du côté du triangle sphérique  $(X', I, J)$ . Or,

$$a + \alpha' = |YZ| + |IJ|$$

et

$$|YZ| + |IJ| = |YJ| + |IZ|.$$

De plus, comme  $X'$  est l'unique point de  $S$  tel que la droite  $OX'$  soit orthogonale au plan  $OYZ$  et situé dans le même demi-espace que  $X$  par rapport à ce plan, on obtient que

$$|YJ| = \frac{\pi}{2} \text{ et } |IZ| = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$a + \alpha' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

Avant de nous intéresser aux différents cas d'isométrie des triangles sphériques, démontrons le lemme suivant.

**Lemme 4.1.2.** *Si deux triangles sphériques  $(X, Y, Z)$  et  $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$  sont isométriques alors il en est de même pour leurs triangles polaires respectifs.*

*Démonstration.* Il existe une isométrie  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{A}$  telle que

$$\mathcal{T}(X) = \tilde{X}, \mathcal{T}(Y) = \tilde{Y} \text{ et } \mathcal{T}(Z) = \tilde{Z}.$$

Puisque le centre  $O$  de  $S$  est à une distance 1 de  $X, Y, Z$ , son image est à une distance 1 de  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ . C'est donc  $O$  ou son symétrique par rapport au plan déterminé par ces points. On peut donc se permettre à effectuer cette symétrie après  $\mathcal{T}$  supposer que  $\mathcal{T}$  fixe  $O$ . Pour montrer



que les triangles polaires sphériques  $(X', Y', Z')$  et  $(\tilde{X}', \tilde{Y}', \tilde{Z}')$  sont isométriques, nous allons montrer que

$$\mathcal{T}(X') = \tilde{X}', \mathcal{T}(Y') = \tilde{Y}' \text{ et } \mathcal{T}(Z') = \tilde{Z}'.$$

Faisons-le pour  $X'$ , les autres cas se traitent de la même manière. Par la définition 4.1.4, on sait que

$$\langle \overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OY'} \rangle = \langle \overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OZ'} \rangle = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OX'} \rangle > 0.$$

Comme

$$\mathcal{T}(X) = \tilde{X}, \mathcal{T}(Y) = \tilde{Y} \text{ et } \mathcal{T}(Z) = \tilde{Z},$$

nous obtenons que

$$\langle \overrightarrow{O\mathcal{T}(X')}, \overrightarrow{OY'} \rangle = \langle \overrightarrow{O\mathcal{T}(X')}, \overrightarrow{OZ'} \rangle = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{O\mathcal{T}(X')}, \overrightarrow{OX'} \rangle > 0.$$

Ainsi,

$$\mathcal{T}(X') = \tilde{X}',$$

d'où la conclusion. □

**Proposition 4.1.4. (Les cas d'isométrie des triangles sphériques)** Soient  $(X, Y, Z)$  et  $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$  deux triangles sphériques de  $S$  dont les éléments respectifs sont donnés par

$$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$$

et

$$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Il existe  $f \in \text{Is}(S)$  tel que  $f(X) = \tilde{X}$ ,  $f(Y) = \tilde{Y}$  et  $f(Z) = \tilde{Z}$  ;
- (2)  $a = \tilde{a}$ ,  $b = \tilde{b}$ ,  $c = \tilde{c}$  ;
- (3)  $\alpha = \tilde{\alpha}$ ,  $\beta = \tilde{\beta}$ ,  $\gamma = \tilde{\gamma}$  ;
- (4)  $a = \tilde{a}$ ,  $\beta = \tilde{\beta}$ ,  $\gamma = \tilde{\gamma}$  ;
- (5)  $\alpha = \tilde{\alpha}$ ,  $\beta = \tilde{\beta}$ ,  $\gamma = \tilde{\gamma}$ .

*Démonstration.* Il est clair que l'assertion (1) implique toutes les autres. Par passage aux triangles polaires respectifs des deux triangles, par le lemme 4.1.2, nous obtenons que

$$[(2) \Rightarrow (1)] \Leftrightarrow [(5) \Rightarrow (1)] \text{ et } [(3) \Rightarrow (1)] \Leftrightarrow [(4) \Rightarrow (1)].$$

Par la formule fondamentale, il est clair que

$$(2) \Leftrightarrow (3).$$

Donc, pour conclure, il nous reste donc à prouver que

$$(2) \Rightarrow (1).$$

Soient deux triangles qui satisfont (2). Il existe une seule application affine qui applique  $O$  sur  $O$  et les points  $A, B, C$  sur  $\tilde{A}, \tilde{B}$  et  $\tilde{C}$ . On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{F}(OA)} &= \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{\mathcal{F}(OB)} &= \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{\mathcal{F}(OC)} &= \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

Les vecteurs de la première base et les vecteurs de la seconde ont les mêmes produits scalaires par hypothèse. La linéarité de  $\vec{\mathcal{T}}$  suffit pour démontrer que  $\vec{\mathcal{T}}$  préserve les produits scalaires. Par conséquent,  $\mathcal{T}$  est une isométrie, d'où la conclusion.  $\square$

Intéressons-nous à présent aux polygones sphériques. Commençons par définir la notion d'hémisphère.

**Définition 4.1.5.** *Un hémisphère  $H$  est un sous-ensemble de  $S$  de la forme*

$$S \cap D$$

où  $D$  est un demi-espace fermé délimité par un plan passant par le centre de  $S$ .

**Définition 4.1.6.** *Un polygone convexe sphérique est un sous-ensemble  $P$  de  $S$  obtenu via intersection d'un nombre fini d'hémisphères et tel que*

$$P^\circ \neq \emptyset$$

et tel que  $P$  ne contient pas de points antipodaux.

L'intersection des demi-espaces est un polyèdre. Il présente donc des faces et des arêtes. L'intersection des faces avec  $S$  sont les côtés du polygone et les intersections des arêtes avec la sphère sont les sommets.

**Proposition 4.1.5.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux sommets d'un polygone sphérique  $P$  n'appartenant pas à un même côté. Soit  $\gamma$  l'arc de grand cercle reliant  $X$  à  $Y$ . Alors,  $\gamma$  est inclus dans  $P$  et*

$$P = P' \cup P''$$

où  $P'$  et  $P''$  sont deux polygones sphériques ayant  $\gamma$  comme côté commun. On a

$$P' \cap P'' = \gamma.$$

*Démonstration.* Si  $X$  et  $Y$  se trouvent tous les deux dans un hémisphère  $H$ , alors il en est de même de  $\gamma$  puisque  $Y$  et  $X$  ne sont pas antipodaux. Cela montre que  $\gamma \subset P$ . Les polygones sphériques  $P'$  et  $P''$  sont définis comme étant respectivement

$$P \cap H' \text{ et } P \cap H''$$

où  $H'$  et  $H''$  sont les deux hémisphères déterminés par  $\gamma$ .  $\square$

Nous allons à présent énoncer et démontrer plusieurs résultats qui interviendront directement dans la preuve du théorème de rigidité de Cauchy. Ces résultats sont dû à Cauchy, ils apparaissent pour la première fois dans [7].

Dans la suite, précisons que  $a_i = |X_i X_{i+1}|$  et  $\alpha_i = |\widehat{X_{i-1} X_i X_{i+1}}|$  avec les conventions habituelles.

Soient  $P$  et  $\bar{P}$  deux polygones sphériques dont les sommets sont respectivement donnés par  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  et  $(\bar{X}_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . On fixe une bijection entre les sommets de  $P$  et  $\bar{P}$  et on désigne par

$$a_i, \bar{a}_i \text{ et } \alpha_i, \bar{\alpha}_i$$

la longueur des côtés et les angles respectifs de  $P$  et  $\bar{P}$ .

**Proposition 4.1.6.** *Si  $a_i = \bar{a}_i \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i \forall i \in \{2, \dots, n-1\}$ , alors on a*

$$a_n \leq \bar{a}_n.$$

*Si de plus, il existe  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  tel que  $\alpha_i < \bar{\alpha}_i$ , alors on a*

$$a_n < \bar{a}_n.$$

**Lemme 4.1.3.** *La proposition 4.1.6 est vraie dans le cas  $n = 3$ .*

*Démonstration.* La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique nous apprend que

$$\cos(a_3) = \cos(a_1) \cos(a_2) + \sin(a_1) \sin(a_2) \cos(\alpha_2).$$

De même,

$$\cos(\bar{a}_3) = \cos(\bar{a}_1) \cos(\bar{a}_2) + \sin(\bar{a}_1) \sin(\bar{a}_2) \cos(\bar{\alpha}_2).$$

Vu nos hypothèses, on a

$$a_1 = \bar{a}_1, \quad a_2 = \bar{a}_2 \text{ et } \bar{\alpha}_2 \geq \alpha_2.$$

Dans ce cas, on a  $\cos(a_3) \leq \cos(\bar{a}_3)$  et donc  $\bar{a}_3 \geq a_3$ .

□

**Lemme 4.1.4.** *Soit un naturel  $n \geq 5$ . Si la proposition 4.1.6 est vraie pour toute paire de polygones à  $(n-1)$  côtés, alors elle est également vraie pour n'importe quelle paire  $(P, \bar{P})$  de polygones à  $n$  côtés pour laquelle il existe  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  avec  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ .*

*Démonstration.* Appliquons la proposition 4.1.5 aux arcs de grands cercles  $\gamma_i$  et  $\bar{\gamma}_i$  dont les extrémités respectives sont données par  $X_{i-1}, X_{i+1}$  et  $\bar{X}_{i-1}, \bar{X}_{i+1}$ . Nous obtenons alors deux polygones à  $(n-1)$  côtés

$$P' \text{ et } \bar{P}'$$

et deux triangles

$$X_{i-1}X_iX_{i+1} \text{ et } \bar{X}_{i-1}\bar{X}_i\bar{X}_{i+1}.$$

Par le point (3) de la proposition 4.1.4, ces deux triangles sont isométriques. En particulier,

$$|X_{i-1}X_{i+1}| = |\bar{X}_{i-1}\bar{X}_{i+1}|$$

sont égaux. Nous obtenons que les polygones  $P'$  et  $\bar{P}'$  ont pour angle

$$\alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \bar{\alpha}'_{i-1} \text{ et } \bar{\alpha}'_{i+1}$$

en les sommets

$$X_{i-1}, X_{i+1}, \bar{X}_{i-1} \text{ et } \bar{X}_{i+1}$$

qui satisfont

$$\alpha'_{i-1} \leq \bar{\alpha}'_{i-1} \text{ et } \alpha'_{i+1} \leq \bar{\alpha}'_{i+1}$$

pour tout  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ . On conclut par l'hypothèse de récurrence.

□

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 4.1.6.

*Démonstration.* Nous allons augmenter l'angle  $\alpha_{n-1}$  de  $P$  en  $X_{n-1}$  jusqu'à ce qu'il égale  $\bar{\alpha}_{n-1}$  tout en maintenant constant la longueur des côtés  $a_1, \dots, a_{n-1}$ . On obtient alors un nouveau polygone  $P'$  dont les sommets sont donnés par

$$X_1, \dots, X_{n-1}, X'_n$$

et dont les côtés ont pour longueur

$$a_1, \dots, a_{n-1}, a'_n = |X'_n X_1|.$$

De plus, les angles en les sommets

$$X_2, \dots, X_{n-1}$$

valent

$$\alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \bar{\alpha}_{n-1}.$$

Il n'y a aucune raison qui nous permettrait d'affirmer que  $P'$  est un polygone convexe. Nous allons donc distinguer deux cas : le cas où  $P'$  est convexe et le cas où il ne l'est pas.

(1)  $P'$  est convexe.

Par la proposition 4.1.5, nous pouvons appliquer le lemme 4.1.3 aux deux triangles

$$(X_1, X_{n-1}, X_n) \text{ et } (X_1, X_{n-1}, X'_n),$$

on obtient alors que

$$a_n = |X_1 X_n| \leq |X_1 X'_n|$$

et

$$|X_1 X_n| < |X_1 X'_n| \text{ si } \alpha_{n-1} < \bar{\alpha}_{n-1}.$$

Nous pouvons alors appliquer l'hypothèse de récurrence et le lemme 4.1.4 aux polygones  $P'$  et  $\bar{P}$  qui ont le même angle en  $X_{n-1}$  et  $\bar{X}_{n-1}$  par construction. Ainsi, nous obtenons que

$$|X_1 X'_n| \leq |\bar{X}_1 \bar{X}_n| = \bar{a}_n$$

d'où la conclusion du premier cas.

(2)  $P'$  n'est pas convexe.

Dans ce cas, comme on augmente  $\alpha_{n-1}$  par rotation de  $X_{n-1}X_n$  autour de  $X_{n-1}$ , il existe une plus petite mesure  $\alpha'_{n-1}$  pour laquelle  $P'$  cesse d'être convexe. Cette valeur se trouve entre  $\alpha_{n-1}$  et  $\bar{\alpha}_{n-1}$ . Soit  $X'_n$  le point alors obtenu. Par construction,  $X'_n$  appartient au grand cercle déterminé par  $(X_1, X_2)$ . On a

$$|X_1 X'_n| = |X_2 X'_n| - |X_1 X_2|.$$

En appliquant le corollaire 4.1.1 et la proposition 4.1.5, on trouve

$$\bar{a}_n = |\bar{X}_1 \bar{X}_n| \geq |\bar{X}_2 \bar{X}_n| - |\bar{X}_1 \bar{X}_2| = |X_2 X'_n| - |X_1 X_2|. \quad (4.1)$$

À présent, en appliquant l'hypothèse de récurrence et la proposition 4.1.5 aux polygones convexes

$$(X_2, \dots, X_{n-1}, X'_n) \text{ et } (\bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n),$$

nous obtenons que

$$|\bar{X}_2 \bar{X}_n| \geq |X_2 X'_n|. \quad (4.2)$$

Ainsi, par la proposition 4.1.5, on applique le lemme 4.1.3 aux triangles

$$(X_1, X_n, X_{n-1}) \text{ et } (X_1, X'_n, X_{n-1})$$

et il vient

$$|X_1 X'_n| > |X_1 X_n|. \quad (4.3)$$

Finalement, vu (4.1), (4.2) et (4.3), on a

$$\bar{a}_n \geq |\overline{X_2 X_n}| - |X_1 X_2| \geq |X_2 X'_n| - |X_1 X_2| \geq |X_1 X'_n| > |X_1 X_n| = a_n.$$

Cela achève la démonstration. □

**Définition 4.1.7.** *Étant donnés deux polygones  $P$  et  $\overline{P}$ , et ayant fixé une bijection adéquate entre les sommets, on définit pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la fonction signe par*

$$\text{sgn}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i > \bar{\alpha}_i \\ 0 & \text{si } \alpha_i = \bar{\alpha}_i \\ -1 & \text{si } \alpha_i < \bar{\alpha}_i \end{cases}$$

On définit le nombre de changements de signes stricts de  $(P, \overline{P})$  comme étant le nombre d'indices  $i$  satisfaisant

$$\text{sgn}(i) \text{sgn}(i+1) = -1$$

où l'on prend la convention que  $\text{sgn}(n+1) = \text{sgn}(1)$ .

**Théorème 4.1.1. (Lemme de Cauchy)**

*Soient  $P$  et  $\overline{P}$  deux polygones sphériques. Si  $P$  et  $\overline{P}$  sont tels que*

$$a_i = \bar{a}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

*alors, soit*

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i,$$

*soit le nombre de changements de signes stricts vaut au moins 4.*

*Démonstration.* Étant donné qu'il ne peut y avoir qu'un nombre pair<sup>3</sup> de changements de signes stricts, il nous suffit de prouver que ce nombre n'est pas 2. Procédons par l'absurde en supposant que c'est la cas. Dès lors, il existe des indices non-consécutifs  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tels que

$$\alpha_k \geq \bar{\alpha}_k \text{ pour } k \in \{i+1, \dots, j-1\}$$

et

$$\alpha_h \leq \bar{\alpha}_h \text{ pour } h \in \{j+1, \dots, n\} \cup \{1, \dots, i-1\},$$

l'inégalité devient stricte pour au moins un  $k$  et un  $h$ . Considérons les arcs de grands cercles  $\gamma$  et  $\bar{\gamma}$  reliant respectivement  $X_i$  à  $X_j$  et  $\overline{X}_i$  à  $\overline{X}_j$ . Par la proposition 4.1.5, ils divisent respectivement  $P$  et  $\overline{P}$  en polygones  $P', P''$  et  $\overline{P}', \overline{P}''$ . En appliquant la proposition 4.1.6 à  $(P', \overline{P}')$  et  $(P'', \overline{P}'')$ , nous obtenons la contradiction suivante :

$$|X_i X_j| > |\overline{X}_i \overline{X}_j| \text{ et } |X_i X_j| < |\overline{X}_i \overline{X}_j|.$$

□

---

3. Il nous semble que la preuve ne fonctionne que si  $\text{sgn}(i) \neq 0$  pour tout  $i$ .

## 4.2 Le théorème de rigidité

Commençons par énoncer le théorème. Il s'agit d'une formulation moderne, le lecteur intéressé peut consulter la formulation originale de Cauchy dans [7].

### **Théorème 4.2.1. (Théorème de rigidité de Cauchy)**

Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine euclidien de dimension 3. Soient  $P$  et  $P'$  deux polytopes convexes de  $\mathcal{A}$  et soit

$$f : P^\bullet \rightarrow P'^\bullet$$

une bijection respectant les sommets, les arêtes et les faces. Supposons que quelle que soit la face  $F$  de  $P$ , la restriction

$$f|_F : F \rightarrow f(F)$$

soit une isométrie. Alors, il existe une isométrie  $\bar{f}$  de  $\mathcal{A}$  telle que

$$\bar{f}(P) = P' \quad \text{et} \quad \bar{f}|_{P^\bullet} = f.$$

En particulier,  $P$  et  $P'$  sont isométriques.

Le lemme suivant nous apprend que si on ajoute aux hypothèses du théorème de rigidité de Cauchy, le fait que la bijection  $f$  conserve les angles dièdres, alors le théorème est vérifié.

**Lemme 4.2.1.** *Si la bijection  $f$  du théorème 4.2.1 conserve en outre les angles dièdres (cela signifie que  $\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P')$  quelle que soit l'arête  $A$  de  $P$ ), alors elle se prolonge en une isométrie  $\bar{f}$  de l'espace telle que  $\bar{f}(P) = P'$ .*

*Démonstration.* Soit  $F$  une face de  $P$ . Puisque  $F$  et  $f(F)$  sont isométriques, il existe une isométrie  $I$  de l'espace qui applique  $F$  sur  $f(F)$ . Quitte à remplacer le polytope  $P$  par son image  $I(P)$ , on peut supposer que  $F = f(F)$ . Si  $P$  et  $P'$  sont situés dans des demi-espaces différents déterminés par  $F$ , on peut remplacer  $P$  par son symétrique par rapport au plan de la face  $F$ , et on suppose finalement que  $F$  coïncide avec  $f(F)$  et qu'ils sont situés dans le même demi-espace défini par cette face.

Soit  $A$  une arête de  $P$  et soient  $G$  et  $G'$  les faces de  $P$  et  $P'$  adjacentes à  $F$  en  $A$ . Par hypothèse, nous savons que

$$\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P') = \delta_A(P').$$

Puisque  $f$  préserve l'adjacence, nous savons que  $f(G) = G'$ . Puisque  $f|_G$  est une isométrie,  $G$  et  $G'$  sont isométriques. De plus,  $G$  et  $G'$  se trouvent sur un même côté de  $F$  car  $P$  et  $P'$  sont dans un même demi-espace déterminé par  $F$ . On arrive alors à la conclusion que

$$G = G'.$$

En continuant de proche en proche, la démonstration s'achève. □

Avant de démontrer le théorème de rigidité de Cauchy, il convient d'introduire les notations suivantes. Pour un polytope  $P$ , on désigne par

- $E$ , l'ensemble des arêtes de  $P$  ;
- $\alpha$ , le nombre d'éléments de  $E$  ;
- $\sigma_i$ , le nombre de sommets de  $P$  appartenant à  $i$  faces ;
- $\sigma$ , le nombre de sommets de  $P$  ;
- $\varphi_i$ , le nombre de faces de  $P$  qui ont  $i$  côtés ;

- $\varphi$ , le nombre de faces de  $P$ .

D'après la définition 3.11.1, les  $i$  à considérer sont supérieurs ou égaux à 3 et on a les égalités suivantes :

$$\sigma = \sum_i \sigma_i, \varphi = \sum_i \varphi_i \text{ et } 2\alpha = \sum_i i\sigma_i = \sum_i i\varphi_i.$$

Rappelons qu'avec ces notations, la relation d'Euler, donnée par le théorème 7.3.1, est

$$\sigma - \alpha + \varphi = 2.$$

À présent, nous avons tout en main pour démontrer le théorème de rigidité de Cauchy.

*Démonstration.* Soit

$$\varepsilon : E \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

l'application définie par

$$\begin{cases} \varepsilon(A) = -1 & \text{si } \delta_A(P) < \delta_{f(A)}(P') \\ \varepsilon(A) = 0 & \text{si } \delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P') \\ \varepsilon(A) = 1 & \text{si } \delta_A(P) > \delta_{f(A)}(P') \end{cases}$$

Rappelons que deux arêtes  $A, B$  de  $P$  sont adjacentes si  $A \cap B$  est un sommet de  $P$  et si  $A, B$  appartiennent à une même face. Nous allons considérer deux cas, le cas où les  $\varepsilon(A)$  sont non nuls et le cas où ils sont quelconques.

- (1)  $\varepsilon(A) \neq 0 \forall A \in E$ .

On dit que la paire  $\{A, B\}$  d'arêtes adjacentes présente un changement de signes strict si

$$\varepsilon(A)\varepsilon(B) = -1.$$

Soit  $\nu$  le nombre total de paires présentant un changement de signes strict. Par hypothèse, nous savons qu'il y a une bijection entre les sommets  $X$  de  $P$  et les sommets  $X'$  de  $P'$ . Centrons en  $X$  une sphère dont le rayon est suffisamment petit (on peut par exemple prendre un rayon égal à la moitié du minimum des longueurs des arêtes qui forment le sommet  $X$ ). Dès lors, les plans qui contiennent les différentes faces qui ont  $X$  pour sommet, intersectent la sphère et délimitent sur celle-ci un polygone sphérique que l'on note  $\mathcal{P}$ . On procède de même avec le sommet  $X'$  de  $P'$  qui correspond à  $X$  pour obtenir le polygone sphérique  $\mathcal{P}'$ . Quitte à opérer une homothétie, nous pouvons supposer que les deux sphères considérées pour obtenir les polygones  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont unitaires. Par hypothèse, il existe une bijection

$$b : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$$

qui préserve la longueur des côtés. Par le théorème 4.1.1, lorsque l'on compte pour les paires d'arêtes adjacentes d'intersection  $X$ , le nombre de changements de signes, on obtient qu'il vaut au moins 4. Donc, comme il y a  $\sigma$  sommets, on a

$$\nu \geq 4\sigma.$$

Comptons à présent les changements de signes stricts des paires d'arêtes adjacentes d'une face à  $i$  sommets où  $i$  est un naturel supérieur ou égal à 3.

- Dans le cas où  $i = 3$ , il y a au plus 2 changements de signes stricts. En effet, notons

$$\{A, B\}; \{B, C\} \text{ et } \{A, C\}$$

les trois paires d'arêtes adjacentes de cette face à 3 sommets. On sait par hypothèse que

$$\varepsilon(A) \neq 0; \varepsilon(B) \neq 0 \text{ et } \varepsilon(C) \neq 0.$$

Dès lors, si les paires

$$\{A, B\} \text{ et } \{B, C\}$$

présentent un changement de signes strict, alors nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$\varepsilon(A) = -1 \text{ et } \varepsilon(B) = 1.$$

Par conséquent,

$$\varepsilon(B) = 1 \text{ et } \varepsilon(C) = -1$$

et donc la paire  $\{A, C\}$  ne présente pas un changement de signes strict puisque

$$\varepsilon(A)\varepsilon(C) = 1.$$

- Plus généralement, le nombre de changements de signes stricts d'une face à  $i$  sommets où  $i$  est un naturel supérieur ou égal à 3 vaut au plus

$$\begin{cases} i-1 & \text{si } i \text{ est impair} \\ i & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\nu \leq 2\varphi_3 + 4\varphi_4 + 4\varphi_5 + 6\varphi_6 + 6\varphi_7 + \dots$$

On sait que

$$2\alpha = \sum_i i\varphi_i = 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + 6\varphi_6 + 7\varphi_7 + \dots$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 4\alpha - 4\varphi &= 6\varphi_3 + 8\varphi_4 + 10\varphi_5 + 12\varphi_6 + 14\varphi_7 - 4(\varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \dots) \\ &= 2\varphi_3 + 4\varphi_4 + 6\varphi_5 + 8\varphi_6 + 10\varphi_7 + \dots \\ &\geq \nu \geq 4\sigma. \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned} 4\alpha - 4\varphi &\geq 4\sigma \\ \Leftrightarrow \alpha - \varphi &\geq \sigma \\ \Leftrightarrow \sigma - \alpha + \varphi &\leq 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit la relation d'Euler.

- (2) Les  $\varepsilon(A)$  sont quelconques.

Appelons *arêtes fantômes* de  $P$ , les  $A \in E$  tels que

$$\varepsilon(A) = 0.$$

Appelons *néoarêtes* de  $P$ , les  $A \in E$  tels que

$$\varepsilon(A) \neq 0.$$



Notons  $E'$  l'ensemble des néoarêtes et désignons par  $\alpha'$  le nombre de néoarêtes dans  $E'$ . De  $P^\bullet$ , nous allons ôter les néoarêtes de  $E'$ . On obtient alors l'espace topologique

$$U = P^\bullet \setminus \bigcup_{A \in E'} A.$$

On appelle *néofaces* de  $P$  les fermetures des composantes connexes de  $U$ . On désigne par  $\Phi'$  leur ensemble et par  $\varphi'$  le nombre de néofaces dans  $\Phi'$ . Enfin, on appelle *néosommets* de  $P$ , les sommets de  $P$  appartenant à au moins une néoarête. Soit  $\Sigma'$  leur ensemble et soit  $\sigma'$  le nombre d'éléments dans  $\Sigma'$ . Le théorème 4.1.1 entraîne, en particulier, que tout néosommet appartient à au moins deux arêtes. Cela signifie qu'il n'y a pas de néoarêtes à extrémités libres.

Montrons que l'on a toujours

$$\sigma' - \alpha' + \varphi' \geq 2.$$

Pour ce faire, nous allons rétablir une à une les arêtes fantômes. Cela fournit pour

$$t = 1, \dots, \alpha - \alpha'$$

des nombres  $\sigma_t$ ,  $\alpha_t$  et  $\varphi_t$  intermédiaires entre

$$\sigma, \alpha, \varphi \text{ et } \sigma', \alpha', \varphi'.$$

En outre, à chaque étape  $t$ , on accroche l'arête fantôme nouvelle à un néosommet où à un sommet déjà rétabli<sup>4</sup>. À chaque étape  $t$ , puisque l'on rétabli une arête, on a toujours

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t + 1.$$

Ensuite, deux cas sont à envisager

(1)  $\sigma_{t+1} = \sigma_t$  qui implique que

- $\varphi_{t+1} = \varphi_t$ , ou
- $\varphi_{t+1} = \varphi_t + 1$

(2)  $\sigma_{t+1} = \sigma_t + 1$  qui implique que

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t.$$

Dans tous les cas, la fonction

$$t \mapsto \sigma_t - \alpha_t + \varphi_t$$

est non croissante. Or, pour  $t = \alpha - \alpha'$ , nous savons que

$$\sigma_t - \alpha_t + \varphi_t = 2.$$

Ainsi,

$$\sigma' - \alpha' + \varphi' \geq 2.$$

Afin d'achever la démonstration, nous allons procéder comme dans le premier cas, avec les notions de néoarêtes adjacentes et de changements de signes stricts. On note à nouveau  $\nu$  le nombre total de changements de signes stricts. Cependant, une néoarête n'appartient plus nécessairement à deux faces : elle peut appartenir à une seule face. De fait, nous allons alors compter le nombre de côtés d'une néoface comme étant le nombre de côtés des néoarêtes augmenté du cardinal des néoarêtes qui bordent deux fois la face.

---

4. Remarquons que l'on pourrait provisoirement avoir des arêtes à extrémités libres.

Avec cette convention, on note  $\Phi'_i$  l'ensemble des néofaces à  $i$  côtés et  $\varphi'_i$  le nombre de néofaces dans  $\Phi'$ . Par le théorème 4.1.1 appliqué aux néosommets, nous obtenons que

$$\nu \geq 4\sigma'.$$

En comptant les changements de signes stricts pour les néofaces, on a

$$\nu \leq 2\varphi'_3 + 4\varphi'_4 + 4\varphi'_5 + 6\varphi'_6 + 6\varphi'_7 + \dots$$

Donc, comme dans le premier cas, on arrive à

$$4\alpha' - 4\varphi' \geq \nu \geq 4\sigma'$$

ce qui contredit la relation d'Euler. Ainsi, notre néoconstruction est impossible. Par conséquent, tous les arêtes de  $P$  sont fantômes. On a

$$\varepsilon(A) = 0 \quad \forall A \in E$$

ce qui revient à dire que

$$\delta_A(P) = \delta_{f(A)}(P') \quad \forall A \in E.$$

Le lemme 4.2.1 achève alors la démonstration. □

### 4.2.1 Conclusion

Les résultats de ce chapitre permettent de répondre à la question de l'unicité des polyèdres convexes et réguliers au sens de la notion de régularité de la définition 1.1.1 présentée au premier chapitre. Le problème de l'existence des polyèdres réguliers convexes réalisant les différents types combinatoires à l'issue des différents résultats présentés dans le premier chapitre peut être résolu de manière constructive en fournissant une liste explicite de coordonnées pour les sommets. Cependant, les résultats du troisième chapitre permettent ensuite de déterminer explicitement les sommets, les arêtes et les faces des polyèdres correspondants et par calcul direct on montre qu'ils satisfont la définition.

L'approche classique concernant la classification des polyèdres réguliers est ainsi aboutie. Une étude approfondie du groupe des isométries des modèles de polyèdres de Platon permet de dégager des propriétés importantes de l'action de ceux-ci. Ces dernières suggèrent de formuler la notion de régularité en terme d'action de groupe [18]. Cette définition moderne de régularité permet de définir et de classifier les polyèdres réguliers en toute dimension, cela sera l'objet du sixième chapitre, et de jeter un regard nouveau sur le théorème de classification des polyèdres en dimension trois au moyen d'une classification des sous-groupes finis de  $SO(3)$ . Ces sous-groupes sont étudiés dans le prochain chapitre.

# Chapitre 5

## Classification des sous-groupes finis de $SO(3)$

Le théorème de rigidité de Cauchy a permis d'aboutir les investigations<sup>1</sup> classiques concernant la classification des polyèdres réguliers en dimension 3.

Cette approche a fait place à une méthode plus moderne fondée sur la théorie des groupes [30] et [18]. Cette dernière reformule la notion de régularité en terme de transitivité de l'action du groupe des isométries du polyèdre considéré. Ce sous-groupe d'isométries étant inclus dans le groupe des permutations des sommets. D'une part, il est évident que son cardinal est fini et d'autre part tout élément de ce groupe fixe le centre de gravité de l'ensemble des sommets. Les groupes d'intérêt sont dès lors des sous-groupes finis du groupe des isométries (positives) fixant un point de l'espace affine euclidien considéré. Il est dès lors opportun de les étudier plus en détail et de chercher à les décrire explicitement. Bien entendu, quitte à fixer un repère orthonormé positif adéquat, on peut identifier isomorphiquement ce sous groupe à un sous groupe de  $SO(3)$ . Nous nous permettrons de passer d'un cadre à l'autre sans mention explicite.

### 5.1 Les sous-groupes finis de $SO(3)$

Cette section est consacrée à l'étude des sous-groupes finis de  $SO(3)$  (le lecteur trouvera quelques rappels des notions utilisées dans l'annexe E) et consiste essentiellement en un développement exhaustif de l'appendice de la référence [30]. Les références [9], [2] et [18] ont également été consultées. Des détails concernant les groupes  $SO(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et en particulier le groupe  $SO(3)$  des rotations de l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^3$  sont rappelés dans l'annexe C.

Soit  $G$  un sous-groupe fini d'ordre  $N$  de  $SO(3)$  et soit  $X = S^2$ . L'ensemble des pôles de  $G$  est noté

$$\mathcal{P}_G = \{ \mathcal{D}_g \cap S^2 : g \in G, g \neq \text{id} \}$$

où  $\mathcal{D}_g$  désigne l'axe de rotation associé à  $g$ .

**Définition 5.1.1.** Soit  $P$  un pôle de  $G$ . On définit la multiplicité  $\nu_P$  de  $P$  par

$$\nu_P = |G_P|.$$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple E.3.1, le sous-groupe  $G$  agit sur la sphère  $S^2$ . Le résultat suivant exprime que cette action stabilise l'ensemble des pôles  $\mathcal{P}_G$ .

---

1. Ces recherches se déploient sur plusieurs millénaires, depuis Euclide [17] jusqu'à Euler, Legendre et bien d'autres mathématiciens.

**Lemme 5.1.1.**

- (1) Le groupe  $G$  agit sur l'ensemble  $\mathcal{P}_G$ .  
 (2) Si  $P_1$  et  $P_2$  sont deux pôles équivalents<sup>2</sup> de  $G$  alors  $\nu_{P_1} = \nu_{P_2}$ .

*Démonstration.*

- (1) Il est clair que le groupe  $G$  agit sur la sphère  $S^2$ . Soit  $P \in \mathcal{P}_G$  un pôle associé à un élément  $g \in G$  non trivial et  $g' \in G$ . Il faut démontrer que  $g'(P)$  est un point fixe d'un élément  $h \in G$ . On vérifie instantanément que l'élément  $h \in G$  défini par

$$h = g' \circ g \circ g'^{-1}$$

répond à la question.

- (2) Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux pôles équivalents. Cela signifie qu'il existe  $g \in G$  tel que  $P_2 = g(P_1)$ . Pour prouver l'assertion, il suffit de démontrer que les sous-groupes d'isotropie de  $P_1$  et  $P_2$  sont conjugués. C'est direct parce qu'on a

$$g^{-1}G_{P_2}g = G_{P_1}.$$

Cette égalité s'obtient par double inclusion. D'une part, on obtient directement que

$$g^{-1}G_{P_2}g \subset G_{P_1}$$

en appliquant les définitions. L'autre inclusion s'obtient de la même manière. On en déduit

$$\nu_{P_1} = |G_{P_1}| = |G_{P_2}| = \nu_{P_2}.$$

□

Vu le point (2) du lemme 5.1.1, il est licite de définir la notation

$$\nu_{[P]} = \nu_P$$

où  $[P]$  désigne la classe des pôles équivalents à  $P$  sous l'action de  $G$ .

La proposition suivante nous donne un relation intéressante entre l'ordre d'un sous-groupe fini  $G$  de  $SO(3)$  et la multiplicité des pôles de  $G$ .

**Proposition 5.1.1.** *Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $SO(3)$  d'ordre  $N$ . Alors, on a la relation suivante*

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left(1 - \frac{1}{\nu_{[P]}}\right).$$

*En particulier, on a*

$$1 \leq \sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left(1 - \frac{1}{\nu_{[P]}}\right) < 2 \tag{5.1}$$

si  $N \geq 2$ .

---

2. C'est à dire qu'il existe  $g \in G$  satisfaisant  $g(P_1) = P_2$ .

*Démonstration.* L'idée consiste à compter de deux manières différentes les éléments de l'ensemble suivant

$$\{(r, P) : r \in G \setminus \{e\}, P \in \mathcal{P}_G, r.P = P\}$$

où  $r.P$  désigne l'action de  $r \in G$  sur le pôle  $P$ . Étant donné que chaque élément non-trivial de  $G$  fixe exactement deux pôles, on a

$$|\{(r, P) : r \in G \setminus \{e\}, P \in \mathcal{P}_G, r.p = p\}| = 2(N - 1).$$

De plus, par définition de la multiplicité d'un pôle, le nombre de rotations non-triviales fixant un pôle  $P$  de  $G$  est donné par  $\nu_P - 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} |\{(r, P) : r \in G \setminus \{e\}, r.P = P\}| &= \sum_{P \in \mathcal{P}_G} (\nu_P - 1) \\ &= \sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \frac{N}{\nu_{[P]}} (\nu_{[P]} - 1) \\ &= \sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left( N - \frac{N}{\nu_{[P]}} \right) \end{aligned}$$

parce que l'orbite d'un pôle  $P$  est de cardinal  $\frac{N}{\nu_{[P]}}$ . On obtient alors

$$2(N - 1) = \sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left( N - \frac{N}{\nu_{[P]}} \right).$$

Cela est équivalent à

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left( 1 - \frac{1}{\nu_{[P]}} \right).$$

Pour conclure, on a

$$1 \leq 2 - \frac{2}{N} < 2$$

sous l'hypothèse  $N \leq 2$ . □

La relation (5.1) de la preuve précédente

$$1 \leq 2 - \frac{2}{N} = \sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left( 1 - \frac{1}{\nu_{[P]}} \right) < 2$$

est au cœur de l'étude des sous-groupes finis de  $SO(3)$ . En effet, nous allons voir que cette dernière impose des contraintes fortes sur le nombre de classes distinctes de pôles ainsi que sur les multiplicités possibles de ces pôles.

**Corollaire 5.1.1.** *Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $SO(3)$  et  $\eta_G$  le nombre de classes d'équivalence distinctes de pôles de  $G$ . Alors on a  $2 \leq \eta \leq 3$ .*

*Démonstration.* En effet, la somme

$$\sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left( 1 - \frac{1}{\nu_{[P]}} \right)$$

ne peut être réduite à un seul terme car

$$1 - \frac{1}{\nu_{[P]}} < 1$$

ce qui contredit (5.1). De plus, cette somme ne peut contenir quatre termes ou plus. On procède par l'absurde en supposant  $\eta \geq 2$ . Vu que  $\nu_P \geq 2$ , on obtient

$$1 - \frac{1}{\nu_P} \geq \frac{1}{2}$$

et finalement

$$\sum_{[P], P \in \mathcal{P}_G} \left(1 - \frac{1}{\nu_{[P]}}\right) \leq 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

ce qui contredit la relation (5.1). □

Il y a donc deux cas à distinguer et à étudier de près :

- (1) cas  $\eta_G = 2$  : il y a deux classes de pôles équivalents ;
- (2) cas  $\eta_G = 3$  : il y a trois classes de pôles équivalents.

Le premier cas est assez direct et est traité dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 5.1.2** ( $\eta_G = 2$ ). *Soit  $G$  un sous groupe fini satisfaisant  $\eta_G = 2$ . Alors l'ensemble des pôles contient précisément deux pôles et le sous-groupe  $G$  est isomorphe à un groupe cyclique.*

*Démonstration.* Nous sommes confrontés à la relation

$$2 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{1}{\nu_1} + 1 - \frac{1}{\nu_2}.$$

En multipliant chaque membre de cette égalité par  $N$ , nous obtenons

$$2 = \frac{N}{\nu_1} + \frac{N}{\nu_2}.$$

Puisque  $\frac{N}{\nu_1}$  et  $\frac{N}{\nu_2}$  désignent respectivement le nombre de pôles de multiplicité  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , les deux termes du membre de droite de l'égalité précédente sont naturels. On en tire que

$$\frac{N}{\nu_1} = \frac{N}{\nu_2} = 1$$

ce qui signifie que le groupe détermine exactement deux pôles (non-équivalents). Ils sont donc antipodaux et  $G$  est isomorphe à un sous-groupe fini de  $S^1$ . Par la proposition E.2.1, ce sous-groupe est cyclique. Ainsi, dans le cas de deux classes de pôles équivalents,  $G$  est le groupe cyclique d'ordre  $N$  que l'on note  $U_N$ . □

Le second cas est plus intéressant encore et nous permettra d'imposer des contraintes additionnelles sur les multiplicités des pôles d'un tel sous-groupe fini. On note  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  les multiplicités de chacune de ces classes et on peut supposer sans perte de généralité que  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$ .

**Proposition 5.1.3** ( $\eta_G = 3$ ). *Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $SO(3)$  tel que  $\eta_G = 3$ . Alors les multiplicités  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  de ces classes de pôles équivalents satisfont une des relations suivantes :*

- (1)  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 2, \nu_3)$ ,  $\nu_3 \geq 0$  et  $N = 2\nu_3$  ;
- (2)  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 3)$  et  $N = 12$  ;
- (3)  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 4)$  et  $N = 24$  ;
- (4)  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 5)$  et  $N = 60$ .

*Démonstration.* Nous sommes confrontés à la relation

$$2 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{1}{\nu_1} + 1 - \frac{1}{\nu_2} + 1 - \frac{1}{\nu_3}$$

où pour rappel, on a supposé  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$ . On obtient alors que

$$1 + \frac{2}{N} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3}.$$

Puisque  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ , la relation précédente garantit que  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_3$  ne peuvent pas tous valoir trois ou plus. Comme  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$ , on en tire que  $\nu_1 = 2$ . On obtient alors que

$$\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{N}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par  $2\nu_2\nu_3$ , on obtient

$$2\nu_3 + 2\nu_2 = \nu_2\nu_3 + \frac{4\nu_2\nu_3}{N}$$

ce qui est équivalent à

$$(\nu_2 - 2)(\nu_3 - 2) = 4 - \frac{4\nu_2\nu_3}{N}.$$

On en déduit que  $(\nu_2 - 2)$  et  $(\nu_3 - 2)$  sont deux nombres entiers positifs ou nuls dont le produit est strictement inférieur à 4. Ce produit ne peut donc valoir que 0, 1, 2 ou bien 3. Finalement, on obtient les quatre cas suivants :

- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 2, \nu_3)$  et  $N = 2\nu_3$  ;
- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 3)$  et  $N = 12$  ;
- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 4)$  et  $N = 24$  ;
- $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 3, 5)$  et  $N = 60$ .

□

Le résultat précédent démontre que les éventuels sous-groupes de  $SO(3)$  apparaissent en deux familles infinies (groupes cycliques et groupe du type  $(2, 2, n)$ ) et une famille comportant trois cas particuliers.

Nous nous trouvons à présent dans une situation similaire à celle rencontrée dans l'étude classique des polyèdres réguliers présentée dans le premier chapitre. Nous avons en effet fait émerger des contraintes sur les multiplicités possibles des pôles associés à un sous-groupe fini  $G < SO(3)$  tout comme nous avons établi des contraintes de type combinatoire restreignant la nature et le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre régulier. À ce stade, les sources [9], [18] ou encore [30] indiquent alors généralement que l'on reconnaît (par exemple) le groupe du tétraèdre, de l'octaèdre ou de l'icosaèdre à partir des types  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$ ,  $(2, 3, 5)$  respectivement. Cependant, la plupart des sources en question ne détaille pas plus la situation, laissant ainsi complètement sans réponse la question de l'unicité (à isomorphisme près) des sous-groupes finis de  $SO(3)$  d'un type donné. Par ailleurs, la question de l'existence de tels sous-groupes finis se pose aussi vu que les modèles de polyèdres réguliers et la description détaillée de leurs groupes de symétrie est souvent passée sous silence.

L'objectif des résultats ultérieurs est de faire émerger explicitement des modèles (entre autres) de tétraèdres, d'octaèdres ou d'icosaèdres à partir de certaines classes de pôles associés au sous-groupe fini étudié.

Nous aurons besoin de deux résultats généraux sur les rotations (non triviales), que nous démontrons également, pour l'exercice.

**Lemme 5.1.2.** *Si  $r$  est une rotation non triviale, pour tout point  $P$ , l'orbite de  $P$  par le sous-groupe engendré par  $r$  est incluse dans le cercle (éventuellement réduit à un point, si  $P$  est fixe), dans le plan  $\pi$  orthogonal à l'axe  $\mathcal{D}$  de la rotation, contenant  $P$  et dont le centre appartient à  $\mathcal{D} \cap \pi$ . En particulier, si  $r$  est d'ordre  $k$  et si  $P$  n'est pas fixe, alors l'orbite de  $P$  définit un  $k$ -gone régulier dans le plan  $\pi$  et ne contient aucun point fixe de  $r$ .*

*Démonstration.* Si  $P$  est un point fixe de  $r$ , le résultat est immédiat. Si ce n'est pas le cas, notons  $C$  le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\pi$ , et  $D$  un point de  $\mathcal{D}$ , distinct de  $C$ . On a par définition

$$\|\overrightarrow{PC}\| = \|\overrightarrow{r(C)r(P)}\| = \|\overrightarrow{Cr(P)}\|.$$

Donc  $r(P)$  est sur la sphère de centre  $C$  et de rayon  $\|\overrightarrow{PC}\|$ . Pour prouver que l'orbite est plane et sur un cercle, on peut procéder de même avec le point  $D$ , l'orbite est donc dans l'intersection de deux sphères, ou noter que le triangle  $DCP$  est par définition rectangle en  $C$ . Son image

$$DCr(P)$$

par la rotation  $r$  l'est donc aussi, et  $r(P)$  est donc dans le plan orthogonal à  $\mathcal{D}$  et contenant  $C$  (ou  $P$ ). L'orbite est donc dans le cercle obtenu par intersection de la sphère centrée sur  $C$  contenant  $P$  et du plan  $\pi$ .

Le cas particulier est évident, vu la définition 2.2.1 que nous avons donnée des  $k$ -gones réguliers. Enfin, le seul point fixe de  $r$  dans ce plan est  $C$ , et il n'est pas sur ce cercle, donc l'orbite ne contient pas de point fixe<sup>3</sup>.

□

Ce résultat indique que l'orbite est déterminée par l'axe; il admet la sorte de réciproque suivante.

**Proposition 5.1.4.** *Étant donnés trois points non alignés  $P_1, P_2$  et  $P_3$  d'une orbite d'une rotation non triviale  $r$ , l'axe  $\mathcal{D}$  de la rotation est orthogonal au plan  $P_1P_2P_3$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 5.1.2, le plan orthogonal à  $\mathcal{D}$  et contenant  $P_1$  contient aussi  $P_2$  et  $P_3$ , donc ce plan est  $P_1P_2P_3$ , et la droite  $\mathcal{D}$  est donc orthogonale à ce dernier plan.

□

On obtient alors le corollaire suivant.

**Corollaire 5.1.2.** *Si  $r$  et  $r'$  fixent un même point  $O$  et ont des axes distincts, alors deux orbites relatives à  $r$  et  $r'$  ne peuvent avoir plus de deux points en commun.*

*Démonstration.* Par l'absurde, si  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont trois points distincts communs aux orbites, alors la première orbite est un cercle, donc les points  $P_1, P_2$  et  $P_3$  ne sont pas alignés, donc les axes de  $r$  et de  $r'$  sont orthogonaux au plan  $P_1P_2P_3$ . Ayant un point en commun, ils coïncident, ce qui est contraire à l'hypothèse.

□

Nous pouvons maintenant analyser plus en détail les groupes qui correspondent à la liste des possibilités décrite ci-dessus.

---

3. C'est aussi une conséquence d'un résultat classique sur les groupes d'isotropie des points d'une orbite.



## 5.2 Le groupe du tétraèdre

Nous considérons un groupe fini  $G$  dont les pôles se répartissent en trois classes et où les paramètres correspondants satisfont  $\nu_1 = 2$ , et  $\nu_2 = \nu_3 = 3$ . On a alors  $|G| = N = 12$ . Par la proposition 5.1.1, la classe  $C_1$  contient 6 pôles d'ordre 2, tandis que les classes  $C_2$  et  $C_3$  contiennent chacune 4 pôles d'ordre 3. Ce sont ces classes qui font apparaître des tétraèdres réguliers.

**Proposition 5.2.1.** *L'enveloppe convexe des points de la classe  $C_2$  est un tétraèdre régulier. Les points de la classe  $C_3$  sont leurs antipodes et engendrent donc également un tétraèdre régulier.*

*Démonstration.* On sait que la classe  $C_2$  comporte  $\frac{12}{3} = 4$  points distincts que nous noterons

$$P_1, P_2, P_3 \text{ et } P_4.$$

Nous notons  $O$  le centre de la sphère fixée par  $G$ . Le sous-groupe de  $G$  qui fixe  $P_1$  est d'ordre 3. Notons  $r_1$  un générateur de ce sous groupe, qui est alors

$$\{\text{id}, r_1, r_1^2\}.$$

Parmi  $P_2, P_3$  et  $P_4$ , les points sont distincts de  $P_1$ , et l'un est distinct de

$$\text{Ant}(P_1)$$

où  $\text{Ant}(P_1)$  désigne l'antipode de  $P_1$ . Supposons sans perte de généralité que c'est  $P_2$ , qui n'est alors pas fixé par  $r$ . Alors par le lemme 5.1.2, l'orbite de  $P_2$  par le sous-groupe engendré par  $r$  définit un triangle équilatéral dans un plan orthogonal à  $OP_1$ , et ne contient aucun point fixe. Comme cette orbite est incluse dans  $C_2$ , les sommets du triangle équilatéral sont

$$P_2, P_3 \text{ et } P_4$$

et aucun d'eux n'est égal à  $\text{Ant}(P_1)$ , puisque  $\text{Ant}(P_1)$  est fixe pour  $r$ . On peut en conclure que  $\text{Ant}(P_1)$  n'est pas dans  $C_2$ . Il est alors dans  $C_3$ , puisque les pôles dans  $C_1$  sont d'ordre 2.

On peut mener le raisonnement précédent pour tous les points de l'orbite. On constate alors que trois points distincts de l'orbite sont toujours les sommets d'un triangle équilatéral.

Il est aisé de se convaincre que les points  $P_1, \dots, P_4$  ne sont pas coplanaires. Une preuve explicite découle de la proposition 5.1.4. Si les points sont coplanaires, alors l'orbite de  $P_3$  pour les rotations associées à  $P_1$  est incluse dans le plan  $P_2P_3P_4$ . Son orbite pour les rotations associées à  $P_2$  est incluse dans le plan  $P_1P_3P_4$ . Ces deux plans coïncident, donc les axes sont confondus. C'est absurde car  $P_2$  diffère de  $P_1$  et de  $\text{Ant}(P_1)$ .

L'enveloppe convexe de ces points est alors un polyèdre dont on montre que les sommets sont les points  $P_i$ , les arêtes les segments  $[P_i, P_j]$  et les faces les enveloppes convexes de  $\{P_i, P_j, P_k\}$  pour  $i, j, k$  distincts dans  $\{1, \dots, 4\}$ . Pour les détails, le lecteur intéressé peut consulter la référence [27].

Ainsi, ce polyèdre a pour faces des triangles équilatéraux et chaque sommet est à l'intersection d'exactly trois faces. On a donc bien un tétraèdre régulier au sens du premier chapitre.  $\square$

Pour chaque groupe  $G$  du type que nous étudions, nous venons d'associer deux tétraèdres réguliers dont les sommets sont antipodaux dans la sphère centrée en  $O$ . On comprend alors la dénomination "groupe du tétraèdre" pour ces groupes, mais pour que cette dénomination soit licite, nous devons identifier comment les éléments de  $G$  agissent sur ce tétraèdre ainsi construit.

De plus, il y a potentiellement des groupes  $G$  non isomorphes correspondant à la décomposition en orbites de type  $(2, 3, 3)$ . Il serait donc bon de prouver que ces groupes sont isomorphes. Ce serait clair si on savait à l'avance qu'il n'y a, à similitude près, qu'un tétraèdre régulier, toute symétrie de l'un étant conjuguée à une symétrie de l'autre au moyen de la similitude. Nous montrons maintenant que l'on peut analyser l'action de  $G$  sur les sommets  $P_1, \dots, P_4$  et en déduire que tous les tétraèdres ainsi construits sont isométriques.

**Proposition 5.2.2.** *La classe  $C_1$  contient les antipodes de ses éléments. Si on note  $M_{ij}$  le milieu  $\frac{P_i+P_j}{2}$  du segment  $[P_i, P_j]$ , alors les axes des rotations associées à la classe  $C_1$  sont les droites  $M_{ij}M_{kl}$  pour les partitions  $\{\{i, j\}, \{k, l\}\}$  de  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Les axes de ces rotations sont deux à deux orthogonaux et les poits  $M_{ij}$  sont à égale distance de  $O$ .*

*Démonstration.* Les éléments de  $C_1$  sont des pôles d'ordre 2. Leurs antipodes, qui ont le même ordre, ne peuvent donc être dans les classes  $C_2$  ou  $C_3$ , qui sont formées de pôles d'ordre 3. La classe  $C_1$  contient six éléments. Elle est donc l'union disjointe de trois paires de pôles antipodaux, disons

$$\{Q_1, \text{Ant}(Q_1)\}, \{Q_2, \text{Ant}(Q_2)\} \text{ et } \{Q_3, \text{Ant}(Q_3)\}.$$

Les pôles antipodaux correspondent aux mêmes sous-groupes d'isotropie. Il suffit donc de considérer un pôle par paire, auquel correspond une rotation non triviale. Considérons donc un pôle,  $Q_1$  par exemple et la rotation non triviale  $r_1$  qui lui est associée. Cette rotation fixe globalement  $C_2$ . Elle ne fixe pas  $P_1$  puisque ses points fixes sur la sphère sont  $Q_1$  et son antipode. Supposons sans perte de généralité que

$$r_1(P_1) = P_2.$$

Alors, puisque  $r_1$  est d'ordre 2, on a

$$r_1(P_2) = P_1.$$

Pour la même raison  $P_3$  n'est pas fixe, mais puisque  $r_1$  est injectif,  $r_1$  applique  $P_3$  sur  $P_4$ , puis  $P_4$  sur  $P_3$ . Puisque  $r_1$  est affine, l'image de  $M_{12}$  est le milieu du segment

$$[r_1(P_1), r_1(P_2)]$$

c'est-à-dire  $M_{12}$ . De même  $M_{34}$  est un point fixe de  $r_1$ . La droite de points fixes est donc  $M_{12}M_{34}$ . Cette droite contient le centre de la sphère  $O$ , qui est également fixe pour  $r_1$ .

On peut faire de même avec les rotations  $r_2$  et  $r_3$  associées à  $Q_2$  et  $Q_3$ . La rotation  $r_2$  ne peut appliquer  $P_1$  sur  $P_2$ , sinon le raisonnement précédent montre que  $r_1$  et  $r_2$  coïncident sur le simplexe  $P_1, \dots, P_4$  et sont donc égales. C'est impossible puisque leurs axes sont distincts. Si  $r_2$  applique  $P_1$  sur  $P_3$ , alors elle échange  $P_1$  et  $P_3$  d'une part, et  $P_2$  et  $P_4$  d'autre part. Son axe est donc la droite  $M_{13}M_{24}$ . Il ne reste qu'une possibilité pour  $r_3$ , qui échange  $P_1$  et  $P_4$  d'une part, et  $P_2$  et  $P_3$  d'autre part. Son axe est donc  $M_{14}M_{23}$ .

Cela permet de démontrer que les axes sont deux à deux orthogonaux. En effet, puisque  $r_1$  est affine,  $M_{13}$  est appliqué sur le milieu du segment

$$[r_1(P_1), r_1(P_3)]$$

c'est à dire  $M_{24}$ . Par le lemme 5.1.2, la droite  $M_{13}M_{24}$  est orthogonale à l'axe de la rotation  $r_1$ , c'est à dire  $M_{12}M_{34}$ . On obtient les autres relations d'orthogonalité en considérant  $M_{23}$ , qui est appliqué sur  $M_{14}$  et finalement en appliquant le même raisonnement à  $r_2$ . Les points  $M_{ij}$  étant images l'un de l'autre par des rotations qui fixent  $O$ , ils sont à égale distance de  $O$ .

□

Cette proposition achève la description de l'action de  $G$  sur le tétraèdre : on avait construit le tétraèdre en constatant que les rotations associées aux classes  $C_2$  et  $C_3$  sont les rotations dont les axes sont définis par les sommets du tétraèdre. Il y a huit rotations non triviales de ce type. La proposition précédente ajoute les trois rotations d'ordre 2 définies par les milieux des arêtes opposées. Cela fait trois rotations de plus, et on a ainsi obtenu toutes les rotations non triviales du groupe  $G$ . La proposition précédente admet le corollaire important suivant.

**Corollaire 5.2.1.** *Si  $G$  est un sous-groupe fini de  $SO(3)$  de multiplicité  $(2, 3, 3)$ , alors les milieux des arêtes opposées des tétraèdres que l'on peut construire à partir de la classe  $C_2$  déterminent un octaèdre régulier. En particulier, deux tels sous-groupes sont conjugués.*

*Démonstration.* On a vu à la proposition 5.2.2 que les droites déterminées par les milieux des arêtes opposées du tétraèdre sont deux à deux orthogonales et se coupent en le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre. De plus ces points sont à égale distance du centre. Si on fixe le repère

$$\mathcal{R} = \left( O, \left( \frac{\overrightarrow{OM_{12}}}{a}, \frac{\overrightarrow{OM_{13}}}{a}, \frac{\overrightarrow{OM_{14}}}{a} \right) \right)$$

où  $a$  est la norme commune des vecteurs  $\overrightarrow{OM_{ij}}$ , alors les milieux des arêtes opposées ont dans ce repère, au facteur  $a$  près, les coordonnées de l'octaèdre (ou cocube) de l'exemple 3.10.1.

Si on dispose de deux sous-groupes  $G$  et  $G'$ , on peut ainsi construire comme ci-dessus deux repères orthonormés, que l'on peut supposer positifs, quitte à renuméroter les sommets des tétraèdres. Il existe alors une similitude positive  $s$  qui applique

$$O, M_{12}, M_{13}, M_{14}$$

sur

$$O', M'_{12}, M'_{13}, M'_{14}.$$

Elle applique d'abord tous les points  $M_{ij}$  sur les points  $M'_{ij}$ . Montrons-le pour  $M_{23}$ , on procède de même pour les autres points. Puisque  $O$  est le milieu du segment  $[M_{23}, M_{14}]$ , on a

$$M_{23} = 2O - M_{14}.$$

Donc l'image de  $M_{23}$  est

$$2O' - M'_{14} = M'_{23}.$$

Enfin, les sommets du tétraèdre régulier sont déterminés par les milieux des arêtes opposées, donc la similitude applique le premier tétraèdre sur le deuxième. Puisque  $G$  est le groupe des symétries positives du premier tétraèdre et  $G'$  celui du second, pour tout élément  $r$  de  $G$ ,  $srs^{-1}$  est une isométrie positive qui fixe les sommets du second tétraèdre, soit un élément de  $G'$ . En inversant les rôles de  $s$  et  $s^{-1}$ , on constate que

$$G' = sGs^{-1}.$$

Cela achève la démonstration. □

### 5.3 Le groupe du cube (ou de l'octaèdre)

Dans cette section, nous considérons un sous-groupe fini de  $SO(3)$  dont les pôles se répartissent en trois classes et où les paramètres correspondants satisfont  $\nu_1 = 2$ , et  $\nu_2 = 3$  et  $\nu_3 = 4$ .

La proposition 5.1.1 fournit alors  $|G| = N = 24$ . Nous allons procéder de manière similaire au cas du tétraèdre pour faire ici apparaître un cube parmi les pôles d'une des classes. On aurait pu choisir de faire apparaître le polyèdre dual, à savoir l'octaèdre, en procédant avec une autre classe. Par construction, la première classe de pôles,  $C_1$  contient 12 pôles d'ordre 2, la classe  $C_2$  contient 8 pôles d'ordre 3 et la classe  $C_3$  contient 6 pôles d'ordre 4. Les ordres différents des pôles de classes différentes conduisent directement au résultat suivant.

**Proposition 5.3.1.** *Les classes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont fermées par l'application antipodale.*

Souhaitant faire apparaître un cube, nous nous intéressons naturellement à la classe  $C_2$ , et nous avons effectivement le résultat suivant.

**Proposition 5.3.2.** *L'enveloppe convexe des pôles de la classe  $C_2$  est un cube.*

*Démonstration.* Considérons un pôle  $P$  d'ordre 4 et  $r$  une rotation qui engendre le sous-groupe d'isotropie de  $P$  dans  $G$ . Considérons un pôle  $P_1$  de  $C_2$ . Puisque  $P_1$  est d'ordre 3, il est distinct de  $P$  ou  $\text{Ant}(P)$ . Dès lors il n'est pas fixe, et son orbite sous l'action du groupe d'isotropie de  $P$  définit donc un carré dans un plan  $\pi$  orthogonal à  $OP$ . Notons provisoirement  $Q_1$  un pôle de  $C_2$  n'appartenant pas à l'orbite de  $P_1$ . Pour la même raison, l'orbite de  $Q_1$  définit également un carré dans un plan  $\pi'$  orthogonal à  $OP$ . Les plans  $\pi$  et  $\pi'$  sont distincts (et donc disjoints), sinon tous les pôles de  $C_2$  appartiendraient à

$$\pi = \pi'.$$

Or, une rotation  $q$  de pôle  $P_1$  engendrerait alors à partir d'un élément de  $C_2$  distinct de  $P_1$  et de  $\text{Ant}(P_1)$  dans  $C_2$  une orbite de pôles de  $C_2$  formée de trois points non colinéaires mais appartenant à  $\pi$ . Par la proposition 5.1.4, l'axe de la rotation  $q$  serait alors orthogonal à  $\pi$ . Donc  $P_1$  devrait coïncider avec  $P$  ou  $\text{Ant}(P)$ ; d'où une contradiction puisque ces pôles n'ont pas le même ordre.

Aucune des orbites de  $P_1$  ou de  $Q_1$  ne peut dès lors être stable par l'action de l'application antipodale. Sinon puisque  $C_2$  est stabilisé par cette bijection (par la proposition 5.3.1), ces deux orbites seraient toutes les deux stables. Puisque l'application antipodale est une symétrie centrale, son centre  $O$  est sur la droite déterminée par un point et son image. Alors  $O$  devrait appartenir à  $\pi$  et à  $\pi'$ ; d'où une contradiction. L'application  $\text{Ant}$  définit alors une bijection entre l'orbite de  $P_1$  et celle de  $Q_1$ .

Notons alors  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  les pôles de l'orbite de  $P_1$ , images successives de  $P_1$  par la rotation  $r$ , de sorte que

$$[P_1, P_3] \text{ et } [P_2, P_4]$$

soient les diagonales du carré. Définissons également

$$P'_1 = a(P_3), \quad P'_2 = a(P_4), \quad P'_3 = a(P_1), \quad \text{et} \quad P'_4 = a(P_2).$$

Notons enfin  $C$  le centre du carré de sommets  $P_1, \dots, P_4$ . Dans le triangle

$$P_1 P_3 P'_3$$

le point  $C$  est le milieu du segment

$$[P_1, P_3]$$

et le point  $O$  est le milieu du segment

$$[P_1, P'_3]$$

par définition de  $P'_3$ . Par le théorème de Thalès, les droites  $CO$  et  $P_3 P'_3$  sont parallèles, donc la droite  $P_3 P'_3$  est orthogonale à  $\pi'$  et à  $\pi$  et  $P'_3$  est bien la projection orthogonale de  $P_3$  sur

$\pi'$ . On montre de la même façon que  $P_i P'_i$  est parallèle à  $CO$ , donc orthogonale à  $\pi$  ou  $\pi'$ . Les quadrilatères déterminés par deux pôles  $P_i$  et  $P_j$  consécutifs et les pôles correspondants  $P'_i$  et  $P'_j$  sont donc des rectangles.

Considérons maintenant une rotation  $r_1$  de pôle  $P_1$  (et donc d'ordre 3). L'orbite de  $P_2$  pour l'action de cette rotation sur  $C_2$  est formée de trois pôles dans un plan orthogonal à  $OP_1$ , dont la distance à  $P_1$  est égale à

$$\left\| \overrightarrow{P_1 P_2} \right\|.$$

Le théorème de Pythagore assure alors qu'il ne peut s'agir que de  $P_2$ ,  $P_4$  et  $P'_1$ , les autres pôles étant trop éloignés de  $P_1$ . On a donc

$$\left\| \overrightarrow{P_1 P'_1} \right\| = \left\| \overrightarrow{P_1 P_2} \right\|$$

et les rectangles construits ci-dessus sont en fait des carrés.

On a donc obtenu que les pôles de  $C_2$  définissent 6 carrés, et que chaque sommet est entouré de 6 carrés. Cela correspond à la définition classique du cube. On peut également arriver à la définition présente dans l'exemple 3.10.1 en fixant un repère adéquat. En effet, en fixant l'origine en  $P_1$  et en choisissant les vecteurs de base

$$\frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{a}, \frac{\overrightarrow{P_1 P_4}}{a} \text{ et } \frac{\overrightarrow{P_1 P'_1}}{a}$$

où  $a = \left\| \overrightarrow{P_1 P_2} \right\|$ , alors on obtient les coordonnées suivantes pour les pôles : par définition et puisque  $P_1, \dots, P_4$  définissent un carré

$$P_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 : \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 : \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 : \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $C$  est le centre du carré défini par  $P_1, \dots, P_4$ , et puisque par le théorème de Thalès, on a

$$O = C + \frac{1}{2} \overrightarrow{P_1 P'_1},$$

on obtient

$$C : \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad O : \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient les coordonnées des derniers points soit en utilisant l'application antipodale soit en translatant les points  $P_i$  ci-dessus d'un vecteur  $\overrightarrow{P_1 P'_1}$  :

$$P'_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad P'_2 : \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad P'_4 : \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad P'_3 : \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

On constate alors qu'en plaçant l'origine du repère en  $O$ , on obtient à une dilatation d'un facteur  $a$  près, que l'enveloppe convexe des sommets peut être décrite en coordonnées.  $\square$

Comme dans le cas du tétraèdre, nous identifions les pôles de la classe  $C_1$  et de la classe  $C_3$ .

**Proposition 5.3.3.** *Les axes de rotation de la classe  $C_1$  sont déterminés par les milieux des arêtes du cube défini par la classe  $C_2$ . Ceux de la classe  $C_2$  sont déterminés par les sommets du cube. Ceux de la classe  $C_3$  sont déterminés par les centres de gravité des faces.*

*Démonstration.* Le résultat est immédiat pour la classe  $C_2$ , vu la définition du cube. Pour  $C_3$ , nous avons vu que les orbites sous l'action du groupe engendré par une rotation  $r$  d'ordre 4 se répartissent en deux carrés dans des plans parallèles, images l'un de l'autre par l'application antipodale. Les points de chaque orbite déterminent donc une face du cube et l'axe de la rotation fixe donc le centre de gravité de cette face. On a bien les 6 pôles de cette classe de cette manière.

En ce qui concerne la classe  $C_1$ , il y a douze rotations d'ordre 2. Pour prouver le résultat annoncé, il nous suffit de prouver que chaque rotation échange les sommets d'une arête au moins. Soit donc  $r$  une rotation d'ordre 2. Il existe un élément de  $C_2$  tel que

$$r(P) \neq \text{Ant}(P)$$

sinon

$$r = \text{Ant}$$

ce qui est impossible. Supposons sans perte de généralité que ce soit  $P_1$ . Alors  $P_1$  est soit appliqué sur

$$P_2, P_4 \text{ ou } P'_1$$

et le résultat suit, soit appliqué sur un sommet  $P$  opposé à  $P_1$  dans une face contenant  $P_1$ . Alors l'axe de  $r$  passe par le milieu du segment

$$[P, P_1]$$

et cela est absurde car l'axe de  $r$  coïncide alors avec celui d'une rotation d'ordre 4. □

La description du cube formé par la classe  $C_2$  ainsi que la réalisation des éléments du groupe  $G$  comme les isométries de ce cube permettent d'obtenir le corollaire suivant.

**Corollaire 5.3.1.** *Tous les sous-groupes finis  $G$  de  $SO(3)$  du type  $(2, 3, 3)$  sont conjugués.*

*Démonstration.* Étant donné un tel groupe, nous avons construit à partir de la classe  $C_2$  un cube. Nous avons déterminé un repère orthonormé (que l'on peut supposer positif) à partir duquel les sommets du cube sont parfaitement déterminés. Si  $G'$  est un autre groupe, on lui associe de la même façon un cube puis un repère orthonormé positif. Il existe une isométrie qui applique le premier repère sur le second. Les deux cubes sont donc isométriques et les groupes  $G$  et  $G'$  étant les groupes d'isométrie de ces cubes sont conjugués l'un de l'autre. □

## 5.4 Le groupe de l'icosaèdre (ou du dodécaèdre)

Dans cette section, nous considérons enfin un sous-groupe fini de  $SO(3)$  dont les pôles se répartissent en trois classes et où les paramètres correspondants satisfont  $\nu_1 = 2$ , et  $\nu_2 = 3$  et  $\nu_3 = 5$ . La proposition 5.1.1 fournit alors  $|G| = N = 60$ . On procède comme dans les sections précédentes pour faire apparaître un icosaèdre comme enveloppe convexe des pôles d'une classe. Par construction, la première classe de pôles,  $C_1$  contient 30 pôles d'ordre 2, la classe  $C_2$  contient 20 pôles d'ordre 3 et la classe  $C_3$  contient 12 pôles d'ordre 5. On a encore le premier résultat.

**Proposition 5.4.1.** *Les classes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont fermées par l'application antipodale.*

Vu les cardinaux des classes, et le nombre de sommets de l'icosaèdre, on sait ce que l'on doit essayer de démontrer.

**Proposition 5.4.2.** *L'enveloppe convexe des pôles de la classe  $C_3$  est un icosaèdre régulier.*

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de la proposition 5.3.2. Nous considérons un pôle  $P_1$  d'ordre 5 et  $r_1$  une rotation qui engendre le sous-groupe d'isotropie de  $P_1$  dans  $G$ . Les pôles de  $C_3$  distincts de  $P_1$  et  $\text{Ant}(P_1)$  se répartissent en 2 orbites définissant des pentagones réguliers dans des plans distincts  $\pi_1$  et  $\pi'_1$  orthogonaux à  $OP_1$ , images l'un de l'autre par l'application antipodale.

Pour fixer les idées, on peut supposer sans perte de généralité que la distance de  $P_1$  au plan  $\pi_1$  est inférieure à la distance de  $P_1$  à  $\pi'_1$ , autrement dit, que  $P_1$  et  $\pi_1$  sont dans l'hémisphère déterminé par le plan équatorial orthogonal à  $OP_1$ . Notons

$$Q_1, \dots, Q_5$$

les pôles appartenant à  $\pi_1$ , de sorte que

$$Q_i = r(Q_{i-1}) \forall i \in \{2, \dots, 5\}.$$

Notons également

$$Q'_i = \text{Ant}(Q_i)$$

le pôle antipodal dans  $\pi'_1$ . Montrons que le triangle  $P_1Q_1Q_2$  est équilatéral. On considère pour cela le pôle  $Q_1$  d'ordre 5 et l'orbite de  $P_1$  par le sous-groupe d'isotropie de  $Q_1$  dans  $G$ . Puisque  $P_1$  diffère de  $Q_1$  et de  $\text{Ant}(Q_1)$ , on sait que cette orbite est un pentagone régulier dans un plan orthogonal à  $OQ_1$ , et qu'elle ne contient pas  $\text{Ant}(P_1)$ . Elle ne peut partager au plus que 2 points avec  $\pi$  et deux avec  $\pi'$ , donc elle partage exactement deux points avec chacun de ces plans. De plus, ces points sont équidistants de  $Q_1$ . Dès lors dans le plan  $\pi$ , les points sont soit  $Q_2$  et  $Q_5$ , soit  $Q_3$  et  $Q_4$ . Montrons que cela doit être  $Q_2$  et  $Q_5$ . On note  $r$  le rayon du cercle déterminé par la sphère et le plan  $\pi$ ,  $d$  la distance de  $P_1$  à  $Q_1$ ,  $x$  la distance de  $O$  à  $\pi$  (comprise strictement entre 0 et 1). Par hypothèse la distance de  $P_1$  à  $\pi$  est alors  $1 - x$ . On a alors directement les relations

$$r^2 = 1 - x^2, \quad d^2 = 2(1 - x)$$

et vu ce que nous savons des pentagones réguliers

$$\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|^2 = \|\overrightarrow{Q_1Q_5}\|^2 = 2r^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

et

$$\|\overrightarrow{Q_1Q_3}\|^2 = \|\overrightarrow{Q_1Q_4}\|^2 = 2r^2 \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right).$$

L'équation  $d^2 = \|\overrightarrow{Q_1Q_3}\|^2$  s'écrit alors

$$2(1 - x) = 2(1 - x^2) \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right).$$

Les solutions sont visiblement  $x = 1$ , que l'on doit rejeter, et  $x = \frac{\cos(\frac{4\pi}{5})}{1 - \cos(\frac{4\pi}{5})}$ . Mais ce nombre est à rejeter, puisqu'il est strictement négatif.

On a donc

$$\|\overrightarrow{Q_1P_1}\| = \|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|$$

et le triangle est bien équilatéral.

Tous les triangles  $P_1Q_2Q_3$ ,  $P_1Q_3Q_4$ ,  $P_1Q_4Q_5$ , et  $P_1Q_5Q_1$  sont donc équilatéraux, puisqu'ils sont images l'un de l'autre par la rotation  $r_1$ . L'argument pouvant être répété pour tous les pôles de  $C_3$ , on constate que chaque pôle est entouré de 5 triangles équilatéraux, et on a ainsi obtenu que la classe  $C_3$  détermine un icosaèdre régulier, au sens du premier chapitre.  $\square$

On vérifie comme précédemment que deux sous-groupes finis de  $SO(3)$  correspondant au type  $(2, 3, 5)$  déterminent des icosaèdres isométriques et que les sous-groupes d'isométries correspondant sont alors conjugués.



# Chapitre 6

## Le théorème de Schläfli

Dans *Theorie der vielfachen Kontinuität*, le chapitre 13 de son ouvrage *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* [25], Ludwig Schläfli (1814 – 1895) introduit les polytopes (bien qu’il utilise le mot polyschèmes) qu’il définit en dimension  $n$ . Schläfli introduit ce que l’on appelle encore aujourd’hui les symboles de Schläfli qu’il définit de manière inductive. Par exemple, le carré est désigné par le symbole  $\{4\}$  ; le cube est désigné par le symbole  $\{4, 3\}$  car il s’agit d’un polyèdre régulier dont 3 carrés  $\{4\}$  se rencontrent en chaque sommet. En dimension quatre, l’hypercube est désigné par le symbole  $\{4, 3, 3\}$  car 3 cubes  $\{4, 3\}$  se rencontrent en chaque sommet. Dans cet ouvrage, il prouve qu’il existe six polytopes réguliers en dimension 4 mais seulement trois pour les dimensions supérieures ou égales à 5. La rédaction de ce chapitre s’est faite en consultant les références [3] et [25].

### 6.1 Définition des polyèdres réguliers et premiers exemples

Au chapitre 1, nous avons présenté la définition classique 1.1.1 des polyèdres réguliers. Maintenant que nous en savons plus sur la convexité et les polytopes, nous pouvons apporter une définition plus formelle au moyen des drapeaux d’un polytope.

**Définition 6.1.1.** *Un drapeau d’un polytope de dimension  $n$  est un  $n$ -uplet  $(F_0, F_1, \dots, F_{n-1})$  composé de  $i$ -faces  $F_i$  de  $P$  telles que*

$$F_i \subset F_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}.$$

*Un polytope  $P$  est dit régulier si son groupe d’isométrie agit transitivement sur les drapeaux de  $P$ .*

**Remarque 6.1.1.** *Toute isométrie qui stabilise le polytope  $P$  transforme les hyperplans d’appui de  $P$  en hyperplans d’appui, il s’ensuit qu’elle induit une permutation des sommets de  $P$ . En particulier, le centre de masse  $O$  des sommets de  $P$ , appelé le centre de  $P$ , est fixe sous l’action de  $G(P)$ . Comme  $G(P)$  agit transitivement sur les drapeaux et donc sur les sommets, cela implique que tous les sommets appartiennent à une sphère centrée en  $O$ . On dit que cette sphère est la sphère circonscrite de  $P$ .*

À présent, nous allons définir la notion de lien d’un sommet d’un polytope donné. Cette notion est très importante et jouera un rôle important dans la classification des polyèdres réguliers en dimension quelconque.

**Définition 6.1.2.** *Soient  $P$  un polytope régulier et  $X$  un sommet de  $P$ . Le lien de  $P$  en  $X$ , noté  $L_X(P)$  est l’enveloppe convexe des sommets  $Y$  de  $P$  tel que  $[X, Y]$  soit une arête de  $P$ .*



Voici une première propriété du lien d'un polytope régulier.

**Proposition 6.1.1.** *Si  $O$  est le centre de la sphère circonscrite à  $P$ , alors  $L_X(P)$  est inclus dans un hyperplan  $H$  orthogonal à  $\overrightarrow{XO}$ .*

*Démonstration.* Comme  $G(P)$  agit transitivement sur les drapeaux, il agit transitivement sur les arêtes issues de  $X$ . Il s'ensuit que toutes ces arêtes ont même longueur. Les sommets  $Y$  de  $P$  définissant  $L_X(P)$  sont donc sur une sphère centrée en  $X$  et dont le rayon est la longueur commune des arêtes, mais aussi sur la sphère circonscrite à  $P$ . L'intersection de ces sphères est incluse dans un hyperplan  $H$  ayant les propriétés voulues. □

Afin de prouver que  $L_X(P)$  est un polytope régulier, il convient d'étudier ses faces.

**Proposition 6.1.2.** *Si  $P$  est un polytope régulier, le lien  $L_X(P)$  est l'intersection  $P \cap H$  où  $H$  est l'hyperplan obtenu à la proposition 6.1.1. De plus, ses sommets sont les points  $Y$  de  $P$  tels que  $[X, Y]$  soit une arête de  $P$  et ses  $(i - 1)$ -faces sont les intersections de  $H$  avec les  $i$ -faces de  $P$  contenant  $X$ .*

*Démonstration.* Les points  $Y$  définissant le lien en  $X$  sont en nombre fini. Notons-les  $Y_1, \dots, Y_k$ . Puisqu'ils sont dans  $P \cap H$ , leur enveloppe convexe  $L_X(P)$  est incluse dans  $P \cap H$ . Si elle n'est pas égale à  $P \cap H$ , ce convexe admet un sommet qui n'est pas dans le lien  $L_X(P)$ , il est alors clair que l'on peut trouver une arête  $[X, Z]$  telle que  $Z \notin L_X(P)$ , d'où une contradiction. Les sommets de l'enveloppe convexe de  $\{Y_1, \dots, Y_k\}$  sont évidemment parmi ces points, mais ce sont tous des sommets car ils sont situés sur une sphère de  $H$ .

Cela prouve l'assertion concernant les  $i$ -faces, pour  $i = 1$ . Des arguments similaires permettent de conclure dans le cas général. □

Nous pouvons maintenant présenter le résultat attendu.

**Proposition 6.1.3.** *Si  $P$  est un polytope régulier et  $X$  un sommet, alors  $L_X(P)$  est un polytope régulier. De plus, les liens déterminés par chacun des sommets de  $P$  sont isométriques.*

*Démonstration.* Puisque le groupe d'isométries de  $P$  agit transitivement sur les drapeaux de  $P$ , il agit transitivement sur ceux dont le premier élément est  $X$ . D'après la proposition précédente, ceux-ci déterminent précisément les drapeaux de  $L_X(P)$ . De plus, toute isométrie de  $P$  fixant  $X$  induit une isométrie de  $P \cap H$ . Donc le groupe d'isométries de  $P \cap H$  agit transitivement sur ses drapeaux, et  $P \cap H$  est un polytope régulier.

De plus, si  $X'$  est un autre sommet de  $P$ , il existe une isométrie fixant  $P$  qui applique  $X$  sur  $X'$ . Pour chaque point  $Y_i$  définissant le lien de  $X$ , l'arête  $[X, Y_i]$  est appliquée sur une arête issue de  $X'$  dont le deuxième sommet  $Y'_i$  est un point du lien de  $X'$ . On obtient ainsi tous les sommets du lien de  $X'$ . □

**Définition 6.1.3.** *Puisque les liens en les sommets de  $P$  sont isométriques, on notera plus simplement  $L(P)$  un des liens  $L_X(P)$  où  $X$  est un sommet de  $P$ .*

## 6.2 Classification des polytopes réguliers

Nous allons classifier les polytopes réguliers en dimension  $n$  ( $n$  étant un naturel supérieur ou égal à 2). Comme expliqué lors de l'introduction de ce chapitre, nous devons ce résultat datant de 1850 à Ludwig Schläfli. Avant d'énoncer le théorème qui porte encore aujourd'hui son nom, nous avons besoin de la notion de *symbole d'un polytope régulier* et d'une *relation fondamentale*. Cela fait respectivement l'objet de la définition suivante et du lemme suivant.

**Définition 6.2.1.** *Le symbole d'un polytope régulier  $P$  de dimension  $n \geq 2$  est donné par la suite de  $n - 1$  entiers*

$$\{r_1(P), r_2(P), \dots, r_{n-1}(P)\}$$

*définie par induction comme suit :  $r_1(P)$  est le nombre de côtés des 2-faces de  $P$  et*

$$\{r_2(P), \dots, r_{n-1}(P)\}$$

*est le symbole de  $L(P)$ .*

Soit  $P$  un polytope régulier de dimension  $n \geq 1$ . Notons  $l$  la longueur de ses arêtes et  $r$  le rayon de sa sphère circonscrite. Posons

$$\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2}.$$

En particulier, si la dimension de  $P$  est 1, on a  $\rho(P) = 1$ . Nous pouvons maintenant démontrer la relation fondamentale exprimant  $\rho(P)$  en fonction de  $\rho(L(P))$  et du symbole de  $P$ .

**Lemme 6.2.1. (Relation fondamentale)**

*Si le polytope régulier  $P$  (de dimension  $n \geq 2$ ) a pour symbole*

$$\{r_1(P), \dots, r_{n-1}(P)\},$$

*alors on a la relation suivante entre  $\rho(P)$  et  $\rho(L(P))$  :*

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1(P)}\right)}{\rho(L(P))}.$$

*Démonstration.* Soient  $X$  un sommet de  $P$ ,  $O$  son centre et  $O'$  le centre de  $L_X(P)$ . Soit  $r$  (respectivement  $r'$ ) le rayon de la sphère circonscrite de  $P$  (respectivement de  $L_X(P)$ ). Soient  $Y$  et  $Y'$  les extrémités d'une arête de  $L_X(P)$  et désignons par  $l'$  la longueur d'une telle arête. Par la définition 6.1.2, les points

$$Y, X, Y'$$

sont les sommets consécutifs d'une 2-face de  $P$  qui est un polygone régulier à  $r_1$  côtés. Désignons par  $r''$  le rayon du cercle circonscrit à cette 2-face de centre  $O''$ . Par la proposition 2.2.2, nous savons que

$$l = 2r'' \sin\left(\frac{\pi}{r_1}\right).$$

Travaillons dans le triangle  $YXY'$ . Nous savons que

$$|YX| = l = |XY'|$$

et que

$$|\widehat{YXY'}| = \pi - \frac{2\pi}{r_1}$$

puisque  $Y$ ,  $X$  et  $Y'$  sont des sommets d'un polygone régulier à  $r_1$  côtés. Comme le triangle  $YXY'$  est isocèle, ses angles à la base ont la même amplitude. On a

$$|\widehat{Y'YX}| = |\widehat{XY'Y}| = \frac{\pi}{r_1}.$$

Par la formule des sinus, nous obtenons que

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{l} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{r_1}\right)}{l'}.$$

Cela revient à dire que

$$l' = l \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{r_1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}$$

ce qui est équivalent à

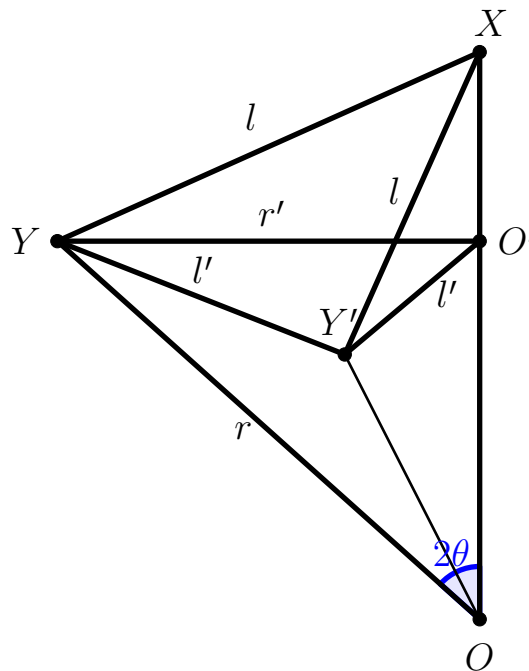
$$l' = 2l \cos\left(\frac{\pi}{r_1}\right).$$

Nous savons également que

$$\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$$

et que

$$\rho(L_X(P)) = \frac{(l')^2}{4(r')^2}.$$



Désignons par  $2\theta$  la mesure de l'amplitude de l'angle  $\widehat{XOY}$  du triangle  $XOY$ . Comme

$$|OY| = |OX| = r,$$

le triangle  $YOX$  est isocèle. Par conséquent,

$$|\widehat{YXO}| = |\widehat{OYX}| = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Par la formule des sinus, nous obtenons que

$$\frac{\sin(2\theta)}{l} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{r}.$$

On en tire que

$$l = 2r \sin(\theta).$$

À présent, travaillons dans le triangle  $YO'X$  rectangle en  $O'$ . Comme

$$|\widehat{YXO}| = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

il est clair que

$$|\widehat{O'YX}| = \theta.$$

On obtiens alors que

$$r' = l \cos(\theta).$$

Donc,

$$\rho(P) = \sin^2(\theta)$$

et

$$\begin{aligned} \rho(L_X(P)) &= \frac{4l^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{4l^2 \cos^2(\theta)} \\ &= \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\cos^2(\theta)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1(P)}\right)}{\rho(L(P))} = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) = \rho(P).$$

Cela achève la démonstration. □

Ce résultat admet le corollaire important suivant, permettant de calculer  $\rho(P)$  à partir du symbole de  $P$ , inductivement.

**Corollaire 6.2.1.** *Le nombre  $\rho(P)$  dépend seulement du symbole*

$$\{r_1(P), \dots, r_{n-1}(P)\},$$

*nous le noterons donc  $\rho(r_1, \dots, r_{n-1})$ . Pour tout polytope  $P$  ayant pour symbole*

$$\{r_1(P), \dots, r_{n-1}(P)\},$$

*la relation*

$$\rho(r_1, \dots, r_{n-1}) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(r_2, \dots, r_{n-1})}$$

*est satisfaite.*

Nous énonçons maintenant le théorème de Schläfli.

**Théorème 6.2.1. (Schläfli, 1850)**

*Les seuls symboles possibles pour un polytope régulier de dimension  $n$  sont donnés par la liste suivante.*

$$\begin{aligned} n = 2 &: \{m\}, \text{ où } m \text{ est un naturel supérieur ou égal à } 3; \\ n = 3 &: \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}; \\ n = 4 &: \{3, 3, 4\}, \{4, 3, 3\}, \{3, 4, 3\}, \{3, 3, 5\}, \{5, 3, 3\}; \\ n \geq 5 &: \{3, \dots, 3\}, \{3, \dots, 3, 4\}, \{4, 3, \dots, 3\}. \end{aligned}$$

*Pour chaque symbole de cette liste, il existe un polytope régulier ayant ce symbole. Deux polytopes réguliers qui ont le même symbole sont similaires.*

Nous nous intéressons au résultat d'unicité, dont nous partitionnons la preuve en plusieurs résultats. Ce résultat est le pendant dans le cadre de ce chapitre de la détermination des types combinatoires des polyèdres de Platon ainsi que de l'utilisation du théorème de rigidité de Cauchy établi dans les chapitres précédents. La définition de régularité en vigueur dans ce chapitre étant différente de la définition classique, elle permet une preuve plus aisée de ces résultats.

**Proposition 6.2.1.** *Soit  $O$  le centre de masse des sommets d'un polytope régulier  $P$  et soient  $F$  et  $F'$  deux facettes adjacentes de  $P$ . Si l'on désigne par  $H$  l'hyperplan engendré par  $F \cap F'$  et  $O$ , alors  $s_H(F) = F'$  où  $s_H$  désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $H$ .*

*Démonstration.* Notons  $f$  la face  $F \cap F'$ . On peut considérer les drapeaux

$$D = F_0 \frown \dots \frown f \frown F \text{ et } D' = F_0 \frown \dots \frown f \frown F'.$$

Il existe une isométrie  $I$  de  $P$  qui applique  $D$  sur  $D'$ . Puisque  $I$  fixe les drapeaux et les faces  $F_0, \dots, f$ , c'est l'identité sur  $f$ . Puisque  $I$  applique également  $O$  sur  $O$ , sa restriction à  $H$  est l'identité. Elle ne peut être égale à l'identité par hypothèse, donc il s'agit de la symétrie orthogonale  $s_H$ . □

Nous pouvons alors présenter un premier résultat d'unicité.

**Proposition 6.2.2.** *Deux polyèdres réguliers qui ont le même symbole de Schläfli sont semblables.*

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence. Le cas de base  $n = 2$  est évident. Considérons  $n \geq 3$ . Soient  $P$  et  $P'$  des polytopes réguliers qui ont le même symbole. Étant donné que les 2-faces des facettes de  $P$  sont des 2-faces de  $P'$ , on montre inductivement que le symbole d'une facette de  $P$  est donné par

$$\{r_1(P), \dots, r_{n-2}(P)\}.$$

Par hypothèse de récurrence, nous savons que les faces de  $P$  et  $P'$  sont semblables. Si l'on applique la similitude appropriée, nous pouvons même supposer qu'elles sont isométriques. Dès lors, nous pouvons faire coïncider une face de  $P$  avec une face de  $P'$  de telle sorte que  $P$  et  $P'$  se trouvent dans le même demi-espace déterminé par une face, appelons-la  $F$ . Alors  $P$  et  $P'$  ont le même centre  $O$ . En effet,  $O$  se trouve nécessairement sur la perpendiculaire à l'hyperplan de  $F$  passant par le centre  $O'$  de  $F$ . De plus, sa distance  $r$  à un sommet de  $F$  est connue, on a

$$\rho(P) = \rho(P') = \frac{l^2}{4r^2}$$

où  $l$  est la longueur des arêtes de  $F$ . À présent, désignons par  $J$  une  $(n-2)$ -face de  $F$  et soient  $G$  et  $G'$  les faces de  $P$  et  $P'$  adjacentes à  $F$  le long de  $J$ . Si  $H$  est l'hyperplan passant par  $O$  et  $J$ , par la proposition 6.2.1, on a

$$s_H(F) = G \text{ et } s_H(F) = G'.$$

On en tire que

$$G = G'$$

et, en procédant de la même façon pour toutes les facettes, nous obtenons que

$$P = P'$$

ce qui achève la démonstration. □

Pour compléter le théorème d'unicité, il nous reste donc à déterminer la liste des symboles possibles. Une bonne part de la discussion est basée sur le résultat suivant.

**Proposition 6.2.3.** *Il n'existe pas de symbole de Schläfli  $(r_1, \dots, r_{n-1})$  tel que  $\rho(r_2, \dots, r_{n-1}) \leq \frac{1}{4}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de considérer les conditions suivantes. On sait que  $r_1 \geq 3$  puisqu'une 2-face a au moins 3 côtés. De plus, la relation fondamentale fournit

$$\rho(r_1, \dots, r_{n-1}) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(r_2, \dots, r_{n-1})}.$$

Dès lors, si  $\rho(r_2, \dots, r_{n-1}) \leq \frac{1}{4}$ , on obtient

$$\rho(r_1, \dots, r_{n-1}) \leq 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{1}{4}} \leq 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{4}} = 0.$$

C'est une absurdité puisque

$$\rho(r_1, \dots, r_{n-1}) = \frac{l^2}{4r^2} > 0.$$

D'où la conclusion. □

Nous passons maintenant à la description explicite des symboles possibles pour les polytopes réguliers en dimension  $n \geq 2$ . Le premier résultat n'en est pas vraiment un.

**Proposition 6.2.4. (Liste des symboles pour la dimension 2)** *Les symboles possibles pour un polytope de dimension 2 sont donnés par*

$$\{r_1\}$$

où  $r_1$  est un naturel supérieur ou égal à 3.

*Démonstration.* Par définition du symbole d'un polytope  $P$  régulier de dimension 2, le symbole s'écrit  $\{r_1\}$ , où  $r_1$  est le nombre d'arêtes de  $P$ . Ce nombre est donc supérieur ou égal à 3. □

Contrairement à la dimension 2, les symboles de Schläfli possibles pour les polytopes de dimension 3 sont au nombre de cinq.

**Proposition 6.2.5. (Liste des symboles pour la dimension 3)**

*Les seuls symboles possibles pour un polytope de dimension 3 sont donnés par*

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}.$$

*Démonstration.* Considérons un polytope  $P$  de symbole  $\{r_1, r_2\}$  et utilisons les relations que nous avons établies pour contraindre  $r_1$  et  $r_2$ . Nous avons d'une part par le lemme 6.2.1 et la proposition 2.2.2

$$\rho(r_2) = \sin^2\left(\frac{\pi}{r_2}\right).$$

De plus, nous avons par le corollaire 6.2.1

$$\rho(r_1, r_2) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(r_2)}.$$

Passons en revue tous les cas possibles, en sachant que  $r_2 \geq 3$ .

- Pour le symbole  $\{r_2\} = \{3\}$ , on a

$$\rho(3) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} > \frac{1}{4}.$$

Le nombre  $r_2$  peut valoir 3. Mais dans ce cas, on a

$$0 < \rho(r_1, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{3}{4}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{3}{4}.$$

Cela revient à dire que si  $r_2 = 3$ , alors

$$r_1 \in \{3, 4, 5\}.$$

- Pour le symbole  $\{r_2\} = \{4\}$ , on a

$$\rho(4) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Le nombre  $r_2$  peut valoir 4. Mais on a alors

$$0 < \rho(r_1, 4) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(4)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{1}{2}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{1}{2}.$$

Cela revient à dire que si  $r_2 = 4$ , alors

$$r_1 = 3.$$

- Pour le symbole  $\{r_2\} = \{5\}$ , on a

$$\rho(5) = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}.$$

Déterminons la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ . Posons  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ . Comme  $\omega^5 = 1$ , on a

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0.$$

Donc,

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \underbrace{\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)}_{=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} + \underbrace{\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)}_{=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = 0$$

Cela revient à dire que

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) = 0.$$

Cela est équivalent à

$$4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0.$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Finalement,

$$\rho(5) = \frac{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} > \frac{1}{4}.$$

Le nombre  $r_2$  peut valoir 5. Mais alors,

$$0 < \rho(r_1, 5) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(5)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{5 - \sqrt{5}}{8}.$$

Cela revient à dire que si  $r_2 = 5$ , alors

$$r_1 = 3.$$

- Pour le symbole  $\{r_2\} = \{m\}$  où  $m$  est un naturel supérieur ou égal à 6, on a

$$\rho(m) = \sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Comme la fonction sinus est strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on obtient que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

On en tire que le nombre  $r_2$  ne peut pas valoir  $m$ . Ainsi, on doit avoir  $r_2 \in \{3, 4, 5\}$ , et tous les cas son traités.

Finalement, les seuls symboles possibles pour un polytope de dimension 3 sont donnés par

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}$$

ce qui achève la démonstration. □

**Proposition 6.2.6.** (*Liste des symboles pour la dimension 4*)

*Les seuls symboles possibles pour un polytope de dimension 4 sont donnés par*

$$\{3, 3, 3\}, \{4, 3, 3\}, \{5, 3, 3\}, \{3, 4, 3\}, \{3, 3, 4\} \text{ et } \{3, 3, 5\}.$$

*Démonstration.* Nous allons procéder de la même manière que dans la preuve de la proposition 6.2.5. Nous considérons un polytope  $P$  de symbole  $\{r_1, r_2, r_3\}$  et utilisons les relations que nous avons établies pour contraindre  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ . Nous savons que  $\{r_2, r_3\}$  est le symbole du lien de  $P$ , qui est un polytope régulier de dimension 3. Il fait donc partie de la liste des symboles des polytopes réguliers établie à la proposition 6.2.5.

De plus nous avons par le corollaire 6.2.1

$$\rho(r_1, r_2, r_3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(r_2, r_3)}.$$

Passons en revue les cinq cas possibles.



- Pour le symbole  $\{r_2, r_3\} = \{3, 3\}$ , on a

$$\rho(3, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(3)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4}.$$

On en tire que  $\{r_2, r_3\}$  peut valoir  $\{3, 3\}$ . Dans ce cas, nous obtenons

$$0 < \rho(r_1, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3, 3)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{2}{3}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{2}{3}.$$

Cela revient à dire que si  $\{r_2, r_3\} = \{3, 3\}$ , alors

$$r_1 \in \{3, 4, 5\}.$$

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3\} = \{3, 4\}$ , on a

$$\rho(3, 4) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(4)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

On en tire que  $\{r_2, r_3\}$  peut valoir  $\{3, 4\}$ . Alors

$$0 < \rho(r_1, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3, 4)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{1}{2}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{1}{2}.$$

Cela revient à dire que si  $\{r_2, r_3\} = \{3, 4\}$ , alors

$$r_1 = 3.$$

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3\} = \{4, 3\}$ , on a

$$\rho(4, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho(3)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4}.$$

On en tire que  $\{r_2, r_3\}$  peut valoir  $\{4, 3\}$ . Alors,

$$0 < \rho(r_1, 4, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(4, 3)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{1}{3}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{1}{3}.$$

Cela revient à dire que si  $\{r_2, r_3\} = \{4, 3\}$ , alors

$$r_1 = 3.$$

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3\} = \{3, 5\}$ , on a

$$\rho(3, 5) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(5)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{4}.$$

On en tire que  $\{r_2, r_3\}$  peut valoir  $\{3, 5\}$ . Alors

$$0 < \rho(r_1, 3, 5) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3, 5)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Cela revient à dire que si  $\{r_2, r_3\} = \{3, 5\}$ , alors

$$r_1 = 3.$$

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3\} = \{5, 3\}$ , on a

$$\rho(5, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\rho(3)} = 1 - \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{3-\sqrt{5}}{6} < \frac{1}{4}.$$

On en tire que  $\{r_2, r_3\}$  ne peut pas valoir  $\{5, 3\}$ .

Nous avons ainsi traité tous les cas. Les seuls symboles possibles pour un polytope de dimension 4 sont donnés par

$$\{3, 3, 3\}, \{4, 3, 3\}, \{5, 3, 3\}, \{3, 4, 3\}, \{3, 3, 4\} \text{ et } \{3, 3, 5\},$$

ce qui achève la démonstration. □

Passons à présent à la liste des symboles de Schläfli possibles en dimension cinq. Étonnamment, la liste se réduit à trois symboles analogues à ceux du simplexe, du cube et du cocube.

**Proposition 6.2.7. (Liste des symboles en dimension 5)** *Les seuls symboles possibles pour un polytope de dimension 5 sont*

$$\{3, 3, 3, 3\}; \{4, 3, 3, 3\} \text{ et } \{3, 3, 3, 4\}.$$

*Démonstration.* À nouveau, nous considérons un polytope de symbole  $r_1, r_2, r_3, r_4$ , et nous analysons toutes les valeurs possibles pour  $\rho(r_2, r_3, r_4)$  pour tous les cas possibles listés à la proposition 6.2.6 :

$$\{3, 3, 3\}, \{4, 3, 3\}, \{5, 3, 3\}, \{3, 4, 3\}, \{3, 3, 4\} \text{ et } \{3, 3, 5\}.$$

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{3, 3, 3\}$ , on a

$$\rho(3, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(3, 3)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{5}{8} > \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit que  $\{r_2, r_3, r_4\}$  peut valoir  $\{3, 3, 3\}$ . On a alors

$$0 < \rho(r_1, 3, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3, 3, 3)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{5}{8}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{5}{8}.$$

Cela revient à dire que si  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{3, 3, 3\}$ , alors

$$r_1 \in \{3, 4\}.$$

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{4, 3, 3\}$ , on a

$$\rho(4, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho(3, 3)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit que  $\{r_2, r_3, r_4\}$  ne peut pas valoir  $\{4, 3, 3\}$ .

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{5, 3, 3\}$ , on a

$$\rho(5, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\rho(3, 3)} = 1 - \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{16} < \frac{1}{4}.$$

Donc  $\{r_2, r_3, r_4\}$  ne peut pas valoir  $\{5, 3, 3\}$ .

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{3, 4, 3\}$ , on a

$$\rho(3, 4, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(4, 3)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4},$$

et  $\{r_2, r_3, r_4\}$  ne peut pas valoir  $\{3, 4, 3\}$ .

- Pour le symbole,  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{3, 3, 4\}$ , on a

$$\rho(3, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(3, 4)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit que  $\{r_2, r_3, r_4\}$  peut valoir  $\{3, 3, 4\}$ . Alors

$$0 < \rho(r_1, 3, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3, 3, 4)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{1}{2}}.$$

On en tire que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{1}{2}.$$

Cela revient à dire que si  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{3, 3, 4\}$ , alors

$$r_1 = 3.$$

- Pour le symbole  $\{r_2, r_3, r_4\} = \{3, 3, 5\}$ , on a

$$\rho(3, 3, 5) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(3, 5)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{3-\sqrt{5}}{8} < 1/4.$$

Il s'ensuit que  $\{r_2, r_3, r_4\}$  ne peut pas valoir  $\{3, 3, 5\}$ . Tous les cas sont ainsi traités.

Finalement, les différents symboles pour un polytope de dimension 5 sont donnés par

$$\{3, 3, 3, 3\}; \{4, 3, 3, 3\} \text{ et } \{3, 3, 3, 4\}.$$

□

Nous allons maintenant traiter toutes les dimensions supérieures et nous observerons que la situation se stabilise. Avant cela, nous avons besoin d'un lemme technique.

**Lemme 6.2.2.** *Pour  $n \geq 3$ , les symboles  $\{r_1, \dots, r_{n-1}\}$  donnés par  $\{3, \dots, 3\}$ ,  $\{4, 3, \dots, 3\}$  et  $\{3, \dots, 3, 4\}$ , les valeurs de  $\rho$  sont données par*

$$\rho(3, \dots, 3) = \frac{n+1}{2n}, \quad \rho(4, 3, \dots, 3) = \frac{1}{n}, \quad \text{et } \rho(3, \dots, 3, 4) = \frac{1}{2}.$$

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence. Pour les trois égalités, le cas de base correspondant  $n = 3$  a été démontré dans la preuve de la proposition 6.2.6. Passons maintenant à l'induction.

Pour la première égalité, nous supposons le résultat vrai pour  $n$  et montrons sa véracité pour  $n + 1$ .

$$\rho(3, \dots, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(3, \dots, 3)},$$

où le premier vecteur contient  $n$  entrées et le second  $n - 1$ . Par hypothèse de récurrence, nous obtenons que

$$\rho(3, \dots, 3) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{n+2}{2n+2}.$$

Dans le second cas, nous avons

$$\rho(4, 3, \dots, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho(3, \dots, 3)}.$$

Par la première égalité, nous obtenons alors que

$$\rho(4, 3, \dots, 3) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n+1}{2n}} = \frac{1}{n+1}.$$

Enfin, passons à la dernière égalité. Supposons le résultat vrai pour  $n$  et montrons sa véracité pour  $n + 1$ . On a

$$\rho(3, \dots, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\rho(3, \dots, 3, 4)}.$$

Par hypothèse de récurrence, nous obtenons que

$$\rho(3, \dots, 3, 4) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

□

**Proposition 6.2.8.** *(Liste des symboles en dimension au moins 5) Les seuls symboles possibles pour un polytope de dimension supérieure ou égale à 5 ou plus sont donnés par*

$$\{3, 3, \dots, 3\}, \{4, 3, \dots, 3\} \text{ et } \{3, \dots, 3, 4\}.$$

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence. Le résultat est vrai pour  $n = 5$  par la proposition 6.2.7. Supposons qu'il soit vrai pour  $n$  ( $\geq 5$ ) donné et montrons-le pour  $n + 1$ . Comme dans les résultats précédents, nous considérons un polytope régulier de dimension  $n + 1$  et de symbole  $\{r_1, \dots, r_n\}$ . Nous savons que  $\{r_2, \dots, r_n\}$  est un symbole en dimension  $n$ , et nous cherchons les valeurs que peut prendre ce symbole. Par hypothèse de récurrence, il n'y a que trois cas à traiter.

- Pour le symbole  $\{r_2, \dots, r_n\} = \{3, \dots, 3\}$ , par le lemme 6.2.2, nous avons

$$\rho(3, \dots, 3) = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{4}.$$

On en tire que le symbole  $\{r_2, \dots, r_n\} = \{3, 3, \dots, 3\}$  est possible pour tout polytope régulier de dimension  $n+1$ . De la relation

$$0 < \rho(r_1, 3, \dots, 3) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3, \dots, 3)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{n+1}{2n}},$$

on tire

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{n+1}{2n},$$

et finalement  $r_1 \in \{3, 4\}$ .

- Pour le symbole  $\{r_2, \dots, r_n\} = \{4, 3, \dots, 3\}$ , le lemme 6.2.2 fournit

$$\rho(4, 3, \dots, 3) = \frac{1}{n} < \frac{1}{4}.$$

Dès lors  $\{r_2, \dots, r_{n-1}\}$  ne peut pas valoir  $\{4, 3, \dots, 3\}$ .

- Pour le symbole  $\{r_2, \dots, r_n\} = \{3, 3, \dots, 4\}$ , nous avons, toujours par le lemme 6.2.2,

$$\rho(4, 3, \dots, 3) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4},$$

et le symbole  $\{3, 3, \dots, 4\}$  est possible pour tout polytope régulier de dimension  $n+1$ . La relation

$$0 < \rho(r_1, 3, \dots, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(3, \dots, 3, 4)} = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\frac{1}{2}}$$

fournit

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{1}{2},$$

et finalement  $r_1 = 3$ .

□

En conclusion, les propositions 6.2.4, 6.2.5, 6.2.6, 6.2.7 et 6.2.8 établissent que les symboles possibles d'un polytope régulier de dimension  $n$  sont donnés par

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n \geq 5$
$\{r_1\}$ où $r_1 \geq 3$		$\{3, 3, 3\}$	$\{3, 3, \dots, 3\}$
	$\{3, 3\}$	$\{4, 3, 3\}$	$\{4, 3, \dots, 3\}$
		$\{5, 3, 3\}$	
	$\{4, 3\}$	$\{3, 4, 3\}$	
	$\{5, 3\}$		
	$\{3, 4\}$	$\{3, 3, 4\}$	$\{3, 3, \dots, 4\}$
	$\{3, 5\}$	$\{3, 3, 5\}$	

FIGURE 6.1 – Les symboles possibles des polyèdres réguliers en dimension  $n \geq 2$ .

# Chapitre 7

## La relation d'Euler

Il semble que Leonhard Euler (1707 – 1783) ait été le premier à remarquer le fait que pour les polyèdres convexes de dimension 3, on a

$$S + F - A = 2$$

où  $S$ ,  $F$  et  $A$  désignent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces. Euler a mentionné son résultat dans une lettre adressée à Christian Goldbach (1690 – 1764) en 1750. Dans *Theorie der vielfachen Kontinuität*, le chapitre 13 de son ouvrage *Gesammelte Mathematische Abhandlungen* [25], Ludwig Schläfli généralise la relation d'Euler en dimension quelconque.

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la relation d'Euler à de multiples reprises. En effet, cette relation nous a été utile dans le chapitre 1 pour obtenir les différents polyèdres de Platon et d'Archimède. Nous l'avons également utilisée dans le chapitre 4 pour démontrer le théorème de rigidité de Cauchy. Dans ce septième et dernier chapitre, nous allons prouver la relation d'Euler en dimension quelconque. Nous nous intéresserons également aux relations dites de Dehn-Sommerville. Pour ce faire, nous avons besoin d'introduire quelques notions. La première section porte sur les polytopes équivalents et duaux et la deuxième concerne les polytopes simpliciaux et simples. Tout au long de chapitre, nous avons consulté la référence [5] dont nous avons détaillé les développements. Durant tout ce chapitre, nous désignerons par  $\mathcal{A}$  un espace affine réel de dimension  $n$ .

### 7.1 Polytopes équivalents et duaux

**Définition 7.1.1.** *Deux polytopes  $P$  et  $Q$  sont équivalents (et chacun est dit équivalent de l'autre) si leurs treillis de faces sont isomorphes.*

**Proposition 7.1.1.** *Soient  $P$  et  $Q$  deux polytopes équivalents. Soit  $n$  la dimension de  $P$  et considérons l'isomorphisme*

$$\varphi : (\mathcal{F}(P), \subset) \rightarrow (\mathcal{F}(Q), \subset).$$

Alors,

$$\dim(Q) = n \text{ et } \dim(\varphi(F)) = \dim(F)$$

pour toute face  $F$  de  $P$ .

*Démonstration.* Par le corollaire 3.10.5, chaque face  $F$  de  $P$  est un membre d'un drapeau

$$\emptyset = F_{-1} \subsetneq \cdots \subsetneq F_i \subsetneq \cdots \subsetneq F_n = P$$

de faces de  $P$  telles que

$$\dim(F_i) = i \quad \forall i \in \{-1, \dots, n\}.$$

Puisque  $\varphi$  est un isomorphisme, nous obtenons que

$$\emptyset = \varphi(F_{-1}) \frown \cdots \frown \varphi(F_i) \frown \cdots \frown \varphi(F_n) = \varphi(P) = Q.$$

Cela implique que

$$\dim \varphi(F_{i+1}) \geq \dim(\varphi(F_i)) + 1 \quad \forall i \in \{-1, \dots, n-1\} \quad (7.1)$$

par le corollaire 3.9.2. Par conséquent,

$$\dim(\varphi(F_n)) \geq n$$

ce qui signifie que

$$\dim(Q) \geq n = \dim(P).$$

Or,  $P$  et  $Q$  jouent des rôles symétriques. En fait, on a

$$\dim(Q) = n.$$

Ainsi, l'égalité (7.1) est vraie pour tout  $i$ , et donc

$$\dim(\varphi(F_i)) = i \quad \forall i \in \{-1, \dots, n\}.$$

D'où la conclusion. □

À présent, nous allons nous intéresser aux polytopes dit duaux. Pour ce faire, rappelons la définition d'un anti-isomorphisme.

**Définition 7.1.2.** Soient  $(A, <)$  et  $(B, <)$  deux ensembles partiellement ordonnés. L'application

$$\psi : (A, <) \rightarrow (B, <)$$

est un anti-isomorphisme si  $\psi$  est une bijection telle que si  $a < b$ , alors

$$\psi(b) < \psi(a) \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

**Définition 7.1.3.** Deux polytopes sont dits duaux (et chacun est dit dual de l'autre) si leurs treillis de faces sont anti-isomorphes.

**Proposition 7.1.2.** Soient  $P$  et  $Q$  deux polytopes duaux où  $\dim(P) = n$ . Soit

$$\psi : (\mathcal{F}(P), \subset) \rightarrow (\mathcal{F}(Q), \subset)$$

un anti-isomorphisme. Alors,

$$\dim(Q) = n \quad \text{et} \quad \dim(\psi(F)) = n - 1 - \dim(F)$$

pour toute face  $F$  de  $P$ .

*Démonstration.* Comme dans la preuve de la proposition 7.1.1, nous utilisons le fait que chaque face  $F$  de  $P$  est un membre d'un drapeau

$$\emptyset = F_{-1} \frown \cdots \frown F_i \frown \cdots \frown F_n = P$$

de faces de  $P$  telles que

$$\dim(F_i) = i \quad \forall i \in \{-1, \dots, n\}.$$

Puisque  $\psi$  est un anti-isomorphisme, on obtient que

$$Q = \psi(F_{-1}) \varprojlim \cdots \varprojlim \psi(F_i) \varprojlim \cdots \varprojlim \psi(F_n) = \emptyset.$$

Par conséquent,

$$\dim(\psi(F_i)) \geq \dim(\psi(F_{i+1})) + 1 \quad \forall i \in \{-1, \dots, n-1\} \quad (7.2)$$

par le corollaire 3.9.2. Dès lors,

$$\dim(\psi(F_{-1})) \geq n$$

ce qui signifie que

$$\dim(Q) \geq n = \dim(P).$$

Or,  $P$  et  $Q$  jouent des rôles symétriques. En fait, on a

$$\dim(Q) = n.$$

Ainsi, l'égalité (7.2) est valable pour tout  $i$ , d'où

$$\begin{aligned} \dim(\psi(F_i)) &= n - 1 - i \\ &= n - 1 - \dim(F_i) \quad \forall i \in \{-1, \dots, n\} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

## 7.2 Polytopes simpliciaux et simples

**Définition 7.2.1.** *Un  $n$ -polytope est dit simplicial si pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , chaque  $k$ -face de  $P$  comporte exactement  $k+1$  sommets. Autrement dit, un  $n$ -polytope  $P$  est simplicial si chaque face propre de  $P$  est un simplexe.*

**Proposition 7.2.1.** *Soient  $S$  un  $m$ -simplexe de  $\mathcal{A}$  et  $F$  une face propre de  $S$ . Alors,  $F$  est également un simplexe.*

*Démonstration.* Les sommets de  $F$  sont ceux de  $S$  qui sont dans  $F$ . Toute sous-famille d'une famille de points affinement indépendants est elle-même affinement indépendante. Par le théorème 3.8.1,  $F$  est l'enveloppe convexe de ses sommets. Par conséquent,  $F$  est un simplexe. □

**Proposition 7.2.2.** *Soit  $S$  un  $m$ -simplexe de  $\mathcal{A}$ , soit  $X$  un sous-ensemble non vide de  $\text{Extrem}(S)$  et soit  $F = \mathcal{E}(X)$ . Alors,  $F$  est une face de  $S$  et  $\text{Extrem}(F) = X$ .*

*Démonstration.* Posons

$$\text{Extrem}(S) = \{X_1, \dots, X_{m+1}\}$$

et supposons que

$$X = \{X_1, \dots, X_k\}.$$

Pour prouver que  $F$  est une face de  $S$ , nous devons montrer que si  $Y_0$  et  $Y_1$  sont deux points distincts de  $S$  tels qu'il existe  $\mu \in ]0, 1[$ , le point

$$Y_\mu = (1 - \mu)Y_0 + \mu Y_1$$



appartient à  $F$ , alors  $Y_0$  et  $Y_1$  sont dans  $F$ . Chaque  $X \in S$  possède une unique représentation

$$X = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X_i. \quad (7.3)$$

Les points  $X$  de  $S$  qui appartiennent à  $F$  sont caractérisés par le fait que

$$\lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{k+1, \dots, m+1\}.$$

Donc, on a

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{0,i} X_i \quad \text{et} \quad Y_1 = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{1,i} X_i$$

où les coefficients  $\lambda_{0,i}$  et  $\lambda_{1,i}$  sont positifs ou nuls pour tout  $i \in \{1, \dots, m+1\}$ . On en tire que

$$Y_\mu = \sum_{i=1}^{m+1} ((1-\mu)\lambda_{0,i} + \mu\lambda_{1,i}) X_i.$$

Or,  $Y_\mu \in F$ , donc

$$Y_\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_{\mu,i} X_i.$$

Vu l'unicité de (7.3), nous obtenons que

$$(1-\mu)\lambda_{0,i} + \mu\lambda_{1,i} = 0 \quad \forall i \in \{k+1, \dots, m+1\}.$$

Puisque  $\mu$  et  $1-\mu$  sont strictement positifs, et puisque  $\lambda_{0,i}$  et  $\lambda_{1,i}$  sont positifs ou nuls, nous obtenons que

$$\lambda_{0,i} = \lambda_{1,i} = 0 \quad \forall i \in \{k+1, \dots, m+1\}.$$

Alors,  $Y_0$  et  $Y_1$  sont dans  $F$  comme voulu. Finalement, la proposition 3.10.7 montre que

$$\text{Extrem}(F) \subset \{X_1, \dots, X_k\}.$$

De plus, l'autre inclusion est claire par la proposition 3.9.2. Cela achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 7.2.1.** *Soit  $S$  un  $m$ -simplexe de  $\mathcal{A}$  et soit  $F$  une  $j$ -face de  $S$ , où  $j \in \{-1, \dots, m\}$ . Alors, pour  $k \in j, \dots, m$ , le nombre de  $k$ -faces de  $S$  contenant  $F$  est égal à*

$$\binom{m-j}{k-j} = \frac{(m-j)!}{(m-k)! (k-j)!}.$$

*Démonstration.* Par les propositions 7.2.1 et 7.2.2, nous savons qu'il y a une bijection entre les  $k$ -faces de  $S$  contenant  $F$ , et les choix de  $(k+1) - (j+1)$  sommets parmi les  $(m+1) - (j+1)$  sommets de  $S$  n'appartenant pas à  $F$ . D'où la conclusion.  $\square$

**Corollaire 7.2.2.** *Soit  $S$  un simplexe de  $\mathcal{A}$ . Alors, pour  $k \in \{-1, \dots, m\}$ , le nombre de  $k$ -faces de  $S$  égal*

$$\binom{m+1}{k+1}.$$

*Démonstration.* Il suffit de considérer  $j = -1$  dans le corollaire 7.2.1.  $\square$

Nous allons à présent nous intéresser aux polytopes dits simples.

**Définition 7.2.2.** Un  $n$ -polytope  $P$  est dit simple si pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , le nombre de facettes de  $P$  contenant chaque  $k$ -face de  $P$  est égal à  $n-k$ .

**Proposition 7.2.3.** Soient  $P$  et  $Q$  deux  $n$ -polytopes duaux. Alors  $P$  est simple si et seulement si  $Q$  est simplicial.

*Démonstration.* Soient  $F$  et  $G$  deux faces propres de  $P$  et  $Q$  respectivement. Supposons que  $F$  et  $G$  correspondent sous l'anti-isomorphisme  $\psi$  défini par

$$\psi : (\mathcal{F}(P), \subset) \rightarrow (\mathcal{F}(Q), \subset).$$

Alors,

$$\dim(G) = n - 1 - \dim(F)$$

par la proposition 7.1.2. De plus, étant donné que  $P$  et  $Q$  sont duaux, dire que  $F$  est contenu dans  $j$  facettes de  $P$  revient à dire que  $G$  contient  $j$  sommets de  $Q$ . Par conséquent, dire que chaque  $k$ -face de  $P$  est contenue dans exactement  $n-k$  facettes est équivalent à dire que chaque  $(n-1-k)$ -face de  $Q$  possède exactement  $n-k$  sommets,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ; cela signifie que chaque face propre de  $Q$  est un simplexe. D'où la conclusion.  $\square$

**Proposition 7.2.4.** Soit  $P$  un  $n$ -polytope simple. Alors, pour  $0 \leq j \leq k \leq n$ , il y a exactement

$$\binom{n-j}{n-k}$$

$k$ -faces de  $P$  contenant une  $j$ -face donnée de  $P$ .

*Démonstration.* Pour  $k = n$ , il n'y a rien à prouver. Supposons donc que  $k < n$ . Soit  $Q$  le dual de  $P$  et désignons par  $\psi$  l'anti-isomorphisme défini par

$$\psi : (\mathcal{F}(P), \subset) \rightarrow (\mathcal{F}(Q), \subset).$$

Soit enfin  $F$  une  $j$ -face de  $P$ . Par la proposition 7.1.2, nous savons que  $\psi(F)$  est une  $(n-1-j)$ -face de  $Q$ , et que le nombre de  $k$ -faces de  $P$  contenant  $F$  est égal au nombre de  $(n-1-k)$ -faces de  $\psi(F)$ . De plus,  $\psi(F)$  est un simplexe par la proposition 7.2.3. Finalement, par le corollaire 7.2.2, nous obtenons que

$$\binom{(n-1-j)+1}{(n-1-k)+1} = \binom{n-j}{n-k}.$$

Cela termine la preuve.  $\square$

### 7.3 Relation d'Euler

Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $n$  et soit  $O \in \mathcal{A}$ . Pour tout  $n$ -polytope  $P$  de  $\mathcal{A}$ , nous désignerons par  $f_j(P)$ , le nombre de  $j$ -faces de  $P$  où  $j \in \{-1, 0, \dots, n\}$  et où l'on pose

$$f_{-1}(P) = f_n(P) = 1 \text{ et } f_j(P) = 0 \forall j > n.$$

Pour  $n \geq 1$ , le  $n$ -uplet

$$f(P) = (f_0(P), \dots, f_{n-1}(P))$$

de nombre entiers positifs est appelé le  $f$ -vecteur de  $P$ .

Avant d'énoncer la relation d'Euler, il convient de définir la notion de normales admissibles.

**Définition 7.3.1.** Une normale  $n$  à un hyperplan  $H$  de  $\mathcal{A}$  est admissible pour le polytope  $P$  de  $\mathcal{A}$  si

$$\langle \overrightarrow{OX}, n \rangle \neq \langle \overrightarrow{OY}, n \rangle$$

pour deux sommets  $X$  et  $Y$  quelconques de  $P$ . Cela signifie qu'aucun hyperplan  $H$  de  $\mathcal{A}$  ayant  $n$  comme normale ne contient plus d'un sommet de  $P$ .

**Proposition 7.3.1.** L'ensemble des normales admissibles pour  $P$  est dense dans  $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ . Cela signifie que pour tout  $Y \in \mathcal{A}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une normale admissible  $n$  tel que

$$\|\overrightarrow{OY} - n\| < \varepsilon.$$

*Démonstration.* Remarquons que l'union d'un nombre fini d'hyperplans de  $\mathcal{A}$  est d'intérieur vide. Par conséquent, pour tout ouvert non vide  $U$  de  $\mathcal{A}$  et tout hyperplan  $H$  de  $\mathcal{A}$ ,  $U \setminus H$  est un ouvert non vide. Posons

$$\text{Extrem}(P) = \{X_1, \dots, X_k\}$$

et posons

$$V = \left\{ \overrightarrow{OX_j} - \overrightarrow{OX_i} \mid i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j \right\}.$$

Alors, la boule ouverte  $B(Y, \varepsilon)$  n'est pas contenue dans

$$\bigcup_{v \in V} H_v$$

où  $H_v = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, v \rangle = 0\}$ . Autrement dit, si  $Z$  est dans cette boule et dans le complémentaire de ces hyperplans, alors  $n = \overrightarrow{OZ}$  est tel que

$$\|\overrightarrow{OY} - n\| < \varepsilon \text{ et } \langle \overrightarrow{OX_j} - \overrightarrow{OX_i}, n \rangle \neq 0 \forall i \neq j.$$

D'où la conclusion. □

**Théorème 7.3.1. (Relation d'Euler)**

Pour tout  $n$ -polytope  $P$  de  $\mathcal{A}$ , on a

$$\sum_{j=-1}^n (-1)^j f_j(P) = 0.$$

**Remarque 7.3.1.** On peut également écrire la relation d'Euler de la manière suivante :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j f_j(P) = 1$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f_j(P) &= 1 - (-1)^n \\ &= 1 + (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Puisque  $f_j(P) = 0$  lorsque  $j > n = \dim P$ , nous pouvons même écrire que

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(P) = 0.$$

À présent, nous allons démontrer la relation d'Euler. Cette preuve se fait par récurrence sur la dimension du polytope  $P$ . Nous serons amenés à traiter différents cas.

*Démonstration.* Nous allons procéder par récurrence sur la dimension  $n$  de  $P$ . Si  $n = 0$ , il n'y a rien à prouver. Si  $n = 1$ ,  $P$  est un segment. Donc,

$$f(P) = (2, 1).$$

On a

$$\sum_{j=-1}^1 (-1)^j f_j(P) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Si  $n = 2$ ,  $P$  est un polygone. Si on désigne par  $s$  le nombre de sommets de  $P$ , on a

$$f(P) = (s, s, 1).$$

Donc,

$$\sum_{j=-1}^2 (-1)^j f_j(P) = -1 + s - s + 1 = 0.$$

Nous pouvons donc supposer que  $n \geq 3$ . Supposons que le résultat est vrai pour tous les polytopes de dimension  $\leq n - 1$  et montrons-le pour les polytopes de dimension  $n$ . Par la proposition 7.3.1, on sait qu'il existe une normale admissible  $n$  pour  $P$ . Soient  $X_1, \dots, X_m$  les sommets de  $P$  ordonnés de telle sorte que

$$\langle \overrightarrow{OX_i}, n \rangle < \langle \overrightarrow{OX_{i+1}}, n \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\}. \quad (7.4)$$

En appelant  $n$  "la direction vers le bas", il vient que  $X_{i+1}$  est en-dessous de  $X_i$ . Posons

$$\alpha_{2i-1} = \langle \overrightarrow{OX_i}, n \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Vu (7.4), il est clair que

$$\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i+1},$$

nous pouvons donc choisir  $\alpha_{2i}$  de sorte que

$$\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i} < \alpha_{2i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, m-1\}$$

et poser

$$H_k = \left\{ X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle = \alpha_k \right\} \quad \forall k \in \{1, \dots, 2m-1\}.$$

Alors, les  $H_k$  forment un ensemble d'hyperplans parallèles avec  $H_{k+1}$  sous  $H_k$  de telle sorte que les  $H_k$ , où  $k$  est impair, passent à travers les sommets de  $P$ . Soit

$$P_k = H_k \cap P \quad \forall k \in \{1, \dots, 2m-1\}.$$

Par conséquent,  $P_k$  est un polytope de dimension  $n - 1$  pour  $k \in \{2, \dots, 2m-2\}$ , alors que

$$P_1 = \{X_1\} \quad \text{et} \quad P_{2m-1} = X_m.$$

Par hypothèse de récurrence, la relation d'Euler est satisfaite pour les polytopes  $P_k$ , on a

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(P_k) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, 2m-1\}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k+1},$$

nous obtenons que

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k+1} \sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(P_k) = 0$$

que l'on peut également écrire de la manière suivante :

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_j(P_k) = 0. \quad (7.5)$$

Nous allons prouver que

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_j(P_k) = \begin{cases} -1, & j = -1; \\ f_1(P) - f_0(P), & j = 0; \\ f_{j+1}(P), & j \in \{1, \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (7.6)$$

Il suffira alors de combiner (7.5) et (7.6) pour obtenir la relation d'Euler.

Commençons par prouver que si  $j = -1$ , alors

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_{-1}(P_k) = -1.$$

Nous savons que  $f_{-1}(P_k) = 1$  pour tout  $k$ . Donc,

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_{-1}(P_k) = \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k = -1.$$

Pour prouver (7.6) pour  $j \geq 0$ , nous allons définir, pour  $F$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{F}(P)$  des faces du polytope  $P$  et pour  $k \in \{1, \dots, 2m-1\}$ ,

$$\psi(F, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } H_k \cap \text{ri}(F) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } H_k \cap \text{ri}(F) = \emptyset. \end{cases}$$

Désignons par  $\mathcal{F}_j(P)$  l'ensemble des  $j$ -faces de  $P$  et prouvons (7.6) pour  $1 \leq j \leq n-1$ . Dès lors, une  $j$ -face de  $P$  possède au moins deux sommets, et puisque chaque  $H_k$  contient au plus un seul sommet de  $P$ , il s'ensuit qu'aucune  $j$ -face de  $P$  est une face de  $P$ . Or, le point (4) du théorème 3.10.2 montre que pour chaque  $j$ -face  $F'$  de  $P_k$ , il y a une unique face  $F$  de  $P$  telle que

$$F' = H_k \cap F,$$

et cette face  $F$  est une  $(j+1)$ -face. Dès lors, il est clair que

$$H_k \cap \text{ri}(F) \neq \emptyset.$$

Réciproquement, si  $F$  est une  $(j+1)$ -face de  $P$  telle que

$$H_k \cap \text{ri}(F) \neq \emptyset,$$

alors

$$F' = H_k \cap F$$

est une  $j$ -face de  $P_k$  par le point (2) du théorème 3.10.2. Ainsi, pour  $j$  et  $k$  fixés, l'application

$$F \mapsto F' = H_k \cap F$$

est une bijection entre l'ensemble des  $(j+1)$ -faces  $F$  de  $P$  telles que  $\psi(F, k) = 1$ , et l'ensemble l'ensemble des  $j$ -faces de  $P_k$ . Ainsi,

$$f_j(P_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} \psi(F, k). \quad (7.7)$$

Puisque nous venons d'établir l'équation (7.7), nous pouvons réécrire le membre de gauche de (7.6). On a

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_j(P_k) = \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} \psi(F, k)$$

que l'on peut également écrire

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_j(P_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \psi(F, k). \quad (7.8)$$

Fixons  $j$  et considérons à présent une  $(j+1)$ -face  $F$  de  $P$ . Soient respectivement  $X_{i_1}$  et  $X_{i_2}$  le sommet le plus haut et le plus bas de  $F$ . Alors, les valeurs de  $k$  telles que  $\psi(F, k) = 1$  sont données par

$$k = 2i_1; 2i_1 + 1; \dots, 2i_2 - 3; 2i_2 - 2.$$

On remarque que le nombre de valeurs paires correspond au nombre, augmenté de 1, de valeurs impaires. Donc,

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \psi(F, k) = 1. \quad (7.9)$$

En combinant les équations (7.8) et (7.9), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_j(P_k) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} 1 \\ &= f_{j+1}(P). \end{aligned}$$

Le cas où  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  de (7.6) est donc montré. Il nous reste à prouver (7.6) dans le cas où  $j = 0$ .

- Si  $k$  est pair, alors  $H_k$  ne contient aucun sommet de  $P$ . Il s'ensuit que pour  $k$  pair, aucune 0-face de  $P_k$  est une face de  $P$ . En procédant de la même manière que précédemment, nous obtenons que

$$f_0(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \psi(F, k). \quad (7.10)$$

- Si  $k$  est impair, la situation à laquelle nous sommes confrontés est différente. En effet, dans ce cas,  $H_k$  contient un seul sommet de  $P$  qui est également un sommet de  $P_k$ . Pour les sommets de  $P_k$  restants, en procédant comme précédemment, on obtient que

$$f_0(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \psi(F, k) + 1. \quad (7.11)$$

En utilisant les équations (7.10) et (7.11), nous obtenons que

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_0(P_k) = \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \psi(F, k) + \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2m-1} (-1)^k.$$

Cela revient à dire que

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_0(P_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \psi(F, k) - f_0(P) \quad (7.12)$$

où nous avons utilisé le fait que le nombre de valeurs paires de  $k$  est égal à  $f_0(P)$ . En raisonnant comme dans le cas où  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , nous obtenons que

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \psi(F, k) = 1 \quad (7.13)$$

pour tout  $F \in \mathcal{F}_1(P)$ . En combinant les équations (7.12) et (7.13), il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k f_0(P_k) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} 1 - f_0(P) \\ &= f_1(P) - f_0(P). \end{aligned}$$

Cela prouve (7.6) et achève par conséquent la preuve.  $\square$

## 7.4 Relations de Dehn–Sommerville

Il existe un ensemble de relations linéaires qui sont satisfaites par les  $f$ -vecteurs de tous les  $n$ -polytopes simples. Ces relations sont connues sous le nom de *Relations de Dehn–Sommerville*.

### Théorème 7.4.1. (*Relations de Dehn–Sommerville*)

Pour tout  $n$ -polytope simple  $P$ , on a

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-j}{n-i} f_j(P) = f_i(P)$$

pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Démonstration.* Pour n'importe quelle face non vide  $F$  de  $P$ , le théorème 7.3.1 montre que

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(F) = 0. \quad (7.14)$$

Notons  $\mathcal{F}_i(P)$  l'ensemble des  $i$ -faces de  $P$ . Il suit immédiatement de (7.14) que

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} \sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(F) = 0,$$

ou de manière équivalente,

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} f_j(F) = 0. \quad (7.15)$$

La valeur de la somme

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} f_j(F)$$

représente le nombre de paires  $(G, F)$  de faces de  $P$  telles que  $\dim(G) = j$ ,  $\dim(F) = i$  et  $G \subset F$ . On en tire que

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} f_j(F) = \sum_{G \in \mathcal{F}_j(P)} f_i(P/G). \quad (7.16)$$

Pour  $\dim(G) = j \geq 0$ , le nombre  $f_i(P/G)$  est connu vu la proposition 7.2.4. En effet, nous savons que

$$f_i(P/G) = \binom{n-j}{n-i}. \quad (7.17)$$

Remarquons que pour  $i < j \leq n$ , les deux membres de l'égalité (7.17) sont nuls. Par conséquent, (7.17) est valide pour  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Enfin, pour  $\dim(G) = j = -1$ , il est clair que

$$f_i(P/G) = f_i(P). \quad (7.18)$$

En combinant les égalités (7.15), (7.16), (7.17) et (7.18), nous obtenons que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-j}{n-i} f_j(P) = f_i(P)$$

pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ ; d'où la conclusion. □

### Remarque 7.4.1.

- Pour  $i = n$  dans le théorème 7.4.1, nous obtenons le théorème 7.3.1.
- Pour  $i = 0$ , on obtient la relation triviale

$$f_0(P) = f_0(P).$$

Pour  $n \leq 2$ , tout est trivial.

- Pour  $n = 3$ , les relations de Dehn-Sommerville sont données par :

$$\begin{aligned} f_0(P) &= f_0(P), \\ 3f_0(P) - f_1(P) &= f_1(P), \\ 3f_0(P) - 2f_1(P) + f_2(P) &= f_2(P), \\ f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - 1 &= 1. \end{aligned}$$

On en tire que

$$\begin{aligned} 3f_0(P) - 2f_1(P) &= 0, \\ f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi, aussi étonnant que cela puisse paraître, si l'un des trois nombres  $f_0(P)$ ,  $f_1(P)$  ou  $f_2(P)$  est connu, alors les deux restants peuvent être déterminés. Nous pouvons en effet exprimer  $f_0(P)$  et  $f_1(P)$  en fonction de  $f_2(P)$  en procédant de la manière suivante. Repartons du système suivant :

$$\begin{cases} 3f_0(P) - 2f_1(P) &= 0 \\ f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) &= 2 \end{cases} \quad (7.19)$$

En retranchant à la première équation le double de la seconde, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} f_0(P) - 2f_2(P) &= -4 \\ f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) &= 2 \end{cases}$$

On en tire que

$$f_0(P) = 2f_2(P) - 4$$

et en utilisant la deuxième équation du système (7.19), nous obtenons que

$$2f_2(P) - 4 - f_1(P) + f_2(P) = 2$$

et finalement,

$$f_1(P) = 3f_2(P) - 6.$$



# Annexe A

## Florilège de définitions peu satisfaisantes

Dans cette annexe, nous allons présenter sous forme d'une liste toute une série de définitions que l'on rencontre fréquemment dans les différentes ressources mises à notre disposition. Pour définir la notion de polygones, les références [4], [6], [8],[13], [15] et [23] donnent respectivement la définition suivante :

- Un polygone est une figure plane fermée délimitée par au moins trois segments de droite qui se terminent par paires au même nombre de sommets et qui ne se coupent qu'à leurs sommets.
- Un polygone est une figure plane fermée dont les côtés sont délimités par des segments de droite.
- Un polygone est un objet géométrique composé d'un certain nombre de points (appelés sommets) et d'un nombre égal de segments de droite (appelés côtés), à savoir un ensemble de points ordonnés cycliquement dans un plan, sans que trois points successifs ne soient colinéaires, ainsi que les segments de droite joignant des paires consécutives de points. En d'autres termes, un polygone est une ligne brisée fermée située dans un plan.
- Un polygone est un ensemble fini non vide de segments de droites (non réduits à un point), inclus dans un même plan, tels que
  - (1) chaque extrémité de chaque segment coïncide avec une extrémité d'un seul autre segment de l'ensemble, non aligné avec le premier ;
  - (2) deux extrémités de segments sont toujours reliés par une suite de segments ayant chacun une extrémité en commun avec le suivant ;
  - (3) deux segments n'ont aucun point intérieur en commun.
- Un polygone est une figure plane fermée dont les arêtes sont droites.
- Un polygone, en géométrie euclidienne, est une figure géométrique plane formée d'une ligne brisée (appelée aussi ligne polygonale) fermée, c'est-à-dire d'une suite cyclique de segments consécutifs.

# Annexe B

## Espaces affines

Cette section a pour but de fixer les notations ainsi que le cadre dans lequel nous allons travailler tout au long de ce mémoire. Nous ferons les rappels nécessaires pour la compréhension des différentes notions qui seront abordées dans ce travail. La référence [20] a été consultée lors de la rédaction de cette section. Commençons tout d'abord par la définition d'un espace affine.

**Définition B.0.1.** *Un espace affine  $\mathcal{A}$  modelé sur un espace vectoriel réel  $E$  est un ensemble (dont les éléments sont appelés points), muni d'une opération de translation*

$$t : \mathcal{A} \times E \rightarrow \mathcal{A} \\ (A, u) \mapsto t(A, u) = A + u$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1.  $(A + u) + v = A + (u + v)$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et tous  $u, v \in E$  ;
2. Pour tous  $A, B \in \mathcal{A}$ , il existe un unique  $u \in E$  tel que  $B = A + u$ .

On note aussi  $\vec{\mathcal{A}}$  l'espace vectoriel définissant un espace affine  $\mathcal{A}$ .

**Exemple B.0.1.** *Un exemple d'espace affine réel de dimension 2 est l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  des couples de réels muni de l'opération*

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Il s'agit de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  vu comme un espace affine modelé sur lui-même.

Nous allons définir la combinaison affine de points, la combinaison convexe de points ainsi que la notion de points affinement indépendants. Pour ce faire, commençons par nous intéresser au résultat suivant.

**Proposition B.0.1.** *Pour  $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$  et pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , le point*

$$P = O + \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n} \tag{B.1}$$

est indépendant du point  $O$  si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

**Définition B.0.2.** *Le point  $P$  défini par (B.1) est la combinaison affine (ou le barycentre) des points  $P_1, \dots, P_n$  de coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . On note*

$$P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n.$$

Parmi ces combinaisons, celles qui sont définies à l'aide de coefficients positifs sont appelées combinaisons convexes des points  $P_1, \dots, P_n$  de coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

**Définition B.0.3.** *L'enveloppe affine d'un ensemble est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de points de cet ensemble. De même, l'enveloppe convexe d'un ensemble est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de cet ensemble.*

**Définition B.0.4.** *Des points  $P_1, \dots, P_n$  sont affinement indépendants si aucun de ces points n'est combinaison affine des autres. Dans le cas contraire, ces points sont affinement dépendants.*

**Définition B.0.5.** *La droite  $AB$  est définie comme l'ensemble*

$$AB = \{(1 - \lambda)A + \lambda B : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

*Le segment  $[A, B]$  est défini comme l'ensemble*

$$[A, B] = \{(1 - \lambda)A + \lambda B : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Les variétés affines sont les analogues dans les espaces affines des sous-espaces vectoriels dans les espaces vectoriels. Adoptons donc une définition similaire.

**Définition B.0.6.** *Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine. Une variété affine de  $\mathcal{A}$  est un sous ensemble non vide  $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$  qui contient les combinaisons affines de ses éléments.*

**Proposition B.0.2.** *Soit  $\mathcal{V}$  une variété affine de  $\mathcal{A}$  et  $P$  un point de  $\mathcal{V}$ . L'ensemble*

$$V_P = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in \mathcal{V}\}$$

*est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a  $X \in \mathcal{V}$  si et seulement si*

$$\overrightarrow{PX} \in V_P.$$

*On a*

$$\mathcal{V} = P + V_P.$$

*De plus,  $V_P$  est l'unique sous-espace vectoriel ayant cette propriété. Enfin,  $V_P$  est indépendant du choix de  $P$  dans  $\mathcal{V}$ .*

**Définition B.0.7.** *Si  $\mathcal{V}$  est une variété affine, le sous-espace vectoriel défini par la proposition B.0.2 est le sous-espace vectoriel directeur de  $\mathcal{V}$ . On le note  $\vec{\mathcal{V}}$ .*

**Définition B.0.8.** *Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine. La dimension d'une variété affine  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{A}$  est la dimension de son sous-espace vectoriel directeur  $\vec{\mathcal{V}}$ .*

Ainsi, une droite est une variété affine de dimension 1 et un plan est une variété affine de dimension 2.

**Définition B.0.9.** *Un repère  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{A}$  est un couple  $(O ; \mathcal{B})$  où  $O$  est un point de  $\mathcal{A}$  appelé origine du repère et où  $\mathcal{B}$  est une base de  $\vec{\mathcal{A}}$  appelée base du repère. Les coordonnées d'un point  $X$  quelconque de  $\mathcal{A}$  dans le repère  $\mathcal{R} = (O ; \mathcal{B})$  sont les composantes de  $\overrightarrow{OX}$  dans  $\mathcal{B}$ .*

Nous allons à présent rappeler la notion de produit scalaire sur un espace vectoriel réel qui nous mènera à la notion d'espace vectoriel euclidien et on arrivera alors à la notion d'espace affine euclidien.

**Définition B.0.10.** *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel  $E$  est une application*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

*qui est symétrique, bilinéaire et définie positive. Un espace vectoriel réel  $E$  muni d'un produit scalaire est appelé un espace vectoriel réel euclidien. Un espace affine euclidien est un espace affine modélé sur un espace vectoriel réel euclidien.*

**Définition B.0.11.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel. La norme du vecteur  $x \in E$  est donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Définition B.0.12.** Pour tous vecteurs  $u, v$  non nuls de  $E$ , l'angle non orienté des vecteurs  $u$  et  $v$  est l'unique nombre  $\alpha \in [0, \pi]$  satisfaisant

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Nous allons à présent donner la définition de l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls. Pour ce faire, commençons par définir l'orientation d'un espace vectoriel.

**Définition B.0.13.** Deux bases  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  et  $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$  d'un espace vectoriel  $E$  définissent la même orientation si la matrice de changement de base de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  a un déterminant positif.

Remarquons que la relation "avoir la même orientation" est une relation d'équivalence. La proposition suivante montre que les bases d'un espace vectoriel ne peuvent être réparties qu'en deux ensembles dont le premier regroupe celles qui ont la même orientation et dont le second regroupe celle qui ont une orientation différente.

**Proposition B.0.3.** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B}_0 = (b_1, \dots, b_n)$ . Alors la base  $\mathcal{B}_1 = (b_1, \dots, b_{n-1}, -b_n)$  n'a pas la même orientation que  $\mathcal{B}_0$ . Toute base  $\mathcal{B}$  a soit la même orientation que  $\mathcal{B}_0$  soit la même orientation que  $\mathcal{B}_1$ .

À présent, on peut donner un sens au concept de base positive.

**Définition B.0.14.** Une orientation d'un espace vectoriel est le choix d'une des deux classes de bases, qui sont déclarées positives. Les autres bases sont déclarées négatives.

Considérons un espace vectoriel  $E$  euclidien orienté de dimension 2. Si  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  est une base positive alors le sens positif consiste à "aller de  $b_1$  à  $b_2$ ". Cela permet de définir la notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls.

**Définition B.0.15.** Soit  $(u, v)$  un couple de vecteurs non nuls. L'angle orienté entre  $u$  et  $v$  est l'unique angle  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que

- $\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$  ;
- $\sin(\theta)$  est strictement positif si  $(u, v)$  est une base positive.

# Annexe C

## Isométries d'un espace affine euclidien

### C.1 Rotations en dimension 2 et 3

Lors de la rédaction de cette annexe, nous avons consulté la référence [20]. Les notions présentées dans cette annexe sont utiles à la compréhension du chapitre 5.

**Définition C.1.1.** Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  deux espaces affines sur  $\vec{\mathcal{A}}$  et  $\vec{\mathcal{A}'}$ . Une application

$$\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$$

est affine si

$$\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{T}(P_i)$$

pour tous  $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$  et pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

**Théorème C.1.1.** Une application  $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  est affine si et seulement s'il existe une unique application linéaire

$$\vec{\mathcal{T}} : \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}'}$$

telle que

$$\mathcal{T}(P) = \mathcal{T}(O) + \vec{\mathcal{T}}(\vec{OP})$$

pour tout  $O, P \in \mathcal{A}$ .

**Définition C.1.2.** Soient  $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  une application affine et  $P \in \mathcal{A}$ . On dit que  $P$  est un point fixe si  $\mathcal{T}(P) = P$ .

**Définition C.1.3.** Une application  $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  est une isométrie si  $\mathcal{T}$  est une application qui préserve les distances. Cela signifie que

$$d(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B)) = d(A, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

**Proposition C.1.1.** Toute isométrie  $\mathcal{T}$  est affine et injective. L'application linéaire  $\vec{\mathcal{T}}$  est alors une isométrie vectorielle, au sens qu'elle préserve les normes et les produits scalaires de ses arguments.

**Définition C.1.4.** Une isométrie  $\mathcal{T}$  est positive si le déterminant de  $\vec{\mathcal{T}}$  est strictement positif.

**Définition C.1.5.** Une rotation est une isométrie positive avec au moins un point fixe.

**Définition C.1.6.** On définit

- $GL(n, \mathbb{R})$  comme étant le groupe linéaire des matrices réelles inversibles de dimension  $n$  ;
- $O(n, \mathbb{R})$  comme étant l'ensemble des isométries vectorielles de  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Décrivons en terme matriciel les éléments de  $O(n)$ . Soit  $A \in GL(n)$ ,

$$\begin{aligned} A \in O(n) &\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow u^T v = u^T A^T A v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow A^T A = I_n. \end{aligned}$$

Ainsi,  $O(n)$  est le groupe des matrices orthogonales de dimension  $n$ . On a

$$O(n) = \{A \in GL(n) : A^T A = I_n\}.$$

Le groupe  $O(n)$  est donc un sous-groupe de  $GL(n)$ .

**Définition C.1.7.** On définit  $SO(n)$  comme étant le groupe des matrices orthogonales dont le déterminant vaut 1. On a

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}.$$

Donc,  $SO(n)$  est un sous-groupe de  $O(n)$ .

En dimension 3,  $SO(3)$  s'interprète comme étant l'ensemble des rotations de  $\mathbb{R}^3$  qui fixent l'origine de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition C.1.2.** Une application affine  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  est une isométrie si et seulement si la matrice qui représente  $\vec{\mathcal{F}}$  dans une base orthonormée appartient à  $O(n)$ . Dans ce cas, toutes les valeurs propres de  $\vec{\mathcal{F}}$  sont de module 1.

*Démonstration.* Soit  $A$  la matrice qui représente  $\vec{\mathcal{F}}$  dans la base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ . Les colonnes de  $A$  sont les composantes de  $\vec{\mathcal{F}}(e_i)$  dans  $(e_1, \dots, e_n)$ . Or,  $(\vec{\mathcal{F}}(e_1), \dots, \vec{\mathcal{F}}(e_n))$  est une base orthonormée car

$$\langle \vec{\mathcal{F}}(e_i), \vec{\mathcal{F}}(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

□

Intéressons-nous à la forme générale des rotations en dimension 2 dans un repère orthonormé. Vu la définition C.1.5 et vu le théorème C.1.1, nous savons que

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(O) + \vec{\mathcal{F}}(\overrightarrow{OX})$$

pour tous points  $O$  et  $X$ . Choisissons le point  $O$  comme point fixe de la rotation, nous obtenons

$$\mathcal{F}(X) = O + \vec{\mathcal{F}}(\overrightarrow{OX}).$$

Dans un repère orthonormé où  $O$  est l'origine, on a

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où  $C_i$  est la composante de  $\vec{\mathcal{F}}(e_i)$  dans  $(e_1, e_2)$ . Notons  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Nous savons que  $A$  est une matrice orthogonale par la proposition précédente. Donc,

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \right| = 1$$

et il existe donc  $\theta \in [0, 2\pi[$  tel que

$$\begin{cases} a_{11} = \cos(\theta) \\ a_{21} = \sin(\theta) \end{cases}$$

Puisque  $A$  est une matrice orthogonale, il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Or,  $|k| = 1$  car

$$\left| \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right| = 1.$$

On en tire que  $A$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On rejette la seconde possibilité car le déterminant de cette matrice vaut  $-1$ . Ainsi, la forme générale des rotations en dimension 2 dans un repère orthonormé est donnée par

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où  $\theta$  appartient à  $[0, 2\pi[$  et est appelé angle de la rotation si la représentation est faite dans une base orthonormée positive.

**Proposition C.1.3.** *En dimension 3, toute rotation non triviale admet une droite de points fixes. On appelle cette droite, l'axe de la rotation.*

*Démonstration.* Fixons un repère orthonormé où l'origine  $O$  est fixe. Nous savons que la forme générale des rotations en dimension 3 dans un repère orthonormé est donnée par

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où  $M$  appartient à  $SO(3)$ . Chaque point fixe de la rotation correspond à un vecteur propre de valeur propre égale à 1 de  $M$ . Les valeurs propres de  $M$  satisfont

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda^3 + \dots + \det(M) &= 0. \end{aligned}$$

Par la proposition C.1.2, nous savons que toutes les valeurs propres de  $M$  sont de module 1. Il faut distinguer deux cas :

- le cas d'une valeur propre réelle  $r$  et de deux valeurs propres complexes conjuguées  $z$  et  $\bar{z}$ . On a

$$\det(M) = rz\bar{z} = 1$$

et donc l'espace propre de valeur propre 1 est de dimension 1.

- le cas de trois valeurs propres réelles  $v_1, v_2, v_3$ . Si  $v_1 = v_2 = v_3 = -1$  ou bien si  $v_1 = -1$  et  $v_2 = v_3 = 1$  alors le déterminant de  $M$  vaut  $-1$  ce qui n'est pas possible puisque  $M$  appartient à  $SO(3)$ . Si  $v_1 = v_2 = v_3 = 1$  alors la rotation considérée est l'identité. Il nous reste le cas où  $v_1 = v_2 = -1$  et  $v_3 = 1$  qui correspond à une droite de points fixes. En effet, si

$$\mathcal{T}(P) = \mathcal{T}(O) + \vec{\mathcal{T}}(\overrightarrow{OP})$$

où  $O$  est l'origine et où  $P$  est un point. Alors  $P$  est fixe

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow P &= \mathcal{T}(O) + \vec{\mathcal{T}}(\overrightarrow{OP}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{O\mathcal{T}(O)} + \vec{\mathcal{T}}(\overrightarrow{OP}) \\ \Leftrightarrow -\overrightarrow{O\mathcal{T}(O)} &= (\vec{\mathcal{T}} - \text{id})(\overrightarrow{OP}). \end{aligned}$$

Puisque ce système d'équations admet une solution, son ensemble de solutions définit une variété affine de dimension

$$n - \text{rg}(\vec{\mathcal{T}} - \text{id}) = \dim \ker(\vec{\mathcal{T}} - \text{id}).$$

C'est 1 sauf lorsque  $\vec{\mathcal{T}} = \text{id}$ , d'où la conclusion. □

**Proposition C.1.4.** *Le plan passant par l'origine  $O$  et orthogonal à l'axe  $a$  de la rotation  $\mathcal{T}$  est stabilisé par  $\mathcal{T}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\alpha$  le plan passant par  $O$  et orthogonal à l'axe  $a$ . Soit  $P$  un point du plan et montrons que  $P' = \mathcal{T}(P)$  appartient aussi à  $\alpha$ .

Puisque  $\overrightarrow{OP} \perp a$ , on a

$$\langle \overrightarrow{OP}, a \rangle = 0.$$

Alors,

$$\langle \overrightarrow{OP'}, a \rangle = \langle \vec{\mathcal{T}}(\overrightarrow{OP}), \vec{\mathcal{T}}(a) \rangle = \langle \overrightarrow{OP}, a \rangle = 0.$$

□

**Remarque C.1.1.** *Dans le repère  $\mathcal{R} = (O; (e_1, e_2, e_3))$ , la rotation d'axe  $e_3$  se représente par*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où  $\theta \in [0, 2\pi[$ .



# Annexe D

## Rudiments de topologie

Commençons par rappeler quelques notions élémentaires de topologie. Le lecteur désireux d'approfondir les différentes notions abordées peut consulter la référence [21].

**Définition D.0.1.** Soit  $X$  un ensemble quelconque. Une topologie sur  $X$  est une partie  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{P}(X)$  telle que

- toute union d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$  ;
- toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ .

Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont appelés les ouverts de la topologie. Le couple  $(X, \mathcal{T})$  est appelé un espace topologique.

**Définition D.0.2.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Une partie  $F$  de  $X$  est fermée si  $X \setminus F \in \mathcal{T}$ .

**Définition D.0.3.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $x \in X$ . Un sous-ensemble  $V \subset X$  est un voisinage de  $x$  si

$$\exists \omega \in \mathcal{T} : x \in \omega \subset V.$$

**Définition D.0.4.** Soit  $X$  un ensemble. Une distance sur  $X$  est une application

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$$

telle que

- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$  ;
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$  ;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ .

On dit que  $(X, d)$  est un espace métrique.

**Définition D.0.5.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Les boules ouvertes et fermées sont respectivement définies par

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in X : d(x, y) < r\} \\ B[x, r] &= \{y \in X : d(x, y) \leq r\}. \end{aligned}$$

On définit les sphères par

$$S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}.$$

**Définition D.0.6.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . Un point  $x \in X$  est intérieur à  $A$  si  $A$  appartient à l'ensemble des voisinages de  $x$ . L'intérieur de  $A$ , noté  $A^\circ$ , est l'ensemble des points  $x \in X$  intérieurs à  $A$ . C'est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ .

**Définition D.0.7.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . Un point  $x \in X$  est adhérent à  $A$  si tout voisinage de  $x$  rencontre  $A$ . L'adhérence de  $A$ , notée  $\overline{A}$ , est l'ensemble de tous les points adhérents à  $A$ . C'est le plus petit fermé qui contient  $A$ .

**Définition D.0.8.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ . La frontière de  $A$ , notée  $A^\bullet$ , est l'ensemble des points adhérents à  $A$  et à  $X \setminus A$  c'est-à-dire

$$A^\bullet = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

**Définition D.0.9.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est compact si de tout recouvrement ouvert de  $X$ , on peut extraire un recouvrement fini.

# Annexe E

## Rudiments de théorie des groupes

Nous présentons ici quelques notions de théorie des groupes nécessaires à la bonne compréhension du travail, dans le but de faciliter la lecture. L'ouvrage [2] peut être consulté pour plus de détails.

### E.1 Les groupes

Commençons par rappeler la définition d'un groupe. Nous en donnerons ensuite quelques exemples faisant le lien avec l'annexe C.

**Définition E.1.1.** *Un groupe  $G$  est un triplet  $(G, \circ, e)$  où  $G$  est un ensemble,  $\circ$  est une opération binaire sur  $G$ , c'est-à-dire une application  $\circ : G \times G \rightarrow G$ ,  $e$  est un élément de  $G$  et satisfaisant aux conditions suivantes :*

- (1)  $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$  (associativité de  $\circ$ );
- (2)  $\forall x \in G : x \circ e = x = e \circ x$  ( $e$  est neutre pour  $\circ$ );
- (3)  $\forall x \in G, \exists y \in G : x \circ y = e = y \circ x$ .

**Exemple E.1.1. (Groupe linéaire)**

*Il est clair que  $GL(n) = \{A \in \mathbb{R}_n^n : \det(A) \neq 0\}$  est un groupe. Nous savons que le produit matriciel est associatif.*

1. Si  $A_1, A_2 \in GL(n)$  alors

$$\det(A_1 A_2) = \det(A_1) \det(A_2) \neq 0.$$

*Ainsi,*

$$A_1 A_2 \in GL(n).$$

2.  $I_n \in GL(n)$  car  $\det(I_n) = 1 \neq 0$ .
3. Soit  $A \in GL(n)$ , a-t-on  $A^{-1} \in GL(n)$ ? La matrice  $A$  est bien inversible car son déterminant est non nul. On sait que

$$AA^{-1} = I_n.$$

*Donc,*

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

*Comme  $A \in GL(n)$ , on a*

$$\det(A) \neq 0.$$

*On en tire que*

$$\det(A^{-1}) \neq 0.$$

*Ainsi,*

$$A^{-1} \in GL(n).$$

**Exemple E.1.2. (Groupe orthogonal)**

Pour montrer que  $O(n) = \{A \in GL(n) : A^T A = I_n\}$  est un groupe, il suffit de montrer que  $O(n)$  est un sous-groupe de  $GL(n)$ . Cela est fait dans l'exemple E.2.2.

**Exemple E.1.3. (Groupe spécial orthogonal)**

On a  $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$  est un groupe puisque  $SO(n)$  est un sous-groupe de  $O(n)$  par E.2.3.

**Exemple E.1.4. (Le cercle)**

L'ensemble  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  muni de la multiplication des nombres complexes est un groupe. En effet,  $S^1$  est un sous-groupe de  $\mathbb{C}_0$  par E.2.4.

Rappelons la définition d'un homomorphisme de groupe ainsi que celle d'un isomorphisme de groupe.

**Définition E.1.2.** Deux groupes  $G$  et  $H$  sont homomorphes s'il existe une application

$$\varphi : G \rightarrow H$$

telle que

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour tous  $x, y \in G$ . On dit que  $\varphi$  est un homomorphisme entre  $G$  et  $H$ . Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme.

**Exemple E.1.5.** Le groupe  $S^1$  est isomorphe au groupe  $SO(2)$ . En effet, un isomorphisme entre  $S^1$  et  $SO(2)$  est donné par

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 &\rightarrow SO(2) \\ e^{i\theta} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$ . Il est clair que  $\varphi$  est une bijection. Vérifions que

$$\varphi(e^{i\theta}e^{i\psi}) = \varphi(e^{i\theta})\varphi(e^{i\psi})$$

pour tous  $e^{i\theta}, e^{i\psi} \in S^1$ , pour tous  $\theta, \psi \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} \varphi(e^{i\theta}e^{i\psi}) &= \varphi(e^{i(\theta+\psi)}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \psi) & -\sin(\theta + \psi) \\ \sin(\theta + \psi) & \cos(\theta + \psi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \varphi(e^{i\theta})\varphi(e^{i\psi}) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) - \sin(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\theta)\sin(\psi) - \sin(\theta)\cos(\psi) \\ \sin(\theta)\cos(\psi) + \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\theta)\cos(\psi) - \sin(\theta)\sin(\psi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \psi) & -\sin(\theta + \psi) \\ \sin(\theta + \psi) & \cos(\theta + \psi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

## E.2 Groupe cyclique

Débutons cette section par définir ce qu'on entend par sous-groupe cyclique.

**Définition E.2.1.** *Un groupe  $G$  est cyclique s'il existe un  $x \in G$  tel que  $G = \langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ . Autrement dit,  $G$  est cyclique si tout élément de  $G$  s'écrit comme une puissance d'un élément de  $G$  fixé à l'avance. Si  $G = \langle x \rangle$ , on dit que  $x$  est le générateur de  $G$ .*

**Exemple E.2.1.**

- L'ensemble des nombres entiers  $\mathbb{Z}$  est un groupe cyclique car

$$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle.$$

- L'ensemble  $U_n$  des racines  $n$ -èmes de l'unité est un groupe cyclique car

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} = \langle e^{\frac{2ik\pi}{n}} : 0 \leq k \leq n-1 \rangle, n \in \mathbb{N}_0.$$

**Définition E.2.2.** *Soit  $G = (G, \circ, e)$  un groupe et soit  $H$  un ensemble tel que  $H \subseteq G$ . On dit que  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et on note  $H < G$  si*

1.  $x, y \in H \Rightarrow x \circ y \in H$  ;
2.  $e \in H$  ;
3.  $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ .

**Exemple E.2.2** ( $O(n) < GL(n)$ ).

*Il est clair que  $O(n) \subseteq GL(n)$ . De plus,*

- (1) Si  $A_1, A_2 \in O(n)$  alors

$$(A_1 A_2)^\top A_1 A_2 = A_2^\top A_1^\top A_1 A_2 = I_n.$$

- (2) Bien sûr,  $I_n \in O(n)$ .

- (3) Si  $A \in O(n)$  alors  $A^{-1} \in O(n)$  vu l'exemple E.1.2.

**Exemple E.2.3** ( $SO(n) < O(n)$ ).

*Il est clair que  $SO(n) \subseteq O(n)$ . De plus,*

- (1) Si  $A_1, A_2 \in SO(n)$  alors

$$\det(A_1 A_2) = \det(A_1) \det(A_2) = 1$$

*et donc*

$$A_1 A_2 \in SO(n).$$

- (2) Bien sûr,  $I_n \in SO(n)$ .

- (3) L'exemple E.1.3 montre que si  $A \in SO(n)$  alors  $A^{-1} \in SO(n)$ .

**Exemple E.2.4** ( $S^1 < \mathbb{C}_0$ ).

*Il est clair que  $S^1 \subseteq \mathbb{C}_0$ .*

- (1) Si  $z_1, z_2 \in S^1$ , alors

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 1.$$

- (2) Bien sûr,  $|1| = 1$ .

- (3) Si  $z \in S^1$ , a-t-on  $z^{-1} \in S^1$  ? Oui, car

$$|z^{-1}| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1.$$

**Exemple E.2.5** ( $U_n < S^1$ ).

Clairement,  $U_n \subseteq S^1$ . De plus,

1. Soit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Si  $z_1, z_2 \in U_n$ , alors

$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1.$$

2. Puisque  $1^n = 1$ ,  $1 \in U_n$ .

3. Soient  $n \in \mathbb{N}_0$  et  $z \in U_n$ . On a

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1.$$

Ainsi,  $z^{-1} \in U_n$ .

**Proposition E.2.1.** (*Classification des sous-groupes finis de  $S^1$* )

Tout sous-groupe fini de  $S^1$  est un sous-groupe cyclique.

*Démonstration.* Soit  $G$  un sous-groupe fini à  $n + 1$  éléments de  $S^1$ . Alors, il existe

$$0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < 2\pi$$

tels que

$$G = \{1, e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}\}.$$

Prouvons que  $G$  est engendré par  $e^{i\theta_1}$ . Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe  $l \in \{2, \dots, n\}$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que

$$k\theta_1 < \theta_l < (k+1)\theta_1.$$

On a alors

$$0 < \theta_l - k\theta_1 < \theta_1$$

et finalement,

$$e^{i(\theta_l - k\theta_1)} = e^{i\theta_l} e^{-ik\theta_1} \in G$$

d'où une contradiction avec la minimalité de  $\theta_1$ .

□

## E.3 Action d'un groupe sur un ensemble

Avant d'entrer dans le vif du sujet de cette section, intéressons-nous au groupe des permutations.

**Définition E.3.1.** Une permutation d'un ensemble  $X$  est une bijection de  $X$  dans lui-même.

L'ensemble de toutes les permutations de  $X$  forme un groupe  $S_X$  sous la composition d'applications de  $X$  dans  $X$ . On l'appelle *groupe symétrique* de l'ensemble  $X$ . On a  $(S_X, \circ)$  est un groupe car

- (1) La composition de fonctions bijectives est une bijection.
- (2) L'identité est une application bijective.
- (3) Si  $f$  est une bijection alors  $f^{-1}$  est une bijection.

**Remarque E.3.1.** Dans le cas particulier où  $X = \{1, \dots, n\}$ , on note  $S_n$  le groupe symétrique de  $X$ .

Intéressons-nous à la notion d'action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$ .

**Définition E.3.2.** Une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $S_X$ . On dit que le groupe  $G$  opère ou qu'il agit sur l'ensemble  $X$ .

Examinons plus en détail cette définition. Soit

$$\varphi : G \rightarrow S_X$$

un homomorphisme. Pour tout élément  $g$  du groupe  $G$ ,  $\varphi$  nous donne une permutation  $\varphi(g)$  des points de  $X$ . Si  $g, h \in G$ , alors

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$$

puisque  $\varphi$  est un homomorphisme. Afin d'alléger les notations, nous écrirons  $g.x$  au lieu de  $\varphi(g)(x)$  pour désigner l'image du point  $x \in X$  sous la permutation correspondant à  $g$ . Dès lors, si  $g, h \in G$  et si  $x \in X$ , on a

$$(g.h).x = g.(h.x).$$

Souvent, nous dirons que l'élément  $g$  du groupe  $G$  envoie le point  $x \in X$  sur le point  $g(x) \in X$ . Nous pouvons donc également définir une action d'un groupe sur un ensemble de la manière suivante :

**Définition E.3.3.** Soit  $(G, \circ, e)$  un groupe. On dit que  $G$  agit sur l'ensemble  $X$  si chaque  $g \in G$  détermine une bijection  $b_g : X \rightarrow X$  satisfaisant

$$(1) b_e = \text{id}_X ;$$

$$(2) \forall g_1, g_2 \in G : b_{g_1 \circ g_2} = b_{g_1} \circ b_{g_2}.$$

**Exemple E.3.1.**

- Le groupe des entiers  $(\mathbb{Z}, +, 0)$  agit sur l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  par translation. L'entier  $n$  envoie le nombre réel  $x$  sur  $n + x$ . Il s'agit bien d'une action puisque si  $m$  et  $n$  sont des entiers et si  $x$  est un réel, on a

$$(1) 0 + x = x ;$$

$$(2) (m + n) + x = m + (n + x).$$

- Le groupe  $S^1$  agit sur l'ensemble des complexes  $\mathbb{C}$  par rotation. L'élément  $e^{i\theta}$  de  $S^1$  envoie le nombre complexe  $z$  sur  $e^{i\theta}z$ . Vérifions qu'il s'agit bien d'une action. Soient  $e^{i\theta}$  et  $e^{i\theta'}$  deux éléments de  $S^1$  et soit  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$(1) 1z = z ;$$

$$(2) (e^{i\theta}e^{i\theta'})z = e^{i\theta}(e^{i\theta'}z).$$

- Soit  $G < SO(3)$ . Alors  $G$  agit sur la sphère  $S^2$ . La matrice  $A \in G$  envoie  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S^2$  sur

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Il s'agit bien d'une action. En effet, soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $G$ ,  $I$  la

matrice identité et soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S^2$ , on a

$$(1) I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$(2) (AB) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \left( B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right).$$

Une action de groupe permet de "déplacer" les points d'un ensemble. Intéressons-nous à tous les points que l'on peut atteindre à partir d'un point donné ainsi qu'à l'ensemble des éléments du groupe qui laisse fixe les éléments de l'ensemble.

**Définition E.3.4.** *Étant donné une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  et un point  $x \in X$ , on définit l'orbite de  $x$  par*

$$O_x = \{g.x : g \in G\}.$$

**Définition E.3.5.** *Étant donné une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  et un point  $x \in X$ , le stabilisateur de  $x \in X$  est défini par*

$$G_x = \{g \in G : g.x = x\}.$$

Le stabilisateur  $G_x$  de  $x \in X$  est un sous-groupe de  $G$ . Il est clair que  $G_x \subseteq G$ . De plus,

(1) Si  $g_1, g_2 \in G_x$ , alors

$$(g_1 \circ g_2).x = g_1(g_2.x) = g_1.x = x.$$

(2) Il est clair que  $e \in G_x$ .

(3) Si  $g \in G_x$ , alors

$$g.x = x.$$

En appliquant  $g^{-1}$  aux deux membres de l'égalité, nous obtenons

$$e.x = x = g^{-1}.x$$

d'où la conclusion.

### Exemple E.3.2.

- *Considérons à nouveau le groupe  $(\mathbb{Z}, +, 0)$  agissant sur l'ensemble des réels par translation. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors, l'orbite de  $x$  est donnée par*

$$O_x = \{n + x : n \in \mathbb{Z}\}.$$

*Le stabilisateur de  $x$  est donné par le sous-groupe trivial  $\{0\}$  de  $\mathbb{Z}$ . On a*

$$G_x = \{0\}.$$

- *Concernant l'action du groupe  $S^1$  sur l'ensemble des complexes. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . L'orbite de  $z$  est donnée par*

$$O_z = \{ze^{i\theta}\}$$

*et son stabilisateur est*

$$G_z = \{1\}.$$

### Proposition E.3.1. (Partition)

*Une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  détermine une partition de  $X$ .*

*Démonstration.* L'action de  $G$  sur  $X$  détermine une relation d'équivalence sur  $X$  définie par  $x \sim y$  si et seulement si il existe  $g \in G$  tel que  $x = g.y$ . Il s'agit bien d'une relation d'équivalence. En effet, on a

(1) réflexivité : on a  $x = e.x$ .



(2) symétrie : si  $x \sim y$ , alors il existe  $g \in G$  tel que

$$x = g.y.$$

En appliquant  $g^{-1}$  aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$y = g^{-1}.x$$

et donc  $y \sim x$ .

(3) transitivité : si  $x \sim y$  et si  $y \sim z$ , montrons que  $x \sim z$ . On sait qu'il existe  $g, g' \in G$  tels que

$$x = g.y \quad \text{et} \quad y = g'.z.$$

On en tire que

$$x = gg'.z$$

et donc  $x \sim z$ .

□

**Définition E.3.6.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Si  $g \in G$ , alors on note  $gH$  la classe latérale à gauche définie par

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

**Définition E.3.7.** L'ensemble des classes latérales à gauche selon  $H$  est appelé quotient à gauche de  $G$  par  $H$  et est noté  $(G/H)_l$ . On a

$$(G/H)_l = \{gH : g \in G\}.$$

Le cardinal de  $(G/H)_l$  est appelé indice de  $H$  dans  $G$  et est noté  $[G : H]$ .

**Proposition E.3.2.** Pour tout  $g \in G$ , on a

$$|gH| = |H|.$$

*Démonstration.* Soit  $g \in G$ , nous devons montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : H &\Rightarrow gH \\ h &\mapsto gh \end{aligned}$$

est une bijection. C'est clairement le cas puisque cette application possède un inverse donné par

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : gH &\Rightarrow H \\ gh &\mapsto g^{-1}gh = h, \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

□

**Théorème E.3.1. (Lagrange)**

Soient  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Alors

$$|G| = |H| [G : H]$$

où  $|G|$  désigne le cardinal de  $G$ .

*Démonstration.* On partitionne  $G$  en classes. Par la proposition E.3.2, nous savons que chaque classe contient le même nombre d'éléments que  $H$ . Ainsi, on a

$$|H| [G : H] = |G|.$$

□

**Théorème E.3.2.** *Soit  $x \in X$  et soit  $G$  un groupe agissant sur  $X$ . Alors l'application*

$$\begin{aligned} f : O_x &\rightarrow G/G_x \\ g.x &\mapsto gG_x \end{aligned}$$

*est une bijection.*

*Démonstration.* Il est clair que  $f$  est surjectif. Montrons que  $f$  est injectif. Si  $gG_x = g'G_x$ , alors  $g = g'h$  où  $h \in G_x$ . On a alors

$$g.x = (g'h).x.$$

Par définition d'une action, on obtient

$$(g'h).x = g'.(h.x).$$

Puisque  $h \in G_x$ , on obtient finalement que

$$g.x = (g'h).x = g'.(h.x) = g'.x$$

d'où la conclusion.

□

**Proposition E.3.3.** *Si  $G$  est un groupe agissant sur  $X$  et si  $G$  et  $X$  sont finis, alors on a*

$$|G| = |G_x| |O_x|$$

*pour tout  $x \in X$ .*

*Démonstration.* Nous savons que  $G_x$  est un sous-groupe de  $G$ . Donc, par le théorème E.3.1, on a

$$|G| = |G_x| [G : G_x].$$

Par le théorème E.3.2, on sait que

$$f : O_x \rightarrow G/G_x$$

est une bijection. On en tire que

$$|O_x| = [G : G_x].$$

Ainsi,

$$|G| = |G_x| |O_x|.$$

□

**Théorème E.3.3. (Formule de décomposition en orbites)**

*Si le groupe  $G$  agit sur l'ensemble fini  $X$ , alors*

$$|X| = \sum_{x \in Y} |O_x| = \sum_{x \in Y} |G/G_x|$$

*où  $Y$  est un sous-ensemble de  $X$  contenant un et un seul point de chaque orbite.*

*Démonstration.* Par la proposition E.3.1, il est clair que les  $O_x$  forment une partition de  $X$ . Par le théorème E.3.2, on sait que l'application

$$\begin{aligned} f : O_x &\rightarrow G/G_x \\ g.x &\mapsto gG_x \end{aligned}$$

est une bijection ; d'où la conclusion.

□

# Bibliographie

- [1] AIGNER, Martin et Günter M. ZIEGLER. *Proofs from THE BOOK*. 5<sup>e</sup> éd. Berlin : Springer-Verlag, 2014.
- [2] ARMSTRONG, M.A. *Groups and Symmetry*. New-York : Springer-Verlag, 1988. ISBN 0-387-96675-7.
- [3] BERGER, Marcel. *Géométrie. 3, convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes*. Vol. 3 : *Géométrie. 3, convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes*. Vol. 3. Paris : CEDIC, 1978. ISBN 2712407032.
- [4] BOROWSKI, E. J. et J. M. BORWEIN. *Collins Web-Linked Dictionary of Mathematics*. 2<sup>e</sup> éd. New-York : HarperCollins, 2005.
- [5] BRØNDSTED, Arne. *An Introduction to Convex Polytopes*. New-York : Springer New York, NY, 1983. 162 p. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 978-0-387-90722-2.
- [6] BRONSHTEIN, I. N., K. A. SEMENDYAYEV, G. MUSIOL et H. MUEHLIG. *Handbook of Mathematics*. 4<sup>e</sup> éd. Berlin : Springer, 2003.
- [7] CAUCHY, Augustin-Louis. *Sur les polygones et les polyèdres : Second mémoire*. 1813. Sous la dir. de POLYTECHNIQUE, Journal de l'École.
- [8] COXETER, H. S. M. et S. L. GREITZER. *Geometry Revisited*. Washington D.C. : Math. Assoc. Amer, 1967. 193 p.
- [9] COXETER, Harold Scott Macdonald. Regular and semiregular polyhedra. *In : Shaping Space*, New York, NY : Springer New York, 2012, p. 41-52.
- [10] COXETER, Harold Scott Macdonald. *Regular polytopes. Regular polytopes*. 2nd ed. New York, NY : MacMillan, 1963. (Macmillan mathematics paperbacks).
- [11] CROMWELL, Peter Richard. *Polyhedra : "One of the most charming chapters of geometry"*. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. XIII, 451 p. ISBN 9780521554329.
- [12] ESCULIER, Alain. Disponible via l'URL <<http://aesculier.fr/>> (consulté le 2 mars 2023).
- [13] FERRÉOL, Robert. *POLYGONE : Polygon, Vieleck*. 2009. Disponible via l'URL <<https://mathcurve.com/polyedres/polygone/polygone.shtml>> (consulté le 11 octobre 2022).
- [14] FERRÉOL, Robert. *POLYÈDRE : Polyhedron, Polyeder*. 2021. Disponible via l'URL <<https://mathcurve.com/polyedres/polyedre/polyedre.shtml>> (consulté le 11 octobre 2021).
- [15] GELLERT, W., S. GOTTWALD, M. HELLWICH, H. KÄSTNER et H. KÜNSTNER. *VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*. 2<sup>e</sup> éd. New-York : Van Nostrand Reinhold, 1989.
- [16] GRÜNBAUM, Branko. *Convex polytopes. Convex polytopes*. London : Interscience, 1967. (Pure and applied mathematics, 16). Sous la dir. de COURANT, R.

- [17] HEATH, Thomas Little. *The thirteen books of Euclid's elements*. 2<sup>e</sup> éd. Vol. 3. Dover Publications, 1965.
- [18] KLEIN, Felix. *Lectures on Icosahedron*. London. Disponible via l'URL <<https://archive.org/details/lectures-on-icosahedron-felix-klein-george-gavin-morrice/page/x/mode/2up>>. 289 p. Trad. de l'allemand par George Gavin MORRICE.
- [19] LEBESGUE, Henri. *Sur l'égalité des polyèdres convexes*. 1909.
- [20] MATHONET, Pierre. *Géométrie*. Université de Liège, 2017. Disponible via l'URL <[http://www.geodiff.ulg.ac.be/geometrie/Geom2016\\_2017.pdf](http://www.geodiff.ulg.ac.be/geometrie/Geom2016_2017.pdf)>.
- [21] MATHONET, Pierre. *Topologie générale*. Université de Liège. Disponible via l'URL <<http://www.geodiff.ulg.ac.be/topologie/NotesTopologie.pdf>> (consulté le 5 avril 2021).
- [22] POINSOT, Louis. *MÉMOIRE : SUR LES POLYGONES ET LES POLYÈDRES*. École polytechnique (Palaiseau, Essonne), 1810. Disponible via l'URL <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433667x/f43.item.texteImage>> (consulté le 2 mars 2023).
- [23] *Polygone*. 2022. Disponible via l'URL <<https://fr.wikipedia.org/wiki/Polygone>> (consulté le 12 octobre 2022).
- [24] RIGO, Michel. *Théorie des graphes*. Université de Liège, 2010. Disponible via l'URL <[http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main\\_graphes.pdf](http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_graphes.pdf)> (consulté le 10 août 2022).
- [25] SCHLÄFLI, Ludwig. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Vol. 1. 392 p.
- [26] SCHOENBERG, I. J. et S. K. ZAREMBA. *On Cauchy's Lemma Concerning Convex Polygons*. 1967. Disponible via l'URL <<https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics/article/on-cauchys-lemma-concerning-convex-polygons/D0AB5BF0B0D290DBD32E4F36B70CC015>>. Sous la dir. de MATHEMATICS, Canadian Journal of.
- [27] VERBERT, Jeanne. *Des solides de Platon aux polyèdres de Goldberg*. Mém. de mast. Université de Liège. Disponible via l'URL <<http://hdl.handle.net/2268.2/12687>>. Liège, 2021. 159 p.
- [28] VILLARINO, Mark. On the archimedean or semiregular polyhedra. *Elemente der Mathematik*. 2008, 63 (2), p. 76-87. ISSN 0013-6018.
- [29] WEISSTEIN, Eric. *Polygon*. Disponible via l'URL <<https://mathworld.wolfram.com/Polygon.html#:~:text=A%20polygon%20can%20be%20defined,with%20the%20line%20segments%20joining>> (consulté le 14 octobre 2022).
- [30] WEYL, Hermann. *Symmetry*. Princeton : Princeton University Press, 1952. 168 p.