



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Le théorème de Rado–Hall au service de l’algèbre linéaire et de la théorie des graphes

Mémoire de fin d’études présenté en vue de l’obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique

Année académique 2022-2023

Auteur :
Laura LAMBERT

Promoteur :
Michel RIGO

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon promoteur, Michel Rigo, de m'avoir transmis le goût des mathématiques discrètes lors des cours de bachelier qu'il a dispensés. Je le remercie également pour sa disponibilité, ses relectures et ses nombreux conseils prodigués tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je pense aussi à ma sœur Thelma, à notre passion commune et aux innombrables discussions mathématiques que nous avons pu partager ces dernières années. Je tiens également à remercier mes parents et Maxime pour leur soutien sans faille durant ces cinq années, avec une reconnaissance toute particulière à ma maman pour sa présence et son écoute.

Table des matières

1	Rappels	9
1.1	Rappels d'algèbre linéaire	9
1.2	Rappels de théorie des graphes	15
2	Théorème de Rado–Hall	21
2.1	Matroïdes	21
2.2	Théorème de Rado–Hall	44
2.3	Première application à la théorie des graphes	47
3	Théorème de Gale–Ryser	55
3.1	Ensembles $\mathcal{B}(L, C)$ de matrices et formulations équivalentes	55
3.2	Théorème de Gale–Ryser	59
3.3	D'autres ensembles de matrices	65
4	Théorème de Landau	73
4.1	Tournois et théorème de Landau	73
4.2	Un tournoi particulier	84
4.3	Propriétés spectrales des matrices de tournoi	92
A	Théorème de Perron–Frobenius	107
A.1	Rappels	107
A.2	Théorème de Perron–Frobenius	108

Introduction

La *théorie des graphes* est un domaine des mathématiques qui permet de modéliser une grande variété de problèmes. Un *graphe* est la donnée d'un couple (V, E) pour lequel V est un ensemble généralement fini et E une relation binaire définie sur V . Mentionnons brièvement trois exemples classiques d'applications. Nous pouvons nous servir de ce modèle pour résoudre des problèmes d'incompatibilité lors du transport de produits chimiques. Dans ce cas, les *sommets* du graphe, c'est-à-dire les éléments de l'ensemble V , représentent les différents produits chimiques et deux sommets sont reliés par une *arête*, c'est-à-dire un élément de l'ensemble E , s'ils sont incompatibles lors du transport. Si nous cherchons le plus petit nombre de wagons nécessaires pour transporter l'ensemble des produits, le problème peut se ramener au coloriage d'un graphe et à la recherche du plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes en donnant deux couleurs distinctes à deux arêtes qui ont une extrémité commune. La théorie des graphes permet également de modéliser un *tournoi* lors duquel chaque joueur rencontre tous les autres participants sans possibilité d'obtenir un résultat de match nul. Il est naturel de chercher une méthode qui permet d'établir un classement entre les joueurs du tournoi. Le problème du voyageur de commerce ou, de manière plus générale, la recherche d'un ordre optimal pour une tournée peuvent aussi être modélisés grâce à la théorie des graphes.

Les liens forts qui existent entre l'algèbre linéaire et la théorie des graphes ont permis de développer ce que l'on appelle communément la *théorie algébrique des graphes*. Par exemple, tout graphe peut être associé à sa matrice d'adjacence et l'algèbre linéaire permet alors de déduire des informations sur le graphe de départ, comme par exemple une formule de récurrence pour le nombre de chemins de longueur n liant deux sommets fixés. La matrice d'adjacence est également utilisée dans l'algorithme de PageRank dont se sert Google pour trier ses pages Web, en prenant appui sur le célèbre *théorème de Perron*. Nous présentons dans ce travail des résultats tantôt relatifs aux graphes, tantôt associés aux matrices. Ceux-ci présentent comme point commun principal le *théorème de Rado–Hall*. Ce dernier date des années 1930 et nous permet notamment de démontrer les *théorèmes de Gale–Ryser* et de *Landau*, énoncés tous deux dans les années 1950. Ces résultats sont brièvement décrits ci-après. La référence principale utilisée pour écrire ce mémoire est le livre *The mutually beneficial relationship of graphs and matrices* de Richard Anthony Brualdi [4]. Datant de 2011, cet ouvrage développe dix thématiques liant l'algèbre linéaire et la théorie des graphes. Nous avons donc choisi de nous intéresser à celles qui font intervenir, de près ou de loin, le théorème de Rado–Hall. Notre travail s'articule autour de quatre chapitres auxquels vient se greffer une annexe indépendante. Tout au long de ce mémoire, de nombreux exemples sont proposés au lecteur dans l'espoir de favoriser la compréhension.

Le premier chapitre propose quelques rappels élémentaires et nous permet de fixer les notations. Le lecteur initié n'y apprend que peu de choses. A contrario, le lecteur profane peut y retrouver les notions abordées dans la suite de ce travail. Nous nous permettons tout de même d'y rappeler et étendre le résultat classique qui affirme que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle de dimension n sont réelles et que nous pouvons, dans

ce cas, trouver une base de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres. L'utilisation qui en est faite au deuxième chapitre concerne le lien entre les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle et les valeurs propres de ses sous-matrices principales et porte le nom de *propriété d'entrelacement des valeurs propres*.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons le concept de *matroïdes définis sur un ensemble fini* X . Il s'agit de structures combinatoires qui généralisent la notion d'indépendance linéaire. Nous définissons axiomatiquement les parties de X qui sont dites *indépendantes*. Nous montrons qu'il existe des exemples de matroïdes dans bien des domaines mathématiques et en particulier en théorie des graphes. Nous abordons les notions de *circuit*, *base*, *rang* (qui est le cardinal d'un ensemble indépendant maximal au sens de l'inclusion) et *fermeture* associées à un matroïde donné et nous montrons comment définir un matroïde à partir de deux matroïdes préexistants. Nous terminons cette introduction aux matroïdes en généralisant l'algorithme de Kruskal qui permet de trouver un arbre couvrant de poids maximum dans un graphe.

Par la suite, nous considérons un ensemble fini X sur lequel un matroïde est fixé. Si $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ est une famille finie de sous-ensembles de X , nous définissons un *système indépendant de représentants distincts* de \mathcal{F} comme étant une famille (x_1, \dots, x_m) d'éléments deux à deux distincts telle que x_i appartient à F_i pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et l'ensemble $\{x_1, \dots, x_m\}$ est indépendant au sens des matroïdes. Nous démontrons ensuite le *théorème de Rado–Hall*. Celui-ci affirme que si ρ dénote la fonction rang du matroïde considéré, alors la famille finie $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ de sous-ensembles de X possède un système indépendant de représentants distincts si et seulement si pour tout sous-ensemble d'indices $K \subseteq \{1, \dots, m\}$, on a

$$\rho \left(\bigcup_{k \in K} F_k \right) \geq |K|,$$

où $|K|$ représente le cardinal de l'ensemble K . Nous pouvons en déduire une caractérisation des sous-familles de $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ qui possèdent un système indépendant de représentants distincts.

Nous terminons ce chapitre en démontrant le *théorème de Graham–Pollak* qui fournit une borne inférieure pour le nombre minimum de sous-graphes bipartis complets nécessaires pour partitionner les arêtes d'un graphe donné. Combiné au théorème de Rado–Hall, il permet alors de trouver dans un graphe une forêt d'une forme bien particulière (voir théorème 2.45).

Le troisième chapitre se donne pour objectif d'étudier les ensembles de matrices binaires qui possèdent un nombre fixé de 1 et de 0 sur chaque ligne et chaque colonne. Par exemple, si l'on demande que toutes les lignes et toutes les colonnes contiennent un unique élément égal à 1, les matrices de permutation vérifient cette propriété. Par contre, nous pouvons facilement nous convaincre qu'il n'existe aucune matrice carrée de dimension 2 possédant deux éléments égaux à 1 sur chaque ligne et un seul élément égal à 1 sur chaque colonne. Nous commençons par envisager deux formulations équivalentes à ce problème en termes

de graphes et de familles de sous-ensembles. Au vu des exemples qui précèdent, la question naturelle qui se pose ensuite est de caractériser les contraintes, portant sur le nombre fixé de 1 sur chaque ligne et chaque colonne, pour lesquelles de telles matrices existent. Le *théorème de Gale–Ryser* nous permet de répondre à ce problème. Une de ses démonstrations s’appuie sur le théorème de Rado–Hall puisque nous pouvons établir une bijection entre les éventuelles matrices de l’ensemble considéré et les éventuels systèmes indépendants de représentants distincts d’une famille de sous-ensembles bien choisie.

Enfin, nous étendons le concept précédent aux matrices à coefficients naturels. A nouveau, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour l’existence de telles matrices. Dans un second temps, nous envisageons une généralisation de ces ensembles de matrices. Là encore, nous donnons une caractérisation de l’existence d’une matrice dans un tel ensemble (voir théorème 3.15). Nos développements permettent en outre d’obtenir un algorithme pour construire une matrice de l’ensemble souhaité, pour autant que celui-ci soit non vide bien entendu.

Le quatrième chapitre se propose d’étudier quelques résultats relatifs aux *tournois*, c’est-à-dire aux graphes complets dont les arêtes ont été orientées. A chaque tournoi sont associés un *vecteur de score* et un *vecteur de perte*, représentant respectivement les demi-degrés entrants et sortants de chaque sommet du graphe. Par exemple, la figure 1 représente un tournoi à 5 joueurs. Le vecteur de score de ce tournoi est donné par

$$S = (3, 2, 1, 3, 1)$$

et son vecteur de perte est donné par

$$P = (1, 2, 3, 1, 3).$$

En particulier, l’ensemble des tournois dont le vecteur de score est $(3, 2, 1, 3, 1)$ est non vide. Nous commençons donc par caractériser les vecteurs de naturels qui sont les vecteurs de score d’un tournoi. C’est l’objet du *théorème de Landau* qui peut être vu comme un cas particulier du théorème de Rado–Hall.

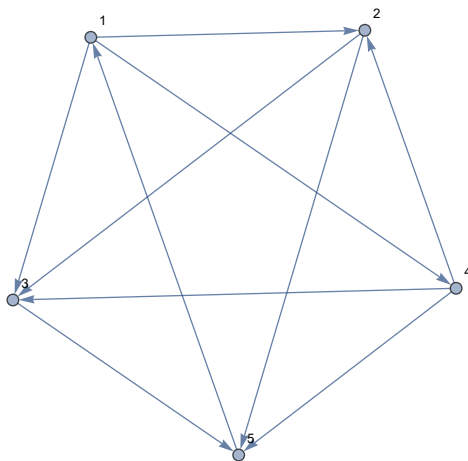


FIGURE 1 – Un tournoi à 5 joueurs.

Nous introduisons ensuite la notion de *tournoi transitif* et montrons qu'à partir d'un vecteur de score donné, il est possible de trouver un tournoi dont les sommets peuvent être partitionnés en deux sous-ensembles qui induisent chacun un tournoi transitif. Le parcours théorique réalisé nous fournit en outre deux nouvelles caractérisations des vecteurs de naturels qui sont les vecteurs de score d'un tournoi.

Pour finir, nous démontrons quelques propriétés spectrales des *matrices de tournoi*, c'est-à-dire des matrices d'adjacence d'un tournoi. En particulier, tout comme pour un graphe orienté fortement connexe, le rayon spectral d'une telle matrice en est une valeur propre et nous donnons une borne supérieure pour celui-ci. Nous montrons enfin que les valeurs propres d'une matrice de tournoi ne peuvent pas être toutes strictement positives.

Finalement, l'annexe à ce travail propose une démonstration du *théorème de Perron–Frobenius*. Celui-ci permet essentiellement de montrer que le rayon spectral d'une matrice positive et irréductible en est une valeur propre simple. Une vaste littérature existe au sujet du théorème de Perron–Frobenius. Nous avons fait le choix de suivre les arguments de Allouche et Shallit dans leur livre *Automatic sequences : Theory, applications, generalizations* [1]. Cela nous mène notamment à introduire la *fonction de Collatz–Wielandt* associée à une matrice. La dernière proposition du chapitre nous permet d'apporter quelques résultats supplémentaires lorsque nous travaillons avec une matrice strictement positive.

1 Rappels

Le but de ces rappels est de fixer les notations qui seront utilisées tout au long de ce travail. Nous présentons également quelques résultats complémentaires concernant les valeurs propres des matrices symétriques réelles.

1.1 Rappels d'algèbre linéaire

Les notions d'*espace vectoriel*, d'*indépendance linéaire*, de *base (orthonormée)*, de *dimension* (que l'on notera \dim), de *sous-espace vectoriel* et d'*application linéaire* sont supposées connues et ne seront donc pas rappelées ici. Le lecteur pourra retrouver les définitions et résultats nécessaires dans les notes de cours [19].

Soient m et n deux naturels non nuls. Rappelons qu'une *matrice de dimension $m \times n$ et à coefficients dans le champ \mathbb{K}* est un tableau rectangulaire d'éléments de \mathbb{K} formé de m lignes et de n colonnes. Elle est notée $A = (A_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et est représentée par

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbb{K}^{m \times n}$ l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ et à coefficients dans le champ \mathbb{K} . Notons que les coefficients de la matrice A seront également appelés ses *éléments*, ses *entrées* ou ses *composantes*. Lorsque $m = n$, la matrice A est dite *carrée*. On la note alors $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on dit qu'elle est de dimension n .

Les notions de *matrice triangulaire*, de *matrice transposée* (que l'on notera \tilde{A}), de *matrice symétrique*, de *matrice hermitienne*, de *sous-matrice*, de *déterminant* (que l'on notera \det), de *rang* (que l'on notera rg), de *matrice inversible* ou *singulière*, de *valeur propre*, de *spectre*, de *vecteur propre*, de *sous-espace propre*, de *multiplicité géométrique*, de *multiplicité algébrique*, de *trace* (que l'on notera tr) et de *matrice nilpotente* sont supposées connues et ne seront donc pas rappelées ici. Le lecteur pourra une fois encore retrouver les définitions et résultats nécessaires dans les notes de cours [19].

Si A et B sont des matrices réelles de dimension $m \times n$, alors on note $A \leq B$ si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$A_{i,j} \leq B_{i,j}.$$

La comparaison entre les deux matrices A et B a donc lieu composante à composante. Une matrice A est dite *positive* (respectivement *strictement positive*) si tous ses éléments sont positifs¹ (respectivement strictement positifs). On écrit dans ce cas $A \geq 0$ (respectivement $A > 0$).

Une *matrice de permutation* est une matrice carrée dont chaque ligne et chaque colonne contient exactement un élément égal à 1, les autres éléments étant nuls.

1. Dans ce travail, la terminologie francophone est utilisée et, dès lors, le terme "positif" signifie toujours "supérieur ou égal à 0".

Une sous-matrice d'une matrice A est dite *principale* si elle est obtenue en sélectionnant dans A des lignes et des colonnes qui possèdent les mêmes indices.

Soit A une matrice carrée de dimension n . La *diagonale principale* de la matrice A est donnée par l'ensemble

$$\{A_{i,i} : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

des éléments diagonaux de la matrice A .

Le *rayon spectral* d'une matrice A de dimension n est égal au plus grand module de ses valeurs propres. Il est généralement noté $\rho(A)$, qu'il ne faudra pas confondre avec la notation utilisée pour le rang d'un sous-ensemble dans le cadre des matroïdes (voir définition 2.21).

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice A de dimension n est le polynôme χ_A défini par²

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Notation 1.1. On note I_m la matrice identité de dimension m , c'est-à-dire la matrice définie pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ par

$$(I_m)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note $O_{m,n}$ la matrice de dimension $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls. Si $m = n$, on s'autorise à noter cette matrice O_n .

On note $J_{m,n}$ la matrice de dimension $m \times n$ dont tous les éléments sont égaux à 1. Si $m = n$, on s'autorise à noter cette matrice J_n .

Dans tous les cas, si on ne souhaite pas insister sur la dimension des matrices, on s'autorise à écrire simplement I, O et J pour représenter les matrices introduites ci-dessus.

Rappelons que toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A de dimension n sont réelles et peuvent donc être ordonnées en

$$\lambda_{\min} = \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 = \lambda_{\max}.$$

De plus, il existe des vecteurs propres x_1, \dots, x_n de A , associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, qui forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n (voir chapitre XII de [19]). Nous pouvons compléter ce résultat classique en donnant d'autres propriétés des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle. Dans son livre [16], Carl Meyer fournit des résultats plus généraux en travaillant sur des matrices hermitiennes. Le deuxième point de la proposition 1.2 y est appelé *théorème de Courant-Fisher* et permet notamment de prouver le dernier point, connu lui sous le nom de *théorème d'entrelacement des valeurs propres*. Nous nous limitons pour notre part, dans l'énoncé et la démonstration de cette proposition, au cas d'une matrice symétrique réelle (qui est donc, en particulier, hermitienne). Une partie de la preuve proposée se base sur le livre [17] de Bogdan Nica et une autre sur le livre [4] de Richard Anthony Brualdi.

2. Certaines références considèrent que le polynôme caractéristique d'une matrice A de dimension n est le polynôme ω_A défini par $\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Puisque le déterminant est un opérateur multilinéaire, il est clair qu'on a $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \omega_A(\lambda)$.

Proposition 1.2. Soit A une matrice symétrique réelle de dimension n . Supposons que ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont ordonnées de la façon suivante :

$$\lambda_{\min} = \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 = \lambda_{\max}.$$

1. Pour tout vecteur non nul $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\lambda_n \leq \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} \leq \lambda_1.$$

De manière équivalente, pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\tilde{y}y = 1$, on a

$$\lambda_n \leq \tilde{y}Ay \leq \lambda_1.$$

En fait, on a même

$$\lambda_1 = \max\{\tilde{y}Ay : \tilde{y}y = 1\} \text{ et } \lambda_n = \min\{\tilde{y}Ay : \tilde{y}y = 1\}.$$

2. Toutes les valeurs propres de la matrice A peuvent être caractérisées de la façon suivante en utilisant des sous-espaces de \mathbb{R}^n . Soit (x_1, \dots, x_n) une base orthonormée de \mathbb{R}^n composée de vecteurs propres de A , associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, pour tout vecteur non nul $y \in \langle x_i, \dots, x_n \rangle^3$, on a

$$\lambda_i \geq \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y},$$

avec l'égalité si $y = x_i$, et pour tout vecteur non nul $y \in \langle x_1, \dots, x_i \rangle$, on a

$$\lambda_i \leq \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y},$$

avec l'égalité si $y = x_i$. Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} : y \in W \right\} : W \text{ sous-espace de } \mathbb{R}^n \text{ de dimension } n - i + 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \inf \left\{ \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} : y \in W \right\} : W \text{ sous-espace de } \mathbb{R}^n \text{ de dimension } i \right\}. \end{aligned}$$

3. Soit B une matrice réelle de dimension $n \times m$, avec $m \leq n$, telle que $\tilde{B}B = I_m$ (c'est-à-dire que les colonnes de B sont orthonormées) et soient $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ les valeurs propres de la matrice symétrique réelle $\tilde{B}AB$ de dimension m . Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i.$$

3. L'enveloppe linéaire d'un ensemble U de vecteurs est l'intersection des sous-espaces vectoriels qui contiennent U . De manière équivalente, il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de U . Elle est généralement notée $\langle U \rangle$.

4. Si $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ sont les valeurs propres d'une sous-matrice principale de A de dimension m , alors pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i.$$

En particulier, si $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ sont les valeurs propres d'une sous-matrice principale de A de dimension $n-1$, alors on a

$$\lambda_n \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \mu_2 \leq \lambda_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1.$$

Démonstration.

1. Soit (x_1, \dots, x_n) une base orthonormée de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de la matrice A , associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. On sait donc qu'il existe des réels $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ non tous nuls tels que

$$y = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} &= \frac{(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i)^\sim A (\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j)}{(\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i)^\sim (\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j \tilde{x}_i A x_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j \tilde{x}_i x_j} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j \tilde{x}_i \lambda_j x_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \gamma_j \tilde{x}_i x_j} \end{aligned}$$

et la conclusion découle alors du fait que $\lambda_n \leq \lambda_j \leq \lambda_1$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

De plus, en considérant les vecteurs x_1 et x_n , pour λ_1 et λ_n respectivement, les bornes sont atteintes.

2. Soit $y \in \langle x_i, \dots, x_n \rangle$ un vecteur non nul. Alors il existe des réels $\gamma_i, \dots, \gamma_n$ non tous nuls tels que

$$y = \gamma_i x_i + \dots + \gamma_n x_n.$$

En appliquant le même raisonnement qu'au point 1, on obtient que

$$\frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} = \frac{\sum_{j=i}^n \sum_{k=i}^n \gamma_j \gamma_k \tilde{x}_j \lambda_k x_k}{\sum_{j=i}^n \sum_{k=i}^n \gamma_j \gamma_k \tilde{x}_j x_k}$$

et comme $k \geq i$, on a $\lambda_k \leq \lambda_i$, ce qui conclut. De plus, si $y = x_i$, alors on a

$$\frac{\tilde{x}_i A x_i}{\tilde{x}_i x_i} = \frac{\tilde{x}_i \lambda_i x_i}{\tilde{x}_i x_i} = \frac{\lambda_i \tilde{x}_i x_i}{\tilde{x}_i x_i} = \lambda_i.$$

La deuxième inégalité s'obtient de la même façon.

De plus, puisque $\langle x_i, \dots, x_n \rangle$ est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension $n - i + 1$ et que

$$\lambda_i = \sup \left\{ \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} : y \in \langle x_i, \dots, x_n \rangle \right\},$$

il est clair que

$$\lambda_i \geq \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} : y \in W \right\} : W \text{ sous-espace de } \mathbb{R}^n \text{ de dimension } n - i + 1 \right\}.$$

Il nous reste donc à montrer que

$$\lambda_i \leq \sup \left\{ \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} : y \in W \right\},$$

pour tout sous-espace W de \mathbb{R}^n de dimension $n - i + 1$. Soit donc W un tel sous-espace. Remarquons que si deux sous-espaces U et V de \mathbb{R}^n sont tels que

$$\dim(U) + \dim(V) > n,$$

alors il existe un vecteur non nul $v \in U \cap V$. On en tire qu'il existe un vecteur non nul $v \in W \cap \langle x_1, \dots, x_i \rangle$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \inf \left\{ \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} : y \in \langle x_1, \dots, x_i \rangle \right\} \\ &\leq \frac{\tilde{v}Av}{\tilde{v}v} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\tilde{y}Ay}{\tilde{y}y} : y \in W \right\}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. Un raisonnement analogue prouve la deuxième égalité.

3. Soit (x_1, \dots, x_n) une base orthonormée de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de la matrice A , associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si A est une matrice symétrique réelle, alors la matrice $\tilde{B}A\tilde{B}$ est réelle et symétrique également car

$$(\tilde{B}A\tilde{B})^\sim = \tilde{B}\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}A\tilde{B}.$$

Ainsi, nous savons qu'il existe une base orthonormée (y_1, \dots, y_m) de \mathbb{R}^m formée de vecteurs propres de la matrice $\tilde{B}A\tilde{B}$, associés respectivement aux valeurs propres μ_1, \dots, μ_m . Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, notons U_i le sous-espace de dimension $i - 1$ de \mathbb{R}^n engendré par x_1, \dots, x_{i-1} , notons V_i le sous-espace de dimension i de \mathbb{R}^m engendré par y_1, \dots, y_i et notons W_i le sous-espace de \mathbb{R}^m engendré par $\tilde{B}x_1, \dots, \tilde{B}x_{i-1}$. Alors W_i est un sous-espace de dimension au plus $i - 1$. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Le complément orthogonal⁴ W_i^\perp de W_i est un sous-espace de \mathbb{R}^m de dimension au moins $n - i + 1$ et

4. Le *complément orthogonal* d'un sous-espace vectoriel U d'un espace vectoriel V est l'ensemble des vecteurs de V qui sont orthogonaux à tout vecteur de U . Il est généralement noté U^\perp .

il existe donc un vecteur non nul $z_i \in V_i \cap W_i^\perp$. Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, i-1\}$, on a

$$(Bz_i)^\sim x_j = \tilde{z}_i \tilde{B} x_j = 0$$

et donc $Bz_i \in U_i^\perp$, où U_i^\perp est le sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension $n-i+1$ engendré par x_i, \dots, x_n . Ainsi, on obtient que

$$\lambda_i \geq \frac{(Bz_i)^\sim A(Bz_i)}{(Bz_i)^\sim (Bz_i)} \quad (1)$$

$$= \frac{\tilde{z}_i \tilde{B} A B z_i}{\tilde{z}_i z_i} \quad (2)$$

$$\geq \mu_i, \quad (3)$$

où les inégalités (1) et (3) découlent du point 2 (appliqué à U_i^\perp et à V_i) et l'égalité (2) vient de $\tilde{B}B = I_m$.

Passons à la deuxième inégalité. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, notons U'_i le sous-espace de dimension $m-i$ de \mathbb{R}^n engendré par $x_{n-m+i+1}, \dots, x_n$, notons V'_i le sous-espace de dimension $m-i+1$ de \mathbb{R}^m engendré par y_i, \dots, y_m et notons W'_i le sous-espace de \mathbb{R}^m engendré par $\tilde{B}x_{n-m+i+1}, \dots, \tilde{B}x_n$. Alors W'_i est un sous-espace de dimension au plus $m-i$. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Le complément orthogonal $(W'_i)^\perp$ de W'_i est un sous-espace de \mathbb{R}^m de dimension au moins $n-m+i$ et il existe donc un vecteur non nul $z'_i \in V'_i \cap (W'_i)^\perp$. Alors, pour tout $j \in \{n-m+i+1, \dots, n\}$, on a

$$(Bz'_i)^\sim x_j = \tilde{z}'_i \tilde{B} x_j = 0$$

et donc $Bz'_i \in (U'_i)^\perp$, où $(U'_i)^\perp$ est le sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension $n-m+i$ engendré par x_1, \dots, x_{n-m+i} . Ainsi, on obtient que

$$\mu_i \geq \frac{\tilde{z}'_i \tilde{B} A B z'_i}{\tilde{z}'_i z'_i} \quad (4)$$

$$= \frac{(Bz'_i)^\sim A(Bz'_i)}{(Bz'_i)^\sim (Bz'_i)} \quad (5)$$

$$\geq \lambda_{n-m+i}, \quad (6)$$

où les inégalités (4) et (6) découlent du point 2 (appliqué à V'_i et à $(U'_i)^\perp$) et l'égalité (5) vient de $\tilde{B}B = I_m$.

4. Considérons $A[i_1, \dots, i_m]$ la sous-matrice principale de A de dimension m déterminée par les lignes et les colonnes d'indices $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$. Soit B la matrice réelle de dimension $n \times m$ dont les colonnes sont les vecteurs unitaires e_{i_1}, \dots, e_{i_m} de \mathbb{R}^n . Ainsi, on a $\tilde{B}B = I_m$ et $\tilde{B}AB = A[i_1, \dots, i_m]$. La conclusion découle alors du point 3. \square

Nous clôturons cette section en rappelant qu'une matrice carrée positive A est dite *réductible* s'il existe une matrice de permutation P telle que la matrice $P^{-1}AP$ peut s'écrire sous la forme

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} C & O \\ * & D \end{pmatrix},$$

où C et D sont des matrices carrées et O est une matrice rectangulaire nulle. Si ce n'est pas le cas, alors la matrice A est dite *irréductible*.

Remarque 1.3. Si A est une matrice carrée de dimension n , alors il existe une matrice de permutation P de dimension n telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & O & O & \cdots & O \\ * & A_2 & O & \cdots & O \\ * & * & A_3 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

où k est un naturel non nul tel que $k \leq n$ et A_1, \dots, A_k sont des matrices carrées irréductibles, appelées *composantes irréductibles* de la matrice A . Il est évident que le naturel k et les matrices A_1, \dots, A_k sont uniques. De plus, le spectre de A est l'union des spectres des matrices A_1, \dots, A_k .

Une matrice carrée positive A est dite *primitive* s'il existe un naturel $k \geq 1$ tel que tous les éléments de la matrice A^k sont strictement positifs. Le point 5 de la proposition A.6 donne une caractérisation des matrices irréductibles qui permet de montrer que toute matrice primitive est irréductible.

1.2 Rappels de théorie des graphes

Rappelons qu'un *graphe orienté* est la donnée d'un couple (V, E) , où V est un ensemble et E est une partie de $V \times V$. Un tel graphe est généralement noté $G = (V, E)$. Les éléments de V sont appelés les *sommets* du graphe et sont représentés par des points. Les éléments de E sont appelés les *arcs* du graphe et sont représentés par des flèches. Un arc reliant le sommet v_i au sommet v_j est représenté à la figure 2.



FIGURE 2 – Un arc reliant le sommet v_i au sommet v_j .

Un *graphe non orienté* est un graphe orienté qui est symétrique, c'est-à-dire que s'il existe un arc qui relie le sommet v_i au sommet v_j , alors il existe également un arc qui relie le sommet v_j au sommet v_i . On utilise toujours la notation $G = (V, E)$ et l'appellation *sommet* pour les éléments de l'ensemble V . Par contre, les éléments de l'ensemble E ne sont plus des couples mais des paires. Pour chaque paire $\{v_i, v_j\}$ appartenant à E , plutôt que de représenter deux flèches inverses l'une de l'autre entre les sommets v_i et v_j , on représente une seule ligne sans flèche entre les sommets v_i et v_j et on lui donne le nom d'*arête*. Une arête reliant les sommets v_i et v_j est représentée à la figure 3.



FIGURE 3 – Une arête reliant les sommets v_i et v_j .

Notons que, sauf exception explicitement indiquée, nous nous interdisons de travailler avec des multi-graphes. Autrement dit, il ne peut jamais exister plus d'un arc ou d'une arête qui relie un sommet d'un graphe à un autre.

Les notions de (*demi-*)*degré* d'un sommet, de *graphe simple*, de *composante connexe*, de *graphe (fortement) connexe*, de *sous-graphe*, de *sous-graphe induit* et de *sous-graphe couvrant* sont supposées connues et ne seront donc pas rappelées ici. Le lecteur pourra retrouver les définitions et résultats nécessaires dans les notes de cours [20].

L'*ordre* d'un graphe $G = (V, E)$ orienté ou non est égal au cardinal de l'ensemble V . Il s'agit donc du nombre de sommets du graphe. Si l'ordre de G est fini, on dit alors que G est un *graphe fini*.

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté (respectivement non orienté) d'ordre n et supposons que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La *matrice d'adjacence* du graphe G est une matrice carrée de dimension n à coefficients naturels dont l'élément à la position (i, j) est égal au nombre d'arcs (respectivement d'arêtes) reliant le sommet v_i au sommet v_j , pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Remarquons en particulier que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est toujours symétrique.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Un *couplage* de G est un ensemble d'arêtes qui n'ont aucune extrémité en commun (on parle alors d'*arêtes disjointes* ou *non adjacentes*).

Un *chemin* d'un graphe orienté est une suite ordonnée d'arêtes adjacentes. Si les extrémités du chemin coïncident, on parle alors de *chemin fermé*. Si les arêtes du chemin sont toutes distinctes et si les sommets du chemin sont tous distincts, on parle alors de *chemin simple*. Un *cycle* d'un graphe non orienté est une suite ordonnée d'arêtes adjacentes et distinctes qui sont telles que tous les sommets rencontrés sont distincts, à l'exception du premier et du dernier qui doivent coïncider. Par convention, on suppose qu'une boucle sur un sommet est un cycle.

Un *arbre* est un graphe non orienté connexe ne contenant pas de cycle et une *forêt* est un graphe non orienté dont chaque composante connexe est un arbre. Il est clair qu'un arbre d'ordre n possède $n - 1$ arêtes et qu'une forêt d'ordre n possède $n - c$ arêtes, où c est le nombre de composantes connexes de cette forêt.

Il existe un lien entre les matrices irréductibles et la théorie des graphes. En effet, un graphe orienté (respectivement non orienté) est fortement connexe (respectivement connexe) si et seulement si sa matrice d'adjacence est irréductible (voir section II.2 de [20]). De plus, si C_1, \dots, C_k sont les composantes fortement connexes (respectivement connexes) d'un graphe orienté (respectivement non orienté) dont la matrice d'adjacence est A , alors il existe une matrice de permutation P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & O & O & \cdots & O \\ * & A_2 & O & \cdots & O \\ * & * & A_3 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

où chaque matrice A_i est la matrice d'adjacence de la composante fortement connexe (respectivement connexe) C_i et est donc une matrice irréductible. On retrouve la forme obtenue à la remarque 1.3. Considérons, par exemple, le graphe orienté de la figure 4. Ses composantes fortement connexes sont $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 6\}$ et $\{7\}$. Sa matrice d'adjacence est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de permutation

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

est telle que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \right),$$

où chaque bloc en gras est une matrice irréductible.

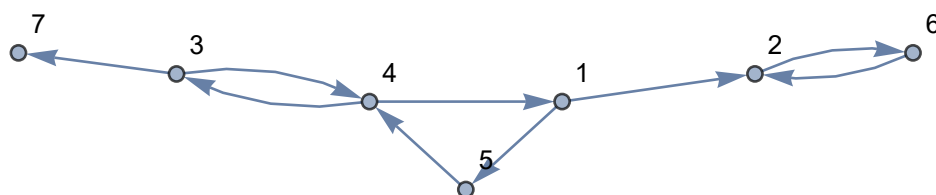


FIGURE 4 – Graphe orienté $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 7), (4, 1), (4, 3), (5, 4), (6, 2)\}$.

Nous présentons maintenant deux exemples classiques de graphes qui seront utilisés dans la suite de ce travail et nous détaillons le calcul de leurs valeurs propres.

Exemple 1.4. Pour tout naturel non nul n , le *graphe complet* K_n est un graphe non orienté qui possède n sommets et qui est tel que chaque sommet est relié à tous les autres par une arête. La matrice d'adjacence du graphe complet K_n est la matrice $A = J_n - I_n$. Ce graphe a donc pour valeurs propres -1 et $n - 1$, respectivement de multiplicité $n - 1$ et 1. En effet, si j_n est le vecteur de \mathbb{R}^n qui ne contient que des 1, alors on voit facilement que $A j_n = (n - 1) j_n$ et j_n est donc un vecteur propre non nul de la matrice A , associé à la valeur propre $n - 1$. De plus, la matrice $A - (-1I_n) = J_n$ est de rang 1 et donc -1 est une valeur propre de A de multiplicité $n - 1$.

Par exemple, le graphe complet K_5 est représenté à la figure 5. Sa matrice d'adjacence est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on vérifie aisément que ses valeurs propres sont -1 de multiplicité 4 et 4 de multiplicité 1.

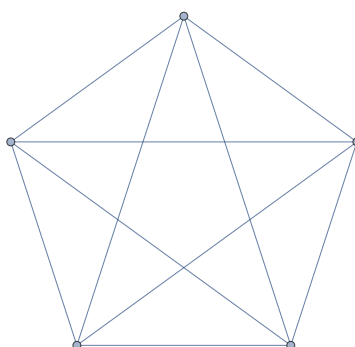


FIGURE 5 – Graphe complet K_5 .

Exemple 1.5. Rappelons qu'un *graphe biparti* est un graphe non orienté dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints qui sont tels qu'aucun sommet d'un sous-ensemble n'est relié à un sommet du même sous-ensemble. Pour tous naturels non nuls m et n , le *graphe biparti complet* $K_{m,n}$ est un graphe biparti dont les deux sous-ensembles disjoints de sommets sont de cardinal m et n respectivement et qui est tel que tout sommet d'un sous-ensemble est relié à tous les sommets de l'autre sous-ensemble. Par exemple, le graphe biparti complet $K_{3,2}$ est représenté à la figure 6.

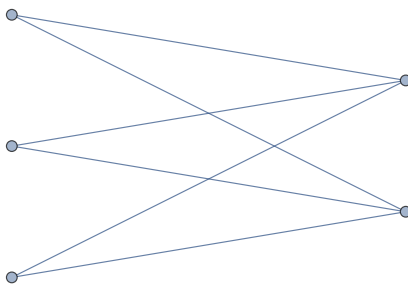


FIGURE 6 – Graphe biparti complet $K_{3,2}$.

En ordonnant les sommets du graphe $K_{m,n}$ en respectant la partition et en commençant par les sommets du sous-ensemble de cardinal m , la matrice d'adjacence du graphe biparti complet $K_{m,n}$ est donnée par

$$A = \left(\begin{array}{c|c} O_m & J_{m,n} \\ \hline J_{n,m} & O_n \end{array} \right).$$

On obtient alors que

$$A^2 = \left(\begin{array}{c|c} nJ_m & O_{m,n} \\ \hline O_{n,m} & mJ_n \end{array} \right)$$

et donc que A^2 est une matrice de rang 2 car il existe seulement deux lignes de A^2 qui sont linéairement indépendantes. On en tire que 0 est une valeur propre de multiplicité $m + n - 2$ de A^2 et donc aussi de A . Nous savons (voir proposition II.1.9 de [20]) que le spectre d'un graphe biparti est symétrique par rapport à 0. Ainsi, les deux dernières valeurs propres de la matrice A sont λ et $-\lambda$. On en déduit que λ^2 est une valeur propre double de la matrice A^2 et comme $\text{tr}(A^2) = 2mn$, on trouve que

$$2\lambda^2 = 2mn \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{mn} \text{ ou } \lambda = -\sqrt{mn}.$$

Ainsi, les valeurs propres du graphe biparti complet $K_{m,n}$ sont $-\sqrt{mn}$, 0 et \sqrt{mn} , respectivement de multiplicité 1, $m + n - 2$ et 1.

Poursuivons l'exemple introduit précédemment. La matrice d'adjacence du graphe $K_{3,2}$ représenté à la figure 6 est donnée par

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

et on vérifie aisément que ses valeurs propres sont $-\sqrt{6}$ de multiplicité 1, 0 de multiplicité 3 et $\sqrt{6}$ de multiplicité 1.

2 Théorème de Rado–Hall

Dans ce chapitre, nous allons présenter le théorème de Rado–Hall. Celui-ci a été énoncé et démontré dans les années 1930. Il fournit une condition nécessaire et suffisante pour l’existence d’un système indépendant de représentants distincts d’une famille finie de sous-ensembles d’un ensemble fini sur lequel un matroïde est défini. Avant de développer en détail le théorème de Rado–Hall, nous commençons donc par présenter les matroïdes. La dernière section de ce chapitre est consacrée à une application du théorème de Rado–Hall en vue d’obtenir une extension du théorème de Graham–Pollak. Ce dernier permet de trouver une borne inférieure pour le nombre minimum de sous-graphes bipartis complets, appelés bicliques, nécessaires pour partitionner les arêtes d’un graphe non orienté. Nous montrons que dans toute décomposition en bicliques des arêtes d’un graphe, on peut trouver une forêt possédant un certain nombre d’arêtes qui appartiennent chacune à des bicliques distinctes.

2.1 Matroïdes

Dans cette section, nous présentons la notion de matroïdes. Ces structures combinatoires introduites en 1935 par Hassler Whitney permettent de généraliser la notion d’indépendance linéaire. En suivant les considérations de Richard Anthony Brualdi dans son livre [4], nous avons choisi la définition suivante pour les matroïdes. Il est cependant à noter qu’il existe d’autres définitions équivalentes, comme nous le verrons dans la suite de cette section.

Définition 2.1. Soit X un ensemble fini et soit \mathcal{I} une collection de sous-ensembles de X satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$ (ce qui revient à demander que la collection \mathcal{I} soit non vide) ;
2. Pour tous $Y_1, Y_2 \subseteq X$, si $Y_1 \in \mathcal{I}$ et si $Y_2 \subseteq Y_1$, alors on a $Y_2 \in \mathcal{I}$;
3. Pour tous $Y_1, Y_2 \subseteq X$, si $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$ et si $|Y_1| < |Y_2|$, alors il existe $x \in Y_2 \setminus Y_1$ tel que $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ ⁵.

On dit alors que $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ est un *matroïde* sur X et les éléments de \mathcal{I} sont appelés les (*ensembles*) *indépendants* de \mathbf{M} .

Avant d’entamer le parcours théorique des matroïdes, nous donnons quelques exemples classiques et naturels de classes de matroïdes, que l’on peut retrouver dans [8], [9], [15], [25] et [26]. Nous constatons donc que ceux-ci sont présents dans plusieurs domaines mathématiques.

Exemple 2.2. Soit X un ensemble fini et soit k un naturel. Le plus simple exemple de matroïde défini sur X est le *matroïde uniforme* qui est obtenu en considérant que

$$\mathcal{I} = \{Y \subseteq X : |Y| \leq k\},$$

5. Si Y_1 est un ensemble indépendant et si Y_2 est un ensemble indépendant contenant strictement plus d’éléments que Y_1 , alors Y_1 peut être étendu en un ensemble indépendant plus grand en lui ajoutant un élément de $Y_2 \setminus Y_1$. C’est la propriété d’*augmentation*.

c'est-à-dire que les ensembles indépendants du matroïde uniforme sont les éléments de l'ensemble des k -parties de X . Ce matroïde est généralement noté $\mathbf{U}_{k,|X|} = (X, \mathcal{I})$. Il s'agit bien d'un matroïde car les trois conditions de la définition 2.1 sont vérifiées :

1. Nous savons que $\emptyset \subseteq X$ et que $|\emptyset| = 0 \leq k$. On en déduit que $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1 \in \mathcal{I}$ et $Y_2 \subseteq Y_1$. Alors on sait que $|Y_2| \leq |Y_1| \leq k$ et donc que $Y_2 \in \mathcal{I}$.
3. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$ et $|Y_1| < |Y_2|$. On sait qu'il existe $x \in Y_2 \setminus Y_1$. De plus, on trouve que $Y_1 \cup \{x\} \subseteq X$ et que $|Y_1 \cup \{x\}| = |Y_1| + 1 \leq |Y_2| \leq k$. On en déduit alors que $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Un cas particulier du matroïde uniforme défini sur X est le *matroïde libre* $\mathbf{U}_{|X|,|X|}$ qui est tel que tout sous-ensemble de X est indépendant (autrement dit, on a $\mathcal{I} = \mathcal{P}(X)$).

Considérons, par exemple, l'ensemble fini $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Les indépendants du matroïde uniforme $\mathbf{U}_{2,5}$ défini sur X sont les ensembles

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \\ \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\} \text{ et } \{4, 5\}.$$

Exemple 2.3. Soit X un sous-ensemble fini d'un espace vectoriel sur un champ \mathbb{K} et soit \mathcal{I} la collection des parties de X libres sur \mathbb{K} . Alors $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ est un matroïde, appelé *matroïde vectoriel*, car les trois conditions de la définition 2.1 sont vérifiées :

1. Comme l'ensemble $\emptyset \subseteq X$ est libre sur \mathbb{K} par convention, on sait que $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1 \in \mathcal{I}$ et $Y_2 \subseteq Y_1$. Alors on sait que Y_1 est une partie de X libre sur \mathbb{K} et donc que tous ses sous-ensembles (et notamment Y_2) sont libres sur \mathbb{K} . On en déduit que $Y_2 \in \mathcal{I}$.
3. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$ et $|Y_1| < |Y_2|$. Supposons que pour tout $x \in Y_2 \setminus Y_1$, la partie $Y_1 \cup \{x\}$ ne soit pas libre sur \mathbb{K} . Puisque Y_1 est une partie libre sur \mathbb{K} , cela signifie que tout $x \in Y_2 \setminus Y_1$ est une combinaison linéaire des éléments a_1, \dots, a_t de Y_1 . En effet, si $\gamma_1, \dots, \gamma_t, \gamma$ sont des éléments non tous nuls de \mathbb{K} tels que

$$\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_t a_t + \gamma x = 0,$$

alors on sait que $\gamma \neq 0$ car Y_1 est une partie libre sur \mathbb{K} . On trouve donc que

$$x = \gamma^{-1}(-\gamma_1 a_1 - \dots - \gamma_t a_t).$$

De plus, il est évident que tout élément de Y_1 est une combinaison linéaire des éléments de Y_1 . Finalement, on a montré que tout élément de Y_2 est une combinaison linéaire des éléments de Y_1 . Or, le théorème de Steinitz affirme qu'au moins $p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont linéairement dépendantes. Ainsi, puisque $|Y_1| < |Y_2|$, les éléments de Y_2 sont linéairement dépendants, ce qui est absurde. On en déduit qu'il existe un élément $x \in Y_2 \setminus Y_1$ tel que la partie $Y_1 \cup \{x\}$ est libre sur \mathbb{K} .

Exemple 2.4. Les *matroïdes linéaires* sont définis à partir d'une matrice A de dimension $n \times m$ et à coefficients dans un champ \mathbb{K} . Notons X l'ensemble des indices des colonnes de A . Pour un sous-ensemble Y de X , on note A_Y la sous-matrice de A obtenue en considérant les colonnes qui correspondent aux indices dans Y . Définissons l'ensemble

$$\mathcal{I} = \{Y \subseteq X : \text{rg}(A_Y) = |Y|\}.$$

Autrement dit, un sous-ensemble Y de X est indépendant si et seulement si les colonnes de A correspondant aux indices dans Y sont linéairement indépendantes sur \mathbb{K} . Alors $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ est un matroïde. En effet, il suffit de considérer l'exemple 2.3 avec l'ensemble fini X' contenant les colonnes de la matrice A (c'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel \mathbb{K}^n sur le champ \mathbb{K}). On dit que la matrice A *représente* le matroïde linéaire \mathbf{M} .

Si le champ considéré est \mathbb{Z}_2 , on parle de *matroïde linéaire binaire* et si le champ considéré est \mathbb{Z}_3 , on parle de *matroïde linéaire ternaire*.

Deux matroïdes $\mathbf{M}_1 = (X_1, \mathcal{I}_1)$ et $\mathbf{M}_2 = (X_2, \mathcal{I}_2)$ sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction $f : X_1 \rightarrow X_2$ telle que, pour tout sous-ensemble Y de X_1 , on a $Y \in \mathcal{I}_1$ si et seulement si $f(Y) \in \mathcal{I}_2$. Un matroïde est *représentable* sur un champ \mathbb{K} s'il est isomorphe à un matroïde linéaire représenté par une matrice à coefficients dans \mathbb{K} . Les matroïdes qui peuvent être représentés sur tous les champs sont dits *réguliers*. On donnera un exemple d'un tel matroïde à l'exemple 2.13. Au contraire, certains matroïdes ne sont représentables sur aucun champ (le lecteur intéressé pourra consulter la section 5.3 des notes de cours [23] pour plus de détails).

Considérons, par exemple, la matrice à coefficients dans le champ \mathbb{Z}_2 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des indices des colonnes de A est $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et les indépendants du matroïde linéaire binaire représenté par la matrice A sont les ensembles

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\} \text{ et } \{4, 5\}.$$

Remarquons que la matrice A' à coefficients dans le champ \mathbb{Z}_2 définie par

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

représente un matroïde linéaire binaire qui est isomorphe à celui représenté par la matrice A .

La remarque suivante établit un lien entre les matroïdes uniformes et les matroïdes linéaires et nous permet de montrer que le champ sur lequel on travaille a toute son importance.

Remarque 2.5. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut -2 . Ainsi, si on regarde la matrice A sur le champ \mathbb{Z}_2 , alors le matroïde linéaire binaire qu'elle représente est le matroïde uniforme $\mathbf{U}_{2,3}$. En effet, les sous-ensembles de $\{1, 2, 3\}$ qui sont associés à des colonnes linéairement indépendantes sont donnés par

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\} \text{ et } \{2, 3\}.$$

Par contre, si on regarde la matrice A sur le champ \mathbb{Z}_3 , alors le matroïde linéaire ternaire qu'elle représente est le matroïde libre $\mathbf{U}_{3,3}$ car tout sous-ensemble de $\{1, 2, 3\}$ est associé à des colonnes linéairement indépendantes.

Exemple 2.6. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non orienté qui ne contient pas de boucle. On souhaite définir un matroïde sur l'ensemble V des sommets. Pour cela, rappelons qu'un couplage de G est un ensemble d'arêtes qui n'ont aucune extrémité en commun et définissons l'ensemble

$$\mathcal{I} = \{S \subseteq V : S \text{ est recouvert par un couplage du graphe } G\},$$

le couplage en question n'ayant pas besoin de recouvrir précisément l'ensemble S (c'est-à-dire que d'autres sommets que ceux de S peuvent être recouverts par le couplage). Alors $\mathbf{M} = (V, \mathcal{I})$ est un matroïde, appelé *matroïde de couplage*, car les trois conditions de la définition 2.1 sont vérifiées :

1. Par convention, l'ensemble $\emptyset \subseteq V$ est recouvert par un couplage qui ne contient aucune arête et on a donc $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Soient $S_1, S_2 \subseteq V$ tels que $S_1 \in \mathcal{I}$ et $S_2 \subseteq S_1$. Alors S_1 est recouvert par un couplage du graphe G qui recouvre également S_2 . On en tire que $S_2 \in \mathcal{I}$.
3. Soient $S_1, S_2 \subseteq V$ tels que $S_1, S_2 \in \mathcal{I}$ et $|S_1| < |S_2|$. Soient F_1 et F_2 deux couplages du graphe G qui recouvrent S_1 et S_2 respectivement. S'il existe un sommet $v \in S_2 \setminus S_1$ qui est recouvert par une arête de F_1 , alors le couplage F_1 recouvre l'ensemble $S_1 \cup \{v\}$. Supposons donc qu'aucun sommet de $S_2 \setminus S_1$ n'est recouvert par une arête de F_1 . Considérons le sous-graphe H de G dont l'ensemble d'arêtes est

$$F_1 \Delta F_2 = (F_1 \cup F_2) \setminus (F_1 \cap F_2)$$

et l'ensemble U de sommets contient tous les sommets de G qui sont extrémité d'une arête de $F_1 \Delta F_2$, et uniquement ceux-là. En particulier, vu notre hypothèse, tout sommet de $S_2 \setminus S_1$ est un sommet du graphe H car il est recouvert par une arête de F_2 mais pas par une arête de F_1 . De plus, comme F_1 et F_2 sont des couplages, tout sommet de H est de degré au plus 2. On en déduit que toute composante connexe du graphe H est un cycle ou un chemin simple dans lequel les arêtes de F_1 et de F_2 alternent. Comme on a $|S_1| < |S_2|$, nous savons que $|S_1 \setminus S_2| < |S_2 \setminus S_1|$. Or, dans un cycle de H , tout sommet rencontre une arête de F_1 . Il découle donc de notre hypothèse qu'il n'existe aucun cycle de H qui rencontre un sommet de $S_2 \setminus S_1$. Ainsi, nous savons qu'il existe un chemin simple de H qui rencontre strictement plus de sommets de $S_2 \setminus S_1$ que de sommets de $S_1 \setminus S_2$. Considérons un tel chemin et

un sommet $v \in S_2 \setminus S_1$ qu'il rencontre. Toujours par hypothèse, nous savons que ce sommet n'est recouvert par aucune arête de F_1 et qu'il s'agit donc d'une extrémité du chemin considéré. En outre, il existe un sommet $u \in U \setminus \{v\}$ et une arête $e \in F_2$ tels que $e = \{v, u\}$. Si l'arête e est l'unique arête du chemin considéré, alors on sait que le couplage $F_1 \cup \{e\}$ recouvre l'ensemble $S_1 \cup \{v\}$. Si ce n'est pas le cas, alors il existe un sommet $w \in U \setminus \{u, v\}$ et une arête $f \in F_1$ tels que $f = \{u, w\}$. Si $w \notin S_1$, alors le couplage $(F_1 \cup \{e\}) \setminus \{f\}$ recouvre l'ensemble $S_1 \cup \{v\}$. Si $w \in S_1 \setminus S_2$, alors on déduit du fait que le chemin choisi rencontre strictement plus de sommets de $S_2 \setminus S_1$ que de sommets de $S_1 \setminus S_2$ qu'il existe un autre sommet $v' \in S_2 \setminus S_1$ sur ce chemin. Par hypothèse, ce sommet v' n'est pas recouvert par une arête de F_1 et il doit donc être à l'autre extrémité du chemin. Ainsi, le chemin démarre et se termine par une arête de F_2 et, en inversant les arêtes de F_1 et de F_2 dans le chemin, on trouve un couplage qui recouvre l'ensemble $S_1 \cup \{v\}$. Finalement, si $w \in S_1 \cap S_2$, alors on sait qu'il existe un sommet $x \in U \setminus \{u, v, w\}$ et une arête $g \in F_2$ tels que $g = \{w, x\}$. Une discussion similaire à celle qui précède peut être menée pour le sommet x . Comme le chemin considéré possède un nombre fini d'arêtes, ce raisonnement prendra fin après un nombre fini d'étapes. Dans tous les cas, nous avons bien trouvé un sommet $v \in S_2 \setminus S_1$ et un couplage du graphe G qui recouvre l'ensemble $S_1 \cup \{v\}$.

Considérons, par exemple, le graphe $G = (V, E)$ de la figure 7. Dans ce cas, l'ensemble des indépendants du matroïde de couplage associé au graphe G est l'ensemble des parties de V . En effet, le sous-ensemble d'arêtes $F = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ est un couplage du graphe G qui recouvre tout sous-ensemble de V .

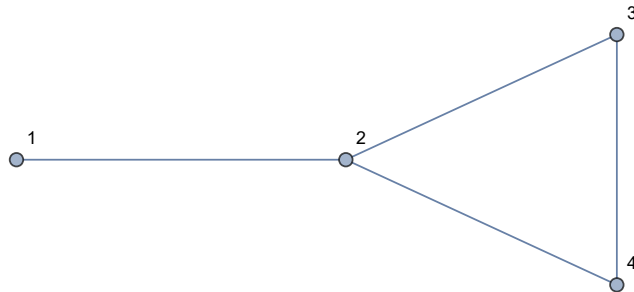


FIGURE 7 – Graphe non orienté $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Remarquons que l'ensemble des indépendants d'un matroïde de couplage n'est pas toujours l'ensemble des parties de l'ensemble des sommets du graphe considéré au départ. Prenons, par exemple, le graphe $G' = (V', E')$ de la figure 8. Dans ce cas, le sous-ensemble $\{3, 4, 5\} \subseteq V'$ n'est pas un indépendant du matroïde de couplage associé à G' car aucun couplage de G' ne recouvre les trois sommets 3, 4 et 5.

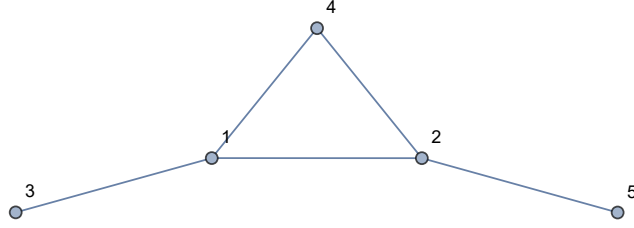


FIGURE 8 – Graphe non orienté $G' = (V', E')$ défini par $V' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E' = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}\}$.

On ne peut par contre pas définir un matroïde sur l'ensemble E des arêtes d'un graphe fini non orienté $G = (V, E)$ en posant

$$\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F \text{ est un couplage du graphe } G\}.$$

Dans le graphe G de la figure 7, par exemple, les sous-ensembles

$$F_1 = \{\{2, 3\}\} \text{ et } F_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

de l'ensemble E sont des couplages du graphe G tels que $|F_1| < |F_2|$ mais il est impossible d'ajouter à F_1 une arête de $F_2 \setminus F_1$ tout en gardant un couplage du graphe G , ce qui contredit la condition 3 de la définition 2.1. En choisissant une autre collection d'ensembles indépendants, nous pouvons quand même définir un matroïde sur l'ensemble des arêtes d'un graphe fini non orienté. Ce sera l'objet de l'exemple 2.13 que nous introduirons dans la suite de ces notes.

Exemple 2.7. Soit \mathbb{K} un champ et soit \mathbb{K}' une extension de \mathbb{K} . Rappelons que des éléments $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{K}'$ sont *algébriquement indépendants* sur \mathbb{K} s'il n'existe pas de polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_t]$ tel que $P(a_1, \dots, a_t) = 0$. Soit X un sous-ensemble fini de \mathbb{K}' . Posons

$$\mathcal{I} = \{Y \subseteq X : \text{les éléments de } Y \text{ sont algébriquement indépendants sur } \mathbb{K}\}.$$

Alors $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ est un matroïde, appelé *matroïde algébrique*, car les trois conditions de la définition 2.1 sont vérifiées :

1. Par convention, les éléments de l'ensemble $\emptyset \subseteq X$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{K} et on a donc $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1 \in \mathcal{I}$ et $Y_2 \subseteq Y_1$. Supposons que $Y_2 = \{a_1, \dots, a_t\}$ et que $Y_1 = \{a_1, \dots, a_t, a_{t+1}, \dots, a_u\}$. Comme $Y_1 \in \mathcal{I}$, on sait qu'il n'existe pas de polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_u]$ tel que $P(a_1, \dots, a_u) = 0$. Supposons qu'il existe un polynôme non nul $P' \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_t]$ tel que $P'(a_1, \dots, a_t) = 0$. Alors le polynôme $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_u]$ défini par

$$P(X_1, \dots, X_u) = P'(X_1, \dots, X_t) + 0X_{t+1} + \dots + 0X_u$$

est non nul et tel que $P(a_1, \dots, a_u) = 0$, ce qui est absurde. On en déduit que $Y_2 \in \mathcal{I}$.

3. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$ et $|Y_1| < |Y_2|$. Supposons que pour tout $x \in Y_2 \setminus Y_1$, on a $Y_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$. Supposons également que $Y_1 = \{a_1, \dots, a_t\}$, que $Y_2 \setminus Y_1 = \{b_1, \dots, b_u\}$ et que $Y_2 \cap Y_1 = \{a_1, \dots, a_v\}$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, u\}$, il existe un polynôme non nul $P_i \in \mathbb{K}[A_1, \dots, A_t, B_i]$ tel que $P_i(a_1, \dots, a_t, b_i) = 0$. Définissons le polynôme $Q \in \mathbb{K}[B_1, \dots, B_u, A_1, \dots, A_v]$ par

$$Q(B_1, \dots, B_u, A_1, \dots, A_v) = \prod_{i=1}^u P'_i(B_i) \prod_{j=1}^v A_j,$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, u\}$, le polynôme $P'_i \in \mathbb{K}[B_i]$ est défini par

$$P'_i(B_i) = P_i(a_1, \dots, a_t, B_i).$$

Alors le polynôme Q est non nul car pour tout $i \in \{1, \dots, u\}$, le polynôme P'_i est non nul. En effet, son terme indépendant vaut $P_i(a_1, \dots, a_t, 0)$, qui est non nul car P_i est un polynôme non nul et les éléments a_1, \dots, a_t sont algébriquement indépendants sur \mathbb{K} . De plus, le polynôme Q est tel que $Q(b_1, \dots, b_u, a_1, \dots, a_v) = 0$, ce qui est absurde puisque $Y_2 = \{b_1, \dots, b_u, a_1, \dots, a_v\} \in \mathcal{I}$. On en déduit qu'il existe un élément $x \in Y_2 \setminus Y_1$ tel que $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Exemple 2.8. Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti fini dont la partition des sommets est donnée par $V = V_1 \cup V_2$. Nous souhaitons définir un matroïde sur l'un des deux sous-ensembles de la partition, par exemple sur V_1 . Posons

$$\mathcal{I} = \{S \subseteq V_1 : S \text{ est recouvert par un couplage du graphe } G\}.$$

Dans cet exemple, on suppose que le couplage qui recouvre un ensemble $S \in \mathcal{I}$ ne recouvre aucun sommet de l'ensemble $V_1 \setminus S$. Alors $\mathbf{M} = (V_1, \mathcal{I})$ est un matroïde, appelé *matroïde transversal*, car les trois conditions de la définition 2.1 sont vérifiées :

1. Par convention, l'ensemble $\emptyset \subseteq V_1$ est recouvert par le couplage qui ne contient aucune arête et on a donc $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Soient $S_1, S_2 \subseteq V_1$ tels que $S_1 \in \mathcal{I}$ et $S_2 \subseteq S_1$. Alors S_1 est recouvert par un couplage F_1 et il suffit de retirer de F_1 les arêtes incidentes aux sommets de $S_1 \setminus S_2$ pour obtenir un couplage qui recouvre S_2 et aucun sommet de $V_1 \setminus S_2$. On en tire que $S_2 \in \mathcal{I}$.
3. Soient $S_1, S_2 \subseteq V_1$ tels que $S_1, S_2 \in \mathcal{I}$ et $|S_1| < |S_2|$. Soient F_1 et F_2 deux couplages du graphe G qui recouvrent S_1 et S_2 respectivement. Soit G' le multi-graphe dont l'ensemble d'arêtes est $F_1 \cup F_2$ (vu comme un multi-ensemble). Ainsi, G' est un graphe biparti dont chaque sommet est de degré au plus deux. On en déduit que G' est une union disjointe (sur les sommets) de cycles et de chemins simples. Dans chaque cycle et chaque chemin simple de G' , les arêtes de F_1 et de F_2 alternent car F_1 et F_2 sont des couplages. Or, tout cycle dans un graphe biparti est de longueur paire et on en déduit que tout cycle du graphe G' contient autant d'arêtes de F_1 que d'arêtes de F_2 . Comme $|S_2| > |S_1|$, on sait que F_2 contient strictement plus d'arêtes que F_1 et on en

tire qu'il existe un chemin simple du graphe G' qui contient strictement plus d'arêtes de F_2 que d'arêtes de F_1 . Puisque les arêtes de F_1 et de F_2 alternent sur les chemins simples de G' , on trouve qu'il existe un chemin simple du graphe G' qui contient n arêtes de F_1 et $n + 1$ arêtes de F_2 . Les deux extrémités de ce chemin simple sont alors recouvertes par des arêtes de F_2 . Remplaçons, dans le couplage F_1 , toutes les arêtes du chemin qui appartiennent à F_1 par les arêtes du chemin qui appartiennent à F_2 . Ainsi, il existe un sommet $v \in S_2 \setminus S_1$ tel que l'ensemble $S_1 \cup \{v\}$ est recouvert par le nouveau couplage que l'on vient d'obtenir. On en tire que $S_1 \cup \{v\} \in \mathcal{I}$.

Considérons, par exemple, le graphe biparti fini $G = (V_1 \cup V_2, E)$ de la figure 9. Dans ce cas, les indépendants du matroïde transversal associé au graphe G sont les ensembles

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\} \text{ et } \{3, 4\}.$$

Regardons, par exemple, ce qu'il se passe pour le sous-ensemble $\{1, 2, 3\} \subseteq V_1$. Pour trouver un couplage qui recouvre cet ensemble, nous devons nécessairement sélectionner les arêtes $\{2, 5\}$ et $\{3, 6\}$ pour les sommets 2 et 3 respectivement. Il nous est alors impossible de trouver une arête incidente au sommet 1 qui n'est pas adjacente aux deux arêtes précédemment sélectionnées. Ainsi, le sous-ensemble $\{1, 2, 3\} \subseteq V_1$ n'est pas un indépendant du matroïde transversal. En particulier, puisque V_2 possède deux éléments, nous savons que tout indépendant du matroïde transversal contient au maximum deux éléments.

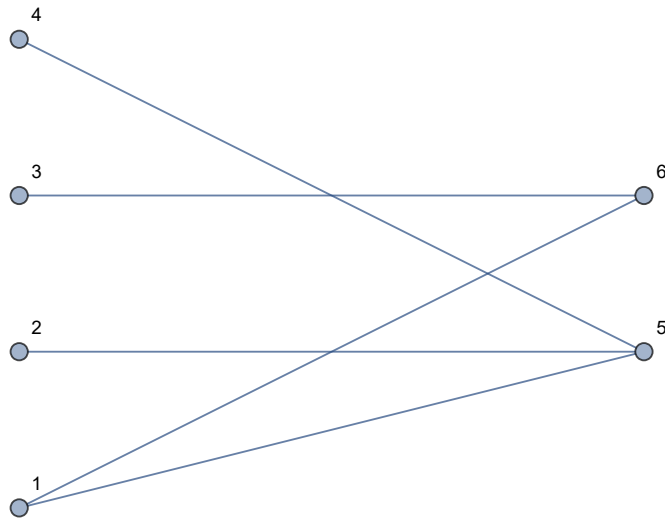


FIGURE 9 – Graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, E)$ défini par $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $V_2 = \{5, 6\}$ et $E = \{\{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$.

Nous nous intéressons à présent à différentes notions associées à un matroïde telles que ses circuits, ses bases, sa fonction rang et sa fonction fermeture.

Définition 2.9. Soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur un ensemble fini X . Un (*ensemble*) *dépendant* de \mathbf{M} est un sous-ensemble de X qui n'est pas indépendant. La condition 2 de la

définition 2.1 implique que tout sous-ensemble de X qui contient un ensemble dépendant est lui-même dépendant. Un *circuit* de \mathbf{M} est un sous-ensemble dépendant de X qui est minimal pour l'inclusion. Ainsi, si on retire n'importe quel élément d'un circuit, l'ensemble considéré devient indépendant. Autrement dit, tout sous-ensemble d'un circuit C qui est distinct de C est indépendant. Un circuit de cardinal 1 est une *boucle*. On note \mathcal{C} (ou $\mathcal{C}(\mathbf{M})$ si on veut être précis) l'ensemble des circuits du matroïde \mathbf{M} .

Proposition 2.10. *Soit X un ensemble fini et soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur l'ensemble X . L'ensemble \mathcal{C} des circuits de \mathbf{M} vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$;
2. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ et si $C_1 \subseteq C_2$, alors on a $C_1 = C_2$;
3. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, si $C_1 \neq C_2$ et si $x \in C_1 \cap C_2$, alors il existe un ensemble $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ (c'est la propriété d'élimination).

Démonstration.

1. L'ensemble $\emptyset \subseteq X$ est un indépendant de \mathbf{M} par le point 1 de la définition 2.1. Ce n'est donc pas un circuit de \mathbf{M} .
2. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $C_1 \subseteq C_2$. Si $C_1 \subset C_2$, alors on sait que C_1 est un indépendant de \mathbf{M} et C_1 ne peut donc pas être un circuit de \mathbf{M} , ce qui est absurde. On en déduit que $C_1 = C_2$.
3. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $C_1 \neq C_2$ et soit $x \in C_1 \cap C_2$. Définissons le sous-ensemble $Y = (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ de X . Nous allons procéder par l'absurde en supposant que Y ne contient pas de circuit de \mathbf{M} . Ainsi, on sait que $Y \in \mathcal{I}$. Comme $C_1 \neq C_2$, on déduit du point 2 qu'il existe $y \in C_2 \setminus C_1$. Par définition d'un circuit, on en tire que $C_2 \setminus \{y\} \in \mathcal{I}$. Considérons tous les sous-ensembles de X qui
 - (a) sont indépendants dans \mathbf{M} ;
 - (b) contiennent $C_2 \setminus \{y\}$;
 - (c) sont inclus dans $C_1 \cup C_2$.

Il existe au moins un tel sous-ensemble de X , à savoir $C_2 \setminus \{y\}$. Parmi tous ces sous-ensembles de X , choisissons-en un qui est maximal (au sens de l'inclusion) et notons-le Z . Afin d'obtenir une contradiction, nous cherchons un sous-ensemble Z' de X qui vérifie les trois conditions (a), (b) et (c) et qui contient strictement le sous-ensemble Z de X . Commençons par montrer que $|Z| < |Y|$. Pour cela, cherchons deux éléments distincts appartenant à $C_1 \cup C_2$ mais n'appartenant pas à Z . On sait que $y \notin Z$. En effet, supposons que $y \in Z$. Comme $C_2 \setminus \{y\} \subseteq Z$, on a alors $C_2 \subseteq Z$. Or, Z est un indépendant de \mathbf{M} et on en tire donc que C_2 est un indépendant de \mathbf{M} , ce qui est impossible puisque C_2 est un circuit de \mathbf{M} . De plus, comme $C_1 \in \mathcal{C}$, on a $C_1 \not\subseteq Z$. Ainsi, il existe $z \in C_1 \setminus Z$. En particulier, comme $y \in C_2 \setminus C_1$ et $z \in C_1$, on a $y \neq z$. On en tire que

$$|Z| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{y, z\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |C_1 \cup C_2| - 1 = |Y|.$$

Par le point 3 de la définition 2.1, il existe donc $t \in Y \setminus Z$ tel que $Z \cup \{t\} \in \mathcal{I}$. L'ensemble $Z \cup \{t\}$ vérifie bien les trois conditions (a), (b) et (c) ci-dessus et il contient strictement l'ensemble Z , ce qui contredit la maximalité de Z . On obtient ainsi une contradiction, ce qui mène à la conclusion. □

Cette proposition admet une réciproque, proposée notamment par Jean-Sébastien Sereni dans ses notes de cours [23] et permettant de caractériser les familles de sous-ensembles d'un ensemble fini X qui peuvent correspondre à l'ensemble des circuits d'un matroïde défini sur X .

Proposition 2.11. *Soit X un ensemble fini. Une famille \mathcal{C} de sous-ensembles de X vérifiant les trois propriétés de la proposition 2.10 est l'ensemble des circuits d'un matroïde défini sur l'ensemble X .*

Démonstration. Soit \mathcal{C} une famille de sous-ensembles de X vérifiant les trois propriétés de la proposition 2.10. Posons

$$\mathcal{I} = \{Y \subseteq X : Y \text{ ne contient aucun élément de } \mathcal{C}\}.$$

Nous allons montrer que $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ est un matroïde dont l'ensemble des circuits est \mathcal{C} . Commençons par montrer que l'ensemble \mathcal{I} vérifie les trois conditions de la définition 2.1 :

1. Puisque l'ensemble \mathcal{C} vérifie la première propriété de la proposition 2.10, nous savons que $\emptyset \notin \mathcal{C}$. Ainsi, l'ensemble $\emptyset \subseteq X$ ne contient aucun élément de \mathcal{C} et on a donc bien que $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1 \in \mathcal{I}$ et $Y_2 \subseteq Y_1$. Ainsi, nous savons par définition de l'ensemble \mathcal{I} que Y_1 ne contient aucun élément de \mathcal{C} . Puisqu'on a $Y_2 \subseteq Y_1$, on en déduit que Y_2 ne contient aucun élément de \mathcal{C} et donc que $Y_2 \in \mathcal{I}$.
3. Soient $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}$ et $|Y_1| < |Y_2|$. Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $x \in Y_2 \setminus Y_1$, on a $Y_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$. Considérons tous les sous-ensembles de X qui
 - (a) appartiennent à l'ensemble \mathcal{I} ;
 - (b) sont de cardinal strictement plus grand que $|Y_1|$;
 - (c) sont inclus dans $Y_1 \cup Y_2$.

Il existe au moins un tel sous-ensemble de X , à savoir Y_2 . Parmi tous ces sous-ensembles de X , choisissons-en un dont l'intersection avec Y_1 est maximale (un tel choix est légitimé par le fait que Y_1 est un ensemble fini) et notons-le Z . Nous savons que Y_1 n'est pas inclus dans Z . En effet, dans le cas contraire, on a

$$Y_1 \subseteq Z \subseteq Y_1 \cup Y_2.$$

Comme $|Y_1| < |Z|$, il existe un élément $x \in Z \setminus Y_1 \subseteq Y_2 \setminus Y_1$. Ainsi, on sait que $Y_1 \cup \{x\} \subseteq Z$ et comme $Z \in \mathcal{I}$, on déduit du point précédent que $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, ce qui

contredit notre hypothèse. Fixons donc un élément $y \in Y_1 \setminus Z$. Pour tout $z \in Z \setminus Y_1$, posons

$$Z_z = (Z \setminus \{z\}) \cup \{y\}.$$

Comme $Z_z \subseteq Y_1 \cup Y_2$, $|Z_z| = |Z| > |Y_1|$ et $|Y_1 \cap Z_z| = |Y_1 \cap Z| + 1 > |Y_1 \cap Z|$, on déduit du choix de Z que $Z_z \notin \mathcal{I}$. Ainsi, pour tout $z \in Z \setminus Y_1$, il existe un ensemble $C_z \in \mathcal{C}$ qui est inclus dans Z_z . On a $y \in C_z$ car si $y \notin C_z$, alors on sait que $C_z \subseteq Z \setminus \{z\}$, ce qui est impossible puisque l'inclusion $Z \setminus \{z\} \subseteq Z$ et le point précédent impliquent que $Z \setminus \{z\} \in \mathcal{I}$ et donc que $Z \setminus \{z\}$ ne contient aucun élément de \mathcal{C} . De plus, on sait que $z \notin C_z$ car

$$C_z \subseteq Z_z = (Z \setminus \{z\}) \cup \{y\}. \quad (7)$$

Soit $z \in Z \setminus Y_1$. L'existence d'un tel élément z découle du fait que $|Z| > |Y_1|$. Comme $Y_1 \in \mathcal{I}$, on sait que C_z n'est pas inclus dans Y_1 . Il découle alors de l'inclusion (7) et du fait que $y \in Y_1$ que

$$C_z \cap (Z \setminus Y_1) \neq \emptyset.$$

Il existe donc un élément $t \in C_z \cap (Z \setminus Y_1)$. On en tire que C_z et C_t sont deux éléments distincts de l'ensemble \mathcal{C} (car $t \in C_z$ et $t \notin C_t$) et que $y \in C_z \cap C_t$. Par la troisième propriété de la proposition 2.10, on en déduit l'existence d'un élément $C \in \mathcal{C}$ tel que

$$C \subseteq (C_z \cup C_t) \setminus \{y\} \subseteq (((Z \setminus \{z\}) \cup \{y\}) \cup ((Z \setminus \{t\}) \cup \{y\})) \setminus \{y\} \subseteq Z.$$

On obtient alors une contradiction puisque $Z \in \mathcal{I}$. Ainsi, il existe un élément $x \in Y_2 \setminus Y_1$ tel que $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

Montrons finalement que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{M})$. Si $C \in \mathcal{C}$, alors il est clair que C est un sous-ensemble de X tel que $C \notin \mathcal{I}$. Supposons qu'il existe un ensemble $D \subset C$ tel que $D \notin \mathcal{I}$. Par définition de l'ensemble \mathcal{I} , on sait alors qu'il existe un ensemble $C' \in \mathcal{C}$ tel que $C' \subseteq D$. Ainsi, on a $C, C' \in \mathcal{C}$ et $C' \subset C$, ce qui contredit la deuxième propriété de la proposition 2.10 vérifiée par la famille \mathcal{C} . Ainsi, C est bien un ensemble dépendant minimal du matroïde \mathbf{M} , c'est-à-dire un circuit de \mathbf{M} . Réciproquement, si $C \in \mathcal{C}(\mathbf{M})$, alors on sait que $C \notin \mathcal{I}$ et que pour tout $D \subset C$, on a $D \in \mathcal{I}$. Ainsi, il existe un ensemble $C' \in \mathcal{C}$ tel que $C' \subseteq C$ et tel que pour tout $D \subset C$, on a $C' \not\subseteq D$. On en déduit que $C' = C$ et donc que $C \in \mathcal{C}$. \square

On peut déduire de la preuve de la proposition 2.11 un lien direct entre l'ensemble des indépendants et l'ensemble des circuits d'un matroïde.

Remarque 2.12. La famille \mathcal{I} des ensembles indépendants d'un matroïde $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ peut être déterminée à partir de l'ensemble \mathcal{C} de ses circuits car les éléments de \mathcal{I} sont les sous-ensembles de X qui ne contiennent aucun élément de \mathcal{C} .

Nous donnons un exemple de matroïde défini à partir de ses circuits et montrons comment on peut en déduire l'ensemble de ses indépendants.

Exemple 2.13. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non orienté. Posons

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq E : C \text{ est un cycle de } G\}.$$

On déduit de la proposition 2.11 qu'il s'agit bien de l'ensemble des circuits d'un matroïde défini sur l'ensemble E car les trois propriétés de la proposition 2.10 sont vérifiées :

1. L'ensemble $\emptyset \subseteq E$ ne contient aucune arête et n'est donc pas un cycle de G . Ainsi, on a $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
2. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $C_1 \subseteq C_2$. Ainsi, C_1 est un cycle de G inclus dans le cycle C_2 de G . Par définition d'un cycle, on en tire que $C_1 = C_2$.
3. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $C_1 \neq C_2$. Soit $x \in C_1 \cap C_2$. On peut supposer sans perte de généralité que $C_1 = (x, e_1, \dots, e_m)$ et que $C_2 = (x, e'_1, \dots, e'_n)$. On en tire qu'il existe un sous-ensemble $C_3 \subseteq \{e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_n\} = (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ tel que C_3 est un cycle de G et donc un élément de l'ensemble \mathcal{C} .

On note ce matroïde $\mathbf{M}(G)$ (si le contexte est clair, on peut simplement le noter \mathbf{M}) et il est appelé *matroïde graphique* ou *matroïde cyclique*. On déduit de la remarque 2.12 que l'ensemble des indépendants du matroïde $\mathbf{M}(G)$ est donné par

$$\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F \text{ est une forêt}\}.$$

En effet, un indépendant du matroïde $\mathbf{M}(G)$ est un sous-ensemble de E qui ne contient pas de cycle de G . Il s'agit donc d'une forêt.

Considérons, par exemple, le graphe G de la figure 10. Dans ce cas, l'unique circuit du matroïde graphique $\mathbf{M}(G)$ est l'ensemble

$$\{e_1, e_2, e_3\}$$

et ses indépendants sont les ensembles

$$\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}, \\ \{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\} \text{ et } \{e_2, e_3, e_4\}.$$

Remarque 2.14. De manière générale, le matroïde graphique associé à un graphe fini non orienté ne détermine pas ce graphe. En effet, plusieurs graphes non isomorphes peuvent mener à des matroïdes graphiques isomorphes. Par exemple, le graphe de la figure 11 mène à un matroïde graphique isomorphe à celui associé au graphe de la figure 10.

Nous pouvons montrer que tout matroïde graphique est un matroïde régulier, au sens défini dans l'exemple 2.4.

Proposition 2.15. *Tout matroïde graphique est régulier.*

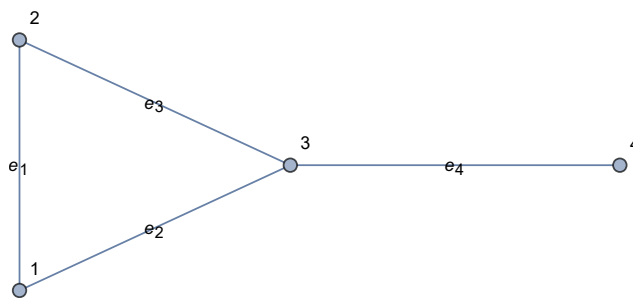


FIGURE 10 – Graphe non orienté $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.



FIGURE 11 – Graphe non orienté $G' = (V', E')$ défini par $V' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{M}(G) = (E, \mathcal{I})$ le matroïde graphique défini à partir du graphe fini non orienté $G = (V, E)$, où $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Montrons que $\mathbf{M}(G)$ est un matroïde régulier. Soit \mathbb{K} un champ. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on associe au sommet v_i un vecteur $u_i \in \mathbb{K}^n$ de sorte que les n vecteurs u_1, \dots, u_n soient linéairement indépendants. Supposons que les sommets du graphe G sont ordonnés de la façon suivante :

$$v_1 < \dots < v_n.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe deux sommets $v_{j,1}, v_{j,2} \in V$ tels que $e_j = \{v_{j,1}, v_{j,2}\}$ et $v_{j,1} \leq v_{j,2}$. On peut ainsi définir une matrice A de dimension $n \times m$ dont la j^e colonne est donnée par le vecteur

$$A_j = u_{v_{j,2}} - u_{v_{j,1}},$$

pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. On montre alors que $\mathbf{M}(G)$ est isomorphe au matroïde linéaire \mathbf{M} représenté par la matrice A à coefficients dans le champ \mathbb{K} . D'une part, supposons que $F \subseteq E$ est un ensemble dépendant du matroïde $\mathbf{M}(G)$. Ainsi, par définition, il existe un cycle $C = \{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ tel que $C \subseteq F$. On en déduit qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i A_{j_i} = 0.$$

On en tire que les k colonnes A_{j_1}, \dots, A_{j_k} de la matrice A sont linéairement dépendantes et donc que l'ensemble d'indices $\{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ est un ensemble dépendant du

matroïde \mathbf{M} . D'autre part, supposons que $Y = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ est un ensemble dépendant du matroïde \mathbf{M} . Ainsi, les colonnes A_{j_1}, \dots, A_{j_k} de la matrice A sont linéairement dépendantes et on en déduit qu'il existe des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i A_{j_i} = 0.$$

Définissons l'ensemble

$$F = \{e_{j_i} : 1 \leq i \leq k \text{ et } \lambda_i \neq 0\}.$$

Soit H le sous-graphe de G dont l'ensemble d'arêtes est F et l'ensemble de sommets contient tous les sommets de G qui sont extrémité d'une arête de F , et uniquement ceux-là. Par construction, tout sommet du graphe H rencontre au moins une arête de H . Si le graphe H contient une boucle, alors le sous-ensemble F d'arêtes contient un cycle de G et est donc un ensemble dépendant du matroïde $\mathbf{M}(G)$. Sinon, on déduit de l'indépendance linéaire des vecteurs u_{j_1}, \dots, u_{j_k} qu'il ne peut exister de sommet du graphe H qui rencontre une seule arête de H . On en tire que le graphe H ne possède aucun sommet de degré 1. Ainsi, le sous-ensemble F d'arêtes contient un cycle de G et est donc un ensemble dépendant du matroïde $\mathbf{M}(G)$. \square

Reprenons le graphe de la figure 10 et voyons ce que devient la preuve de la proposition 2.15 dans ce cas. Soit \mathbb{K} un champ. Définissons les quatre vecteurs linéairement indépendants

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où 0 et 1 représentent respectivement le neutre de l'opération $+$ et le neutre de l'opération \cdot du champ \mathbb{K} . Chaque sommet $i \in V = \{1, 2, 3, 4\}$ est associé au vecteur u_i . La matrice A obtenue en suivant la construction faite dans la preuve de la proposition 2.15 est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ensemble des dépendants

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

du matroïde linéaire représenté par la matrice A est en bijection avec l'ensemble des dépendants

$$\{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\}$$

du matroïde graphique associé au graphe G .

Passons maintenant à la notion de base, qui est duale de celle de circuit.

Définition 2.16. Soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur un ensemble fini X . Une *base* de \mathbf{M} est un sous-ensemble indépendant de X qui est maximal pour l'inclusion. Ainsi, si on ajoute n'importe quel élément de X à une base, l'ensemble considéré devient dépendant. On note \mathcal{B} (ou $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ si on veut être précis) l'ensemble des bases du matroïde \mathbf{M} .

Remarque 2.17. Toutes les bases d'un matroïde $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ défini sur un ensemble fini X contiennent le même nombre d'éléments (on dit qu'elles sont *équicardinales*). En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe B_1 et B_2 deux bases de \mathbf{M} telles que $|B_1| < |B_2|$. Alors la condition 3 de la définition 2.1 implique qu'il existe $x \in B_2 \setminus B_1$ tel que $B_1 \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, ce qui contredit le fait que B_1 est un indépendant maximal pour l'inclusion.

De manière générale, pour la même raison, si Y est un sous-ensemble de X , alors tous les sous-ensembles indépendants de Y qui sont maximaux pour l'inclusion sont équicardinaux.

Proposition 2.18. Soit X un ensemble fini et soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur l'ensemble X . L'ensemble \mathcal{B} des bases de \mathbf{M} vérifie les deux propriétés suivantes :

1. \mathcal{B} n'est pas vide ;
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et si $x \in B_1 \setminus B_2$, alors il existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tel que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ (c'est la propriété d'échange).

Démonstration.

1. Par la condition 1 de la définition 2.1, l'ensemble \mathcal{I} des indépendants de \mathbf{M} n'est pas vide. Ainsi, l'ensemble \mathcal{B} des bases de \mathbf{M} n'est pas vide non plus.
2. Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et soit $x \in B_1 \setminus B_2$. Par la condition 2 de la définition 2.1, comme $B_1 \in \mathcal{I}$, on sait que $B_1 \setminus \{x\} \in \mathcal{I}$. Or, la remarque 2.17 implique que $|B_1| = |B_2|$. Ainsi, on a $|B_1 \setminus \{x\}| < |B_2|$. Comme $B_2 \in \mathcal{I}$, on déduit alors de la condition 3 de la définition 2.1 qu'il existe $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ tel que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{I}$. Comme $x \in B_1 \setminus B_2$, on sait que $y \in B_2 \setminus B_1$ et donc que $x \neq y$. On en tire que $|(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$. Ainsi, au vu de la remarque 2.17, on trouve que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

□

Comme dans le cas des circuits, cette proposition admet une réciproque, proposée notamment par Jean-Sébastien Sereni dans ses notes de cours [23] et permettant de caractériser les familles de sous-ensembles d'un ensemble fini X qui peuvent être l'ensemble des bases d'un matroïde défini sur X . Ce résultat s'éloignant quelque peu du sujet de ce mémoire, sa preuve ne sera pas présentée ici. Le lecteur intéressé pourra en consulter une dans [23].

Proposition 2.19. Soit X un ensemble fini. Une famille \mathcal{B} de sous-ensembles de X vérifiant les deux propriétés de la proposition 2.18 est l'ensemble des bases d'un matroïde défini sur l'ensemble X .

On peut donner un lien direct entre l'ensemble des indépendants et l'ensemble des bases d'un matroïde.

Remarque 2.20. La famille \mathcal{I} des ensembles indépendants d'un matroïde $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ peut être déterminée à partir de l'ensemble \mathcal{B} de ses bases car les éléments de \mathcal{I} sont les sous-ensembles de X qui sont inclus dans l'un des éléments de \mathcal{B} . En effet, si $Y \in \mathcal{I}$, alors Y est un sous-ensemble indépendant de X . Ainsi, Y est inclus dans un sous-ensemble indépendant maximal pour l'inclusion, c'est-à-dire dans une base de \mathbf{M} . Réciproquement, si Y est un sous-ensemble de X inclus dans la base B du matroïde \mathbf{M} , alors Y est un sous-ensemble d'un ensemble indépendant et est donc indépendant (par la condition 2 de la définition 2.1).

La remarque 2.17 justifie la définition suivante.

Définition 2.21. Soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur un ensemble fini X . Si Y est un sous-ensemble de X , le *rang* de Y est le cardinal commun de tous les sous-ensembles indépendants de Y maximaux pour l'inclusion. On le note $\rho(Y)$ (ou $\rho_{\mathbf{M}}(Y)$ si on veut être précis). Le *rang du matroïde* \mathbf{M} est le rang de l'ensemble X , c'est-à-dire le cardinal commun des bases de \mathbf{M} . La *fonction rang* de \mathbf{M} est l'application

$$\rho : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{N} : Y \longmapsto \rho(Y) = \max\{|Z| : Z \subseteq Y, Z \in \mathcal{I}\}.$$

La preuve de la proposition suivante s'inspire de celle proposée par Michel Goemans dans ses notes de cours [9].

Proposition 2.22. Soit X un ensemble fini et soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur l'ensemble X . La fonction rang de \mathbf{M} vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Pour tout $Y \subseteq X$, on a $0 \leq \rho(Y) \leq |Y|$ et $\rho(Y)$ est un entier ;
2. Pour tous $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tels que $Y_1 \subseteq Y_2$, on a $\rho(Y_1) \leq \rho(Y_2)$ (c'est la propriété de croissance) ;
3. Pour tous $Y_1, Y_2 \subseteq X$, on a $\rho(Y_1 \cup Y_2) + \rho(Y_1 \cap Y_2) \leq \rho(Y_1) + \rho(Y_2)$ (c'est l'inégalité sous-modulaire).

Démonstration.

1. Soit Y un sous-ensemble de X . Le rang de Y est un entier positif car c'est le maximum d'un ensemble fini d'entiers positifs. De plus, on a bien

$$\rho(Y) = \max\{|Z| : Z \subseteq Y, Z \in \mathcal{I}\} \leq |Y|$$

car tous les éléments de l'ensemble $\{Z \subseteq Y : Z \in \mathcal{I}\}$ sont inclus dans Y et contiennent donc moins d'éléments que Y .

2. Soient Y_1 et Y_2 deux sous-ensembles de X tels que $Y_1 \subseteq Y_2$. Alors on a

$$\rho(Y_1) = \max\{|Z| : Z \subseteq Y_1, Z \in \mathcal{I}\} \leq \max\{|Z| : Z \subseteq Y_2, Z \in \mathcal{I}\} = \rho(Y_2).$$

3. Soient Y_1 et Y_2 deux sous-ensembles de X . Soit J un sous-ensemble indépendant maximal de $Y_1 \cap Y_2$ (l'existence d'un tel sous-ensemble découle du fait que l'ensemble \emptyset est un sous-ensemble indépendant de $Y_1 \cap Y_2$). Alors on sait que $|J| = \rho(Y_1 \cap Y_2)$. Vu le point 3 de la définition 2.1, J peut être étendu en un sous-ensemble indépendant maximal de Y_1 , que l'on note J_{Y_1} . On obtient donc que $J \subseteq J_{Y_1} \subseteq Y_1$ et que $|J_{Y_1}| = \rho(Y_1)$. De plus, par maximalité de J dans $Y_1 \cap Y_2$, on a

$$J_{Y_1} \setminus Y_2 = J_{Y_1} \setminus J. \quad (8)$$

En effet, d'une part, on sait que $J \subseteq Y_2$ et donc que $J_{Y_1} \setminus Y_2 \subseteq J_{Y_1} \setminus J$. D'autre part, si $j \in J_{Y_1} \setminus J$, alors on en tire que $j \in J_{Y_1}$ et que $j \notin Y_2$ car si $j \in Y_2$, alors $J \cup \{j\} \subseteq J_{Y_1}$ est un sous-ensemble indépendant de $Y_1 \cap Y_2$ qui contient strictement plus d'éléments que J , ce qui est impossible vu la maximalité du choix de J .

Toujours par le point 3 de la définition 2.1, on peut maintenant étendre J_{Y_1} en un sous-ensemble indépendant maximal de $Y_1 \cup Y_2$, que l'on note $J_{Y_1 Y_2}$. Alors on sait que $|J_{Y_1 Y_2}| = \rho(Y_1 \cup Y_2)$. On veut montrer que

$$\rho(Y_1 \cup Y_2) + \rho(Y_1 \cap Y_2) \leq \rho(Y_1) + \rho(Y_2),$$

ce qui revient à montrer que

$$|J_{Y_1 Y_2}| + |J| \leq |J_{Y_1}| + \rho(Y_2).$$

Puisque $J_{Y_1 Y_2}$ est un sous-ensemble indépendant, on déduit du point 2 de la définition 2.1 que le sous-ensemble $J_{Y_1 Y_2} \cap Y_2$ de Y_2 est indépendant et donc que $\rho(Y_2) \geq |J_{Y_1 Y_2} \cap Y_2|$. De plus, on sait que

$$J_{Y_1 Y_2} \cap Y_2 = J_{Y_1 Y_2} \setminus (J_{Y_1} \setminus Y_2) \quad (9)$$

$$= J_{Y_1 Y_2} \setminus (J_{Y_1} \setminus J), \quad (10)$$

où les égalités (9) et (10) découlent respectivement du fait que J_{Y_1} est un sous-ensemble indépendant maximal de Y_1 et de l'égalité (8). Ainsi, puisqu'on a les inclusions $J \subseteq J_{Y_1} \subseteq J_{Y_1 Y_2}$, on obtient que

$$\begin{aligned} \rho(Y_2) &\geq |J_{Y_1 Y_2} \cap Y_2| \\ &= |J_{Y_1 Y_2} \setminus (J_{Y_1} \setminus J)| \\ &= |J_{Y_1 Y_2}| - |J_{Y_1} \setminus J| \\ &= |J_{Y_1 Y_2}| - (|J_{Y_1}| - |J|) \\ &= |J_{Y_1 Y_2}| - |J_{Y_1}| + |J|, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Comme dans le cas des circuits et des bases, cette proposition admet une réciproque, proposée notamment par Jean-Sébastien Sereni dans ses notes de cours [23] et permettant de caractériser les applications qui peuvent être la fonction rang d'un matroïde. À nouveau, ce résultat s'éloignant quelque peu du sujet de ce mémoire, sa preuve ne sera pas présentée ici. Le lecteur intéressé pourra en consulter une dans [23].

Proposition 2.23. *Soit X un ensemble fini et soit ρ une fonction définie sur $\mathcal{P}(X)$ et à valeurs dans \mathbb{N} vérifiant les trois propriétés de la proposition 2.22. Alors il existe un matroïde défini sur l'ensemble X dont la fonction rang est ρ .*

Définition 2.24. Soit X un ensemble fini et soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur l'ensemble X . Soit ρ la fonction rang de \mathbf{M} . Pour tout sous-ensemble Y de X , on définit la *fermeture* de Y dans \mathbf{M} par

$$\bar{Y} = \{x \in X : \rho(Y \cup \{x\}) = \rho(Y)\}.$$

Il est clair que $Y \subseteq \bar{Y}$. Un sous-ensemble Y de X est dit *fermé* si $Y = \bar{Y}$. En particulier, l'ensemble X est fermé. On peut également définir la *fonction fermeture* du matroïde \mathbf{M} comme étant l'application

$$\bar{\cdot} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : Y \longmapsto \bar{Y}.$$

Reprenons quelques exemples étudiés ci-dessus et voyons ce que l'on peut dire à propos des circuits, des bases, de la fonction rang et de la fonction fermeture de ces matroïdes.

Exemple 2.25. Considérons le cas du matroïde uniforme $\mathbf{M} = \mathbf{U}_{k,|X|}$ défini sur l'ensemble fini X (voir exemple 2.2). Si $k < |X|$, alors les bases de \mathbf{M} sont les sous-ensembles de X de cardinal k et les circuits de \mathbf{M} sont les sous-ensembles de X de cardinal $k + 1$. Si $k \geq |X|$, alors l'unique base de \mathbf{M} est X et le matroïde \mathbf{M} ne possède pas de circuit. Le rang d'un sous-ensemble Y de X est donné par

$$\rho(Y) = \min\{|Y|, k\}$$

et le rang du matroïde \mathbf{M} est donc donné par

$$\rho(X) = \min\{|X|, k\}.$$

La fermeture d'un sous-ensemble Y de X est donnée par

$$\bar{Y} = \begin{cases} Y & \text{si } |Y| < k \\ X & \text{sinon} \end{cases}.$$

Reprenons le cas du matroïde uniforme $\mathbf{U}_{2,5}$ défini sur l'ensemble $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On trouve que l'ensemble de ses bases est

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

et l'ensemble de ses circuits est

$$\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \\ \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}.$$

De plus, son rang vaut 2.

Exemple 2.26. Considérons le cas du matroïde vectoriel \mathbf{M} défini sur l'ensemble fini X (voir exemple 2.3). Les bases de \mathbf{M} sont les sous-ensembles de X qui sont des bases (au sens de l'algèbre linéaire) du sous-espace vectoriel engendré par X . Le rang d'un sous-ensemble Y de X est égal à la dimension (au sens de l'algèbre linéaire) du sous-espace vectoriel engendré par Y et le rang du matroïde \mathbf{M} est donc égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par X . De plus, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors nous savons (voir par exemple la section XIII.5 de [19]) que

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G),$$

où $F + G = \langle F \cup G \rangle$. Ainsi, dans le cadre des matroïdes vectoriels, l'inégalité sous-modulaire de la proposition 2.22 est une égalité.

Exemple 2.27. Considérons le cas du matroïde linéaire \mathbf{M} représenté par la matrice A (voir exemple 2.4). Les bases de \mathbf{M} sont les sous-ensembles Y de X de cardinal $\text{rg}(A)$ tels que les colonnes correspondant aux indices dans Y sont linéairement indépendantes. Le rang d'un sous-ensemble Y de X est égal au rang (au sens de l'algèbre linéaire) de la matrice A_Y et le rang du matroïde \mathbf{M} est donc égal au rang de la matrice $A_X = A$.

Reprenons le cas du matroïde linéaire représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et qui est donc défini sur l'ensemble $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On trouve que l'ensemble de ses bases est

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

Ainsi, le rang du matroïde vaut 2, qui est bien égal au rang de la matrice A .

Exemple 2.28. Considérons le cas du matroïde graphique $\mathbf{M}(G)$ associé à un graphe fini non orienté $G = (V, E)$ (voir exemple 2.13). Si le graphe G est connexe, alors les bases du matroïde $\mathbf{M}(G)$ sont les sous-arbres couvrants de G . Sinon, les bases du matroïde $\mathbf{M}(G)$ sont obtenues en prenant un sous-arbre couvrant dans chaque composante connexe du graphe G . Le rang d'un sous-ensemble F de E est donné par

$$\rho(F) = |V| - K(V, F),$$

où $K(V, F)$ est le nombre de composantes connexes (y compris les sommets isolés) du graphe $G' = (V, F)$. Ainsi, le rang du matroïde $\mathbf{M}(G)$ est égal à

$$\rho(E) = |V| - k,$$

où k est le nombre de composantes connexes du graphe G . La fermeture d'un sous-ensemble F de E est donnée par

$$\bar{F} = \{e \in E : e \text{ est dans la même composante connexe qu'une arête du graphe } G'\}.$$

Reprenons le graphe G de la figure 10. On trouve que l'ensemble des bases du matroïde $\mathbf{M}(G)$ est l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{\{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_4\}\}$$

dont chaque élément est bien un sous-arbre couvrant du graphe G . De plus, le rang du matroïde vaut 3, ce qui correspond bien à $4-1$, où 1 est le nombre de composantes connexes du graphe G .

Nous allons à présent voir comment construire un matroïde à partir d'autres matroïdes déjà définis. Cette construction nous sera utile dans les démonstrations du corollaire 2.36 de Rado–Hall et du théorème 3.9 de Gale–Ryser.

Définition 2.29. Soient X et Y deux ensembles finis disjoints. Considérons $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur X et $\mathbf{N} = (Y, \mathcal{J})$ un matroïde défini sur Y . La *somme directe* des matroïdes \mathbf{M} et \mathbf{N} est le matroïde défini sur l'ensemble fini $X \cup Y$ et dont l'ensemble des indépendants est donné par

$$\mathcal{K} = \{Z \subseteq X \cup Y : Z \cap X \in \mathcal{I} \text{ et } Z \cap Y \in \mathcal{J}\}.$$

Il est noté $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$. Il s'agit bien d'un matroïde car les trois conditions de la définition 2.1 sont vérifiées :

1. L'ensemble $\emptyset \subseteq X \cup Y$ appartient à \mathcal{K} car $\emptyset \cap X = \emptyset \in \mathcal{I}$ et $\emptyset \cap Y = \emptyset \in \mathcal{J}$ par le point 1 de la définition 2.1.
2. Soient $Z_1, Z_2 \subseteq X \cup Y$ tels que $Z_1 \in \mathcal{K}$ et $Z_2 \subseteq Z_1$. On sait que $Z_1 \cap X \in \mathcal{I}$ et que $Z_1 \cap Y \in \mathcal{J}$. Comme $Z_2 \subseteq Z_1$, on sait que $Z_2 \cap X \subseteq Z_1 \cap X$ et que $Z_2 \cap Y \subseteq Z_1 \cap Y$. On en tire, par le point 2 de la définition 2.1, que $Z_2 \cap X \in \mathcal{I}$ et que $Z_2 \cap Y \in \mathcal{J}$. Ainsi, on trouve que $Z_2 \in \mathcal{K}$.
3. Soient $Z_1, Z_2 \subseteq X \cup Y$ tels que $Z_1, Z_2 \in \mathcal{K}$ et $|Z_1| < |Z_2|$. On sait alors que soit $|Z_1 \cap X| < |Z_2 \cap X|$, soit $|Z_1 \cap Y| < |Z_2 \cap Y|$. Sans perte de généralité, supposons que $|Z_1 \cap X| < |Z_2 \cap X|$. Alors, comme $Z_1 \cap X \in \mathcal{I}$ et $Z_2 \cap X \in \mathcal{I}$, on sait par le point 3 de la définition 2.1 qu'il existe $z \in (Z_2 \cap X) \setminus (Z_1 \cap X) = (Z_2 \setminus Z_1) \cap X$ tel que $(Z_1 \cap X) \cup \{z\} \in \mathcal{I}$. Ainsi, on a $(Z_1 \cup \{z\}) \cap X \in \mathcal{I}$. Comme X et Y sont disjoints et $z \in X$, on a

$$(Z_1 \cup \{z\}) \cap Y = Z_1 \cap Y.$$

Or, on sait que $Z_1 \cap Y \in \mathcal{J}$. On a donc trouvé un élément $z \in Z_2 \setminus Z_1$ tel que $(Z_1 \cup \{z\}) \cap X \in \mathcal{I}$ et $(Z_1 \cup \{z\}) \cap Y \in \mathcal{J}$, c'est-à-dire $Z_1 \cup \{z\} \in \mathcal{K}$.

On peut facilement étendre cette définition. Soit m un naturel tel que $m \geq 2$ et soient X_1, \dots, X_m des ensembles finis disjoints. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, soit $\mathbf{M}_i = (X_i, \mathcal{I}_i)$ un matroïde défini sur X_i . La somme directe des matroïdes $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_m$ est le matroïde défini sur l'ensemble $\bigcup_{i=1}^m X_i$ et dont l'ensemble des indépendants est donné par

$$\mathcal{I} = \left\{ Y \subseteq \bigcup_{i=1}^m X_i : Y \cap X_i \in \mathcal{I}_i, \forall i \in \{1, \dots, m\} \right\}.$$

Un matroïde est dit *connexe* s'il ne peut pas s'écrire comme une somme directe non triviale de matroïdes. Tout matroïde s'écrit de manière unique comme somme directe de matroïdes connexes qui sont alors appelés ses *composantes connexes*.

Proposition 2.30. *Soient $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ et $\mathbf{N} = (Y, \mathcal{J})$ deux matroïdes définis sur des ensembles finis disjoints X et Y . Alors on a*

1. $\mathcal{C}(\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}) = \mathcal{C}(\mathbf{M}) \cup \mathcal{C}(\mathbf{N})$;
2. $\mathcal{B}(\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}) = \{B_{\mathbf{M}} \cup B_{\mathbf{N}} : B_{\mathbf{M}} \in \mathcal{B}(\mathbf{M}), B_{\mathbf{N}} \in \mathcal{B}(\mathbf{N})\}$;
3. Pour tout sous-ensemble $Z \subseteq X \cup Y$, $\rho_{\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}}(Z) = \rho_{\mathbf{M}}(Z \cap X) + \rho_{\mathbf{N}}(Z \cap Y)$.

Démonstration. Notons \mathcal{K} l'ensemble des indépendants du matroïde $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$ défini sur l'ensemble $X \cup Y$.

1. Soit C un circuit du matroïde $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$. Ainsi, on sait que $C \notin \mathcal{K}$ et que pour tout $z \in C$, on a $C \setminus \{z\} \in \mathcal{K}$. Alors on sait que soit $C \cap X \notin \mathcal{I}$, soit $C \cap Y \notin \mathcal{J}$. Sans perte de généralité, supposons que $C \cap X \notin \mathcal{I}$. De plus, pour tout $z \in C$, on a $(C \setminus \{z\}) \cap X \in \mathcal{I}$ et $(C \setminus \{z\}) \cap Y \in \mathcal{J}$. Supposons qu'il existe un élément $y \in C \cap Y$. Ainsi, on sait que $(C \setminus \{y\}) \cap X = C \cap X \notin \mathcal{I}$, ce qui est absurde. On en déduit que $C \cap Y = \emptyset$ et donc que $C \cap X = C$. Finalement, l'ensemble C est un circuit du matroïde \mathbf{M} car $C \notin \mathcal{I}$ et pour tout $z \in C$, on a $(C \setminus \{z\}) \cap X = C \setminus \{z\} \in \mathcal{I}$.

Soit C un circuit du matroïde \mathbf{M} . Montrons que $C \subseteq X \subseteq X \cup Y$ est un circuit du matroïde $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$. On sait que $C \notin \mathcal{I}$. Ainsi, il est clair que $C \notin \mathcal{K}$. Soit $z \in C$. On sait que

$$(C \setminus \{z\}) \cap X = C \setminus \{z\} \in \mathcal{I}$$

car C est un circuit du matroïde \mathbf{M} et que

$$(C \setminus \{z\}) \cap Y = \emptyset \in \mathcal{J}.$$

Ainsi, on trouve que $C \setminus \{z\} \in \mathcal{K}$. Pour la même raison, tout circuit du matroïde \mathbf{N} est un circuit du matroïde $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$.

2. Soit B une base du matroïde $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$. On sait alors que $B \in \mathcal{K}$ et que pour tout $z \in (X \cup Y) \setminus B$, on a $B \cup \{z\} \notin \mathcal{K}$. Posons $B_{\mathbf{M}} = B \cap X$ et $B_{\mathbf{N}} = B \cap Y$. On a alors $B = (B \cap X) \cup (B \cap Y) = B_{\mathbf{M}} \cup B_{\mathbf{N}}$. De plus, on trouve que $B_{\mathbf{M}}$ est une base du matroïde \mathbf{M} . En effet, comme $B \in \mathcal{K}$, on sait que $B_{\mathbf{M}} \in \mathcal{I}$. De plus, pour tout $z \in X \setminus B_{\mathbf{M}}$, on a

$$B_{\mathbf{M}} \cup \{z\} = (B \cap X) \cup \{z\} = (B \cup \{z\}) \cap X \notin \mathcal{I}$$

car on sait que $B \cup \{z\} \notin \mathcal{K}$ et que $(B \cup \{z\}) \cap Y = B \cap Y \in \mathcal{J}$. De la même façon, on montre que $B_{\mathbf{N}}$ est une base du matroïde \mathbf{N} .

Soient $B_{\mathbf{M}}$ une base du matroïde \mathbf{M} et $B_{\mathbf{N}}$ une base du matroïde \mathbf{N} . Ainsi, on a $B_{\mathbf{M}} \subseteq X$, $B_{\mathbf{M}} \in \mathcal{I}$, $B_{\mathbf{N}} \subseteq Y$ et $B_{\mathbf{N}} \in \mathcal{J}$. On en tire que $B_{\mathbf{M}} \cup B_{\mathbf{N}} \in \mathcal{K}$. Soit z un élément de l'ensemble

$$(X \cup Y) \setminus (B_{\mathbf{M}} \cup B_{\mathbf{N}}) = (X \setminus B_{\mathbf{M}}) \cup (Y \setminus B_{\mathbf{N}}).$$

Supposons sans perte de généralité que $z \in X \setminus B_{\mathbf{M}}$. Ainsi, on a $B_{\mathbf{M}} \cup \{z\} \subseteq X$. Comme $B_{\mathbf{M}}$ est une base du matroïde \mathbf{M} , on sait que $B_{\mathbf{M}} \cup \{z\} \notin \mathcal{I}$. On déduit alors de l'égalité

$$((B_{\mathbf{M}} \cup B_{\mathbf{N}}) \cup \{z\}) \cap X = B_{\mathbf{M}} \cup \{z\}$$

que $(B_{\mathbf{M}} \cup B_{\mathbf{N}}) \cup \{z\} \notin \mathcal{K}$. Ainsi, $B_{\mathbf{M}} \cup B_{\mathbf{N}}$ est bien une base du matroïde $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$.

3. Soit Z un sous-ensemble de $X \cup Y$ et soit T un sous-ensemble de Z . Alors on a

$$\begin{aligned} T &\in \mathcal{K} \\ \Leftrightarrow T \cap X &\in \mathcal{I} \text{ et } T \cap Y \in \mathcal{J} \\ \Leftrightarrow T &= T' \cup T'' \text{ avec } T' \subseteq X, T' \in \mathcal{I}, T'' \subseteq Y \text{ et } T'' \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Puisque les ensembles X et Y sont disjoints, on en tire que

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathbf{M} \oplus \mathbf{N}}(Z) \\ &= \max\{|T| : T \subseteq Z \text{ et } T \in \mathcal{K}\} \\ &= \max\{|T'| : T' \subseteq Z \cap X \text{ et } T' \in \mathcal{I}\} + \max\{|T''| : T'' \subseteq Z \cap Y \text{ et } T'' \in \mathcal{J}\} \\ &= \rho_{\mathbf{M}}(Z \cap X) + \rho_{\mathbf{N}}(Z \cap Y). \end{aligned}$$

□

Tout comme la définition 2.29, la proposition 2.30 peut facilement se généraliser si on considère la somme directe d'un nombre fini de matroïdes. Donnons maintenant un exemple de somme directe de matroïdes qui nous sera utile dans la preuve du théorème 3.9 du chapitre suivant.

Exemple 2.31. Soit m un naturel non nul. Soient X_1, \dots, X_m des ensembles finis disjoints et soient k_1, \dots, k_m des naturels. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, considérons le matroïde uniforme $\mathbf{M}_i = \mathbf{U}_{k_i, |X_i|}$ défini sur l'ensemble X_i (voir l'exemple 2.2 pour plus de détails). Définissons le matroïde

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{M}_m$$

sur l'ensemble $\bigcup_{i=1}^m X_i$. Soit Y un sous-ensemble de $\bigcup_{i=1}^m X_i$. Alors Y est un indépendant de \mathbf{M} si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$|Y \cap X_i| \leq k_i.$$

De plus, on déduit de l'exemple 2.25 et de la proposition 2.30 que le rang dans le matroïde \mathbf{M} d'un sous-ensemble Y de $\bigcup_{i=1}^m X_i$ est égal à

$$\rho_{\mathbf{M}}(Y) = \sum_{i=1}^m \rho_{\mathbf{M}_i}(Y \cap X_i) = \sum_{i=1}^m \min\{|Y \cap X_i|, k_i\}.$$

L'algorithme de Kruskal est bien connu en théorie des graphes. Il permet de déterminer, dans un graphe fini non orienté connexe G dont chaque arête est associée à un poids positif, un sous-arbre couvrant de poids total maximum. Si on considère le matroïde graphique $\mathbf{M}(G)$ associé au graphe G (voir exemple 2.13), cela revient à déterminer un indépendant de coût total maximum. Comme nous avons vu beaucoup d'autres exemples de matroïdes, il semble légitime de se demander si l'on ne pourrait pas généraliser ce problème à n'importe quel matroïde. La fin de cette section propose donc un algorithme qui permet de déterminer, dans un matroïde quelconque, un indépendant de coût total maximum.

Algorithme 2.32. Considérons un matroïde $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ défini sur un ensemble fini X et une fonction de coût

$$c : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On voudrait trouver un ensemble indépendant Y de \mathbf{M} de coût total

$$c(Y) = \sum_{y \in Y} c(y)$$

maximum. Si tous les coûts sont positifs, cela revient à chercher une base de \mathbf{M} de coût total maximum. Sinon, tout élément dont le coût est strictement négatif n'appartient à aucune solution optimale (vu la condition 2 de la définition 2.1) et on peut donc retirer cet élément de l'ensemble X de départ.

Voici donc un algorithme glouton qui permet de résoudre le problème considéré. Cet algorithme est dit naïf et n'est généralement pas optimal. Il retourne une liste qui contient, pour tout $i \in \{0, \dots, |X|\}$ tel qu'il existe un ensemble indépendant de \mathbf{M} de cardinal i , un sous-ensemble indépendant S_i de cardinal i qui maximise le coût total parmi les ensembles indépendants de \mathbf{M} de cardinal i . Un ensemble indépendant de \mathbf{M} de coût total maximum est alors simplement obtenu en sélectionnant le meilleur élément S_i dans la liste fournie en sortie.

Trier et réordonner les éléments de X de sorte que $c(x_1) \geq \dots \geq c(x_{|X|})$

$S = \emptyset, l = \{S\}$

Pour $i \in \{1, \dots, |X|\}$

 Si $S \cup \{x_i\} \in \mathcal{I}$, alors

$S \leftarrow S \cup \{x_i\}$

$l \leftarrow l \cup \{S\}$

Renvoyer la liste l

Remarque 2.33. Pour les analyses d'algorithmes, lorsqu'on a un matroïde $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ fourni en entrée, on suppose souvent que l'on dispose de l'oracle d'indépendance, c'est-à-dire que pour un sous-ensemble Y de X , on sait décider en temps constant si Y est un indépendant de \mathbf{M} . Dans ce modèle de complexité, déterminer une base de coût total maximum et un indépendant de coût total maximum sont des problèmes polynomiaux.

2.2 Théorème de Rado–Hall

Définition 2.34. Soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur un ensemble fini X et soit $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ une famille finie de sous-ensembles de X . Une famille (x_1, \dots, x_m) d'éléments de X est un *système de représentants distincts* de \mathcal{F} (abrégé par *SRD*) si x_1, \dots, x_m sont m éléments distincts et si $x_i \in F_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Si, de plus, l'ensemble $\{x_1, \dots, x_m\}$ est un indépendant de \mathbf{M} , alors on dit que (x_1, \dots, x_m) est un *système indépendant de représentants distincts* de \mathcal{F} (abrégé par *SRD indépendant*).

Le théorème suivant a été énoncé par Hall dans les années 1930. La preuve présentée dans la suite s'inspire de celle proposée par Rado et reprise par Brualdi dans son livre [4].

Théorème 2.35. Soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur un ensemble fini X . Notons ρ sa fonction rang. Soit $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ une famille finie de sous-ensembles de X . La famille \mathcal{F} possède un SRD indépendant si et seulement si pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, m\}$, on a

$$\rho\left(\bigcup_{k \in K} F_k\right) \geq |K|. \quad (11)$$

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire. En effet, soit (x_1, \dots, x_m) un SRD indépendant de la famille \mathcal{F} et soit un sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, m\}$. Alors on a

$$\rho\left(\bigcup_{k \in K} F_k\right) \geq |K|$$

car le membre de gauche est égal au cardinal commun de tous les sous-ensembles indépendants maximaux de $\bigcup_{k \in K} F_k$ et le membre de droite est égal au cardinal de $\bigcup_{k \in K} \{x_k\}$, qui est un sous-ensemble indépendant de $\bigcup_{k \in K} F_k$.

Montrons maintenant que la condition est suffisante et supposons donc que les inégalités (11) sont satisfaites. Si $|F_i| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, alors les éléments uniques des F_i forment un SRD indépendant de \mathcal{F} . En effet, si on note x_i l'unique élément de F_i , pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, alors l'inégalité (11) considérée avec l'ensemble $K = \{1, \dots, m\}$ implique que (x_1, \dots, x_m) est un SRD indépendant de \mathcal{F} car il découle des inégalités

$$m \geq \rho(\{x_1, \dots, x_m\}) \geq m$$

que $\rho(\{x_1, \dots, x_m\}) = m$.

Pour terminer la preuve, on montre que si un sous-ensemble F_i possède au moins deux éléments, alors un élément de ce F_i peut lui être retiré sans violer les inégalités (11) pour la nouvelle famille obtenue. On se ramène ainsi à une famille dont chaque ensemble contient un unique élément et qui vérifie les inégalités (11). La conclusion découle alors du paragraphe précédent. Sans perte de généralité, supposons donc que $|F_1| \geq 2$. Soient x et y deux éléments distincts de F_1 . Supposons qu'aucune des deux familles $(F_1 \setminus \{x\}, F_2, \dots, F_m)$ et $(F_1 \setminus \{y\}, F_2, \dots, F_m)$ ne vérifie les inégalités (11) correspondantes.

Ainsi, puisque $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ vérifie les inégalités (11), on sait qu'il existe deux sous-ensembles $K_1, K_2 \subseteq \{2, \dots, m\}$ tels que

$$\rho \left(F'_1 \cup \bigcup_{k \in K_1} F_k \right) < |K_1| + 1, \text{ c'est-à-dire } \rho \left(F'_1 \cup \bigcup_{k \in K_1} F_k \right) \leq |K_1|,$$

et

$$\rho \left(F''_1 \cup \bigcup_{k \in K_2} F_k \right) < |K_2| + 1, \text{ c'est-à-dire } \rho \left(F''_1 \cup \bigcup_{k \in K_2} F_k \right) \leq |K_2|,$$

où $F'_1 = F_1 \setminus \{x\}$ et $F''_1 = F_1 \setminus \{y\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} & |K_1| + |K_2| \\ & \geq \rho \left(F'_1 \cup \bigcup_{k \in K_1} F_k \right) + \rho \left(F''_1 \cup \bigcup_{k \in K_2} F_k \right) \\ & \geq \rho \left(\left(F'_1 \cup \bigcup_{k \in K_1} F_k \right) \cup \left(F''_1 \cup \bigcup_{k \in K_2} F_k \right) \right) + \rho \left(\left(F'_1 \cup \bigcup_{k \in K_1} F_k \right) \cap \left(F''_1 \cup \bigcup_{k \in K_2} F_k \right) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\geq \rho \left(F_1 \cup \bigcup_{k \in K_1 \cup K_2} F_k \right) + \rho \left(\bigcup_{k \in K_1 \cap K_2} F_k \right) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \geq 1 + |K_1 \cup K_2| + |K_1 \cap K_2| \\ & = 1 + |K_1| + |K_2|, \end{aligned} \quad (14)$$

ce qui est absurde. Les inégalités (12), (13) et (14) découlent respectivement de l'inégalité sous-modulaire, de la propriété de croissance de la fonction rang d'un matroïde et des inégalités (11) satisfaites par la famille $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$. On en déduit finalement qu'au moins une des deux familles $(F_1 \setminus \{x\}, F_2, \dots, F_m)$ et $(F_1 \setminus \{y\}, F_2, \dots, F_m)$ vérifie les inégalités (11) correspondantes, ce qui termine la preuve. \square

Corollaire 2.36. *Soit $\mathbf{M} = (X, \mathcal{I})$ un matroïde défini sur un ensemble fini X . Notons ρ sa fonction rang. Soit $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ une famille finie de sous-ensembles de X et soit t un naturel non nul tel que $t \leq m$. Il existe une sous-famille de \mathcal{F} composée de t ensembles qui possède un SRD indépendant si et seulement si pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, m\}$, on a*

$$\rho \left(\bigcup_{k \in K} F_k \right) \geq |K| - (m - t). \quad (15)$$

Remarquons que l'inégalité (15) est satisfaite si $|K| \leq m - t$ car le membre de gauche est toujours positif, au vu du point 1 de la proposition 2.22.

Démonstration. Soit Y un ensemble tel que $Y \cap X = \emptyset$ et $|Y| = m - t$. Considérons le matroïde \mathbf{M}' défini sur l'ensemble $X \cup Y$ comme la somme directe du matroïde \mathbf{M} défini sur X et du matroïde libre $\mathbf{U}_{|Y|, |Y|}$ défini sur Y . Ainsi, un sous-ensemble $Z \subseteq X \cup Y$ est

un indépendant de \mathbf{M}' si et seulement si $Z \cap X$ est un indépendant de \mathbf{M} . En effet, la collection des indépendants du matroïde libre $\mathbf{U}_{|Y|,|Y|}$ défini sur Y est l'ensemble $\mathcal{P}(Y)$ des parties de Y . On en tire que pour tout sous-ensemble $Z \subseteq X \cup Y$, on a $Z \cap Y$ qui est un indépendant du matroïde libre $\mathbf{U}_{|Y|,|Y|}$ défini sur Y . De plus, au vu de la proposition 2.30 et de l'exemple 2.25, la fonction rang ρ' du matroïde \mathbf{M}' est telle que pour tout sous-ensemble $Z \subseteq X \cup Y$, on a

$$\rho'(Z) = \rho(Z \cap X) + |Z \cap Y|.$$

Comme X et Y sont deux ensembles disjoints, on peut montrer qu'il existe une sous-famille de $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ composée de t ensembles qui possède un SRD indépendant pour \mathbf{M} si et seulement si la famille (F'_1, \dots, F'_m) définie, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, par

$$F'_j = F_j \cup Y,$$

possède un SRD indépendant pour \mathbf{M}' . En effet, sans perte de généralité, supposons que la sous-famille (F_1, \dots, F_t) de \mathcal{F} possède un SRD (x_1, \dots, x_t) indépendant pour \mathbf{M} . Supposons que $Y = \{y_1, \dots, y_{m-t}\}$. Alors $(x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_{m-t})$ est un SRD indépendant pour \mathbf{M}' de la famille (F'_1, \dots, F'_m) . Réciproquement, supposons que (x_1, \dots, x_m) est un SRD indépendant pour \mathbf{M}' de la famille (F'_1, \dots, F'_m) . Comme $|Y| = m - t$, on sait qu'au plus $m - t$ éléments x_i sont dans Y , c'est-à-dire qu'au moins t éléments x_i ne sont pas dans Y et appartiennent donc à l'ensemble F_i correspondant. Prenons les t premiers d'entre eux et notons-les x_{i_1}, \dots, x_{i_t} . Alors on a $(x_{i_1}, \dots, x_{i_t})$ qui est un SRD indépendant pour \mathbf{M} de la famille $(F_{i_1}, \dots, F_{i_t})$, qui est une sous-famille de $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ composée de t ensembles.

Par le théorème 2.35 de Rado–Hall, l'existence d'un SRD indépendant pour \mathbf{M}' de la famille (F'_1, \dots, F'_m) est équivalente au fait que pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} \rho' \left(\bigcup_{k \in K} F'_k \right) &= \rho \left(\bigcup_{k \in K} F_k \right) + |Y| \\ &= \rho \left(\bigcup_{k \in K} F_k \right) + m - t \\ &\geq |K|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, m\}$, on a

$$\rho \left(\bigcup_{k \in K} F_k \right) \geq |K| - (m - t).$$

□

Remarque 2.37. Si \mathbf{M} est le matroïde libre défini sur un ensemble fini X (voir exemple 2.2), alors en utilisant les résultats de l'exemple 2.25, on trouve que le théorème 2.35 et le corollaire 2.36 donnent respectivement les conditions

$$\left| \bigcup_{k \in K} F_k \right| \geq |K| \text{ et } \left| \bigcup_{k \in K} F_k \right| \geq |K| - (m - t),$$

pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, m\}$, pour l'existence d'un SRD indépendant pour \mathbf{M} de la famille $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ et d'une sous-famille de \mathcal{F} composée de t ensembles respectivement.

2.3 Première application à la théorie des graphes

Dans cette section, nous allons résoudre quelques problèmes de partition des arêtes d'un graphe. Nous allons en particulier chercher à partitionner un graphe en sous-graphes bipartis complets. Nous étudions dans un premier temps le théorème de Graham–Pollak, qui a été énoncé dans les années 1970 et qui permet d'obtenir une borne inférieure pour le nombre minimum de sous-graphes bipartis complets nécessaires pour avoir une telle partition. Nous verrons que cette borne est liée aux valeurs propres du graphe. Nous allons ensuite appliquer le théorème de Rado–Hall dans le but d'obtenir une extension de ce théorème de Graham–Pollak. Cela nous permet de trouver, au sein même de la partition, une forêt d'un type bien particulier. Commençons par rappeler qu'une *clique* d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est un sous-graphe complet de G . Nous pouvons maintenant introduire la définition suivante.

Définition 2.38. Une *biclique* d'un graphe fini non orienté $G = (V, E)$ est un sous-graphe biparti complet de G . Une partition des arêtes de G en bicliques est appelée une *décomposition bipartie* du graphe G . Par abus de langage, nous nous autorisons à parler d'une partition du graphe G en bicliques. Certains auteurs (voir par exemple l'article [2] de Alon, Brualdi et Shader) représentent une décomposition bipartie du graphe G comme un coloriage des arêtes de G tel que chaque classe de couleur est un ensemble d'arêtes formant un sous-graphe biparti complet de G . Nous allons nous intéresser au plus petit nombre de bicliques nécessaires pour partitionner les arêtes de G , c'est-à-dire au plus petit nombre de couleurs nécessaires pour représenter une décomposition bipartie du graphe G . Ce nombre est noté $bp(G)$.

Exemple 2.39. La figure 12 représente une décomposition bipartie d'un graphe fini non orienté. Les bicliques utilisées sont les sous-graphes bipartis complets $K_{2,3}$ en rouge, $K_{1,2}$ en bleu et $K_{1,1}$ en vert.

La définition 2.38 a permis à Graham et Pollak de modéliser, dans leur article [10], une application informatique. Ils y ont en effet introduit un problème de communication entre ordinateurs qui est lié à la commutation en boucle de Pierce (voir [18] pour plus de détails).

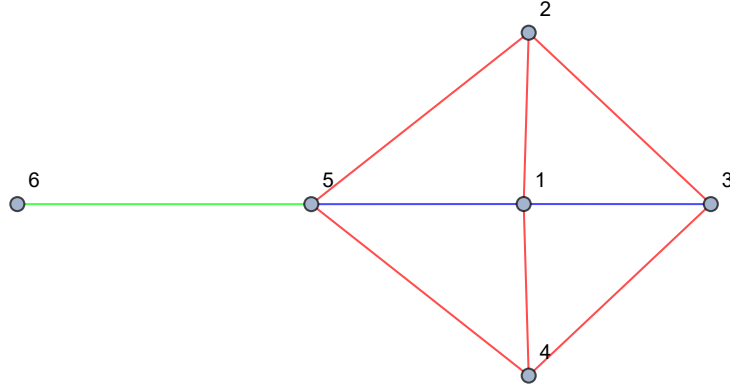


FIGURE 12 – Décomposition bipartite du graphe fini non orienté $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.

Notation 2.40. Soit G un graphe non orienté d'ordre n . On note n^+ (respectivement n^- et n^0) le nombre de valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités, strictement positives (respectivement strictement négatives et nulles) de G . On a donc en particulier que $n^+ + n^- + n^0 = n$.

Le résultat suivant est le théorème de Graham–Pollak. Il nous fournit une borne inférieure pour le nombre $bp(G)$ associé à n'importe quel graphe fini non orienté G .

Théorème 2.41. Soit G un graphe non orienté d'ordre n . Alors on a

$$bp(G) \geq \max\{n^+, n^-\}.$$

Avant de passer à la démonstration du théorème de Graham–Pollak, rappelons la définition d'une forme quadratique. Soit V un espace vectoriel réel. Une *forme bilinéaire* sur V est une application

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui est linéaire en chaque argument. Une telle forme est *symétrique* si $g(x, y) = g(y, x)$, pour tous $x, y \in V$. Une application

$$q : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une *forme quadratique* sur V s'il existe une forme bilinéaire symétrique $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$q(x) = g(x, x),$$

pour tout $x \in V$. Soit W un sous-espace vectoriel de V . Une forme quadratique $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est *définie positive* (respectivement *définie négative*) sur W si $q(x) > 0$ (respectivement $q(x) < 0$) pour tout $x \in W \setminus \{0\}$ et elle est *semi-définie positive* (respectivement *semi-définie négative*) sur W si $q(x) \geq 0$ (respectivement $q(x) \leq 0$) pour tout $x \in W \setminus \{0\}$.

Démonstration. Soit A la matrice d'adjacence du graphe G . Considérons la forme quadratique q_G définie sur l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^n par

$$q_G(x) = \tilde{x}Ax.$$

Puisque la matrice A est symétrique et que l'élément $A_{i,j}$ vaut 1 si les sommets i et j sont reliés par une arête (et 0 sinon), on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$q_G(x) = 2 \sum_{\{(i,j): 1 \leq i \leq j \leq n, i \text{ et } j \text{ sont reliés par une arête dans } G\}} x_i x_j. \quad (16)$$

Soit W^+ (respectivement W^- et W^0) le sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension n^+ (respectivement n^- et n^0) engendré par des vecteurs propres associés aux n^+ valeurs propres strictement positives (respectivement n^- valeurs propres strictement négatives et n^0 valeurs propres nulles) de G . On a donc

$$\mathbb{R}^n = W^+ \oplus W^- \oplus W^0.$$

La forme quadratique q_G est semi-définie positive sur $W^+ \oplus W^0$ (qui est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension $n^+ + n^0$). De même, la forme quadratique q_G est semi-définie négative sur $W^- \oplus W^0$ (qui est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension $n^- + n^0$). De plus, ces sous-espaces sont maximaux pour ces propriétés. En effet, pour tout $x \in W^- \setminus \{0\}$, on a $q_G(x) < 0$ et pour tout $x \in W^+ \setminus \{0\}$, on a $q_G(x) > 0$.

Soit (B_1, \dots, B_r) une partition des arêtes de G en bicliques. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, soit G_i le graphe dont les sommets sont ceux de G et dont les arêtes sont celles de B_i , soit A_i sa matrice d'adjacence et soit q_{G_i} la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^n par

$$q_{G_i}(x) = \tilde{x}A_i x.$$

Vu l'égalité (16), on trouve alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$q_G(x) = q_{G_1}(x) + \dots + q_{G_r}(x).$$

Étant donné l'exemple 1.5, on sait que chaque sous-graphe biparti complet B_i a une unique valeur propre strictement négative et une unique valeur propre strictement positive. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, la forme quadratique q_{G_i} est semi-définie positive sur un sous-espace U_i de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$. On en tire que $\bigcap_{i=1}^r U_i$ est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension au moins $n - r$ sur lequel q_G est une forme quadratique semi-définie positive. On en déduit que $n - r \leq n^+ + n^0$ et donc que $r \geq n - (n^+ + n^0) = n^-$. De manière similaire, on trouve que $r \geq n^+$. D'où la conclusion. \square

Reprenons l'exemple 2.39. La matrice d'adjacence du graphe non orienté G représenté à la figure 12 est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de ses valeurs propres grâce au logiciel Mathematica nous montre que deux de ses valeurs propres sont strictement positives, trois sont strictement négatives et une est nulle. Ainsi, pour ce graphe G , on doit avoir

$$bp(G) \geq \max\{2, 3\} = 3$$

et la décomposition bipartie fournie à la figure 12 utilise donc le nombre minimum de couleurs nécessaires.

Nous pouvons facilement déduire du théorème 2.41 ce qu'il se passe dans le cas du graphe complet K_n . Le corollaire suivant affirme que si k est un naturel tel que $k \leq n - 2$, alors les arêtes du graphe complet K_n ne peuvent pas être partitionnées en k bicliques ou, de manière équivalente, que si K_n est obtenu comme une union disjointe sur les arêtes de k graphes bipartis complets, alors on a $k \geq n - 1$. Autrement dit, le nombre de couleurs dans toute décomposition bipartie de K_n vaut au moins $n - 1$.

Corollaire 2.42. *Pour tout naturel $n \geq 2$, on a $bp(K_n) = n - 1$.*

Démonstration. Pour le graphe complet K_n , on déduit de l'exemple 1.4 que $n^- = n - 1$ et que $n^+ = 1$. Il découle alors immédiatement du théorème 2.41 que $bp(K_n) \geq n - 1$. De plus, on peut trouver une partition des arêtes du graphe complet K_n en $n - 1$ bicliques en procédant récursivement. On sélectionne toutes les arêtes qui sont incidentes à un sommet puis on supprime ce sommet (et les arêtes qui lui sont incidentes) et on recommence. On obtient alors une partition des arêtes de K_n en les $n - 1$ bicliques $K_{1,n-1}, K_{1,n-2}, \dots, K_{1,1}$. On trouve alors bien l'égalité annoncée. \square

Remarquons que la partition des arêtes du graphe complet K_n en $n - 1$ bicliques donnée dans la preuve du corollaire 2.42 n'est pas unique. En effet, nous pouvons obtenir une autre partition des arêtes de K_n en $n - 1$ bicliques de la manière suivante. Considérons une biclique $K_{r,s}$ de K_n obtenue en partitionnant les n sommets en deux sous-ensembles de cardinal r et s respectivement, avec $r + s = n$. Si l'on retire de K_n les arêtes du sous-graphe $K_{r,s}$, alors on obtient les graphes complets K_r et K_s . En procédant de façon récursive, on peut alors trouver une partition de K_r en $r - 1$ bicliques et une partition de K_s en $s - 1$ bicliques. On a alors obtenu une partition de K_n en

$$1 + (r - 1) + (s - 1) = r + s - 1 = n - 1$$

bicliques. Il existe donc plusieurs décompositions biparties non isomorphes du graphe complet K_n qui utilisent $n - 1$ couleurs.

Exemple 2.43. La figure 13 représente deux décompositions biparties non isomorphes du graphe complet K_5 qui utilisent 4 couleurs.

Définition 2.44. Un sous-graphe d'un graphe fini non orienté est dit *multicolore* si toutes ses arêtes ont des couleurs différentes.

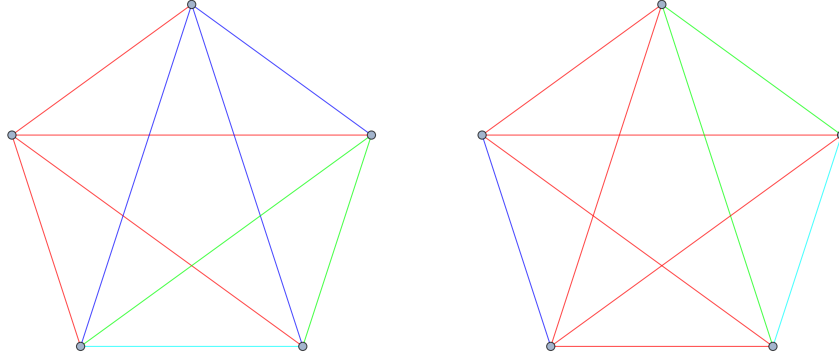


FIGURE 13 – Deux décompositions biparties non isomorphes du graphe complet K_5 .

Nous allons étendre le théorème de Graham–Pollak dans le cas d’un graphe non orienté quelconque. Nous verrons ensuite ce que l’on peut dire lorsque l’on considère un graphe complet.

Théorème 2.45. *Soit G un graphe non orienté d’ordre n . Pour toute partition des arêtes de G en bicliques, il existe une forêt dans G qui est multicolore et qui possède au moins $\max\{n^+, n^-\}$ arêtes.*

Démonstration. Soit E l’ensemble des arêtes de G et soit $m = |E|$. On considère le matroïde graphique $\mathbf{M}(G)$ défini sur E . Pour rappel, celui-ci est tel qu’un sous-ensemble F d’arêtes est indépendant si et seulement s’il ne contient pas de cycle ou, autrement dit, si F est l’ensemble des arêtes d’une forêt (voir exemple 2.13 pour plus de détails). Le rang d’un sous-ensemble F d’arêtes est alors $n - c$, si c est le nombre de composantes connexes du sous-graphe couvrant de G dont l’ensemble d’arêtes est F (voir exemple 2.28 pour plus de détails).

Soit (B_1, \dots, B_r) une partition de E en bicliques. Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, notons E_j l’ensemble des arêtes du graphe biparti complet B_j . On souhaite appliquer le corollaire 2.36 de Rado–Hall à la famille (E_1, \dots, E_r) . Soit donc un sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, r\}$ et soit H le sous-graphe couvrant de G dont l’ensemble d’arêtes est $\bigcup_{k \in K} E_k$. Soient H_1, \dots, H_p les composantes connexes de H et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, choisissons un sommet v_i dans H_i . Soit G' le sous-graphe de G induit par l’ensemble de sommets $\{v_1, \dots, v_p\}$ et notons E' l’ensemble de ses arêtes. La matrice d’adjacence de G' est une sous-matrice principale de la matrice d’adjacence de G . Par le point 4 de la proposition 1.2, le graphe G' possède au moins $p - n + n^-$ valeurs propres strictement négatives et au moins $p - n + n^+$ valeurs propres strictement positives. En effet, nous savons que si μ_1, \dots, μ_p représentent les p valeurs propres du graphe G' , alors on a

$$\lambda_{n-p+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. On en déduit que si $i \in \{1, \dots, p\}$ est tel que $\lambda_i < 0$, alors on a $\mu_i < 0$. Or, on a

$$\lambda_i < 0 \text{ et } 1 \leq i \leq p \text{ si et seulement si } 1 \leq n - n^- + 1 \leq i \leq p$$

et il y a $p - (n - n^- + 1) + 1 = p - n + n^-$ indices i qui vérifient

$$n - n^- + 1 \leq i \leq p.$$

De même, on sait que si $i \in \{1, \dots, p\}$ est tel que $\lambda_{n-p+i} > 0$, alors on a $\mu_i > 0$. Or, on a

$$\lambda_{n-p+i} > 0 \text{ et } 1 \leq i \leq p \text{ si et seulement si } 1 \leq i \leq n^+ - n + p \leq p$$

et il y a $p - n + n^+$ indices i qui vérifient

$$1 \leq i \leq n^+ - n + p.$$

Le théorème 2.41 de Graham–Pollak appliqué au graphe G' montre alors que

$$bp(G') \geq p - n + \max\{n^+, n^-\}.$$

De plus, $(E_j \cap E')_{j \in \{1, \dots, r\} \setminus K}$ est une partition de G' en bicliques. Ainsi, elle possède au moins $bp(G')$ éléments et on a donc

$$r - |K| \geq p - n + \max\{n^+, n^-\}.$$

De manière équivalente, on trouve que

$$n - p \geq |K| - (r - \max\{n^+, n^-\}).$$

Ainsi, on obtient que

$$\rho \left(\bigcup_{k \in K} E_k \right) = n - p \geq |K| - (r - \max\{n^+, n^-\}).$$

Par le corollaire 2.36, on sait donc qu'il existe une sous-famille de (E_1, \dots, E_r) composée de $\max\{n^+, n^-\}$ ensembles qui possède un SRD indépendant pour $\mathbf{M}(G)$. Autrement dit, il existe un ensemble composé de $\max\{n^+, n^-\}$ arêtes de G qui sont indépendantes, ce qui correspond à une forêt dans G contenant $\max\{n^+, n^-\}$ arêtes. De plus, puisque chacune de ces arêtes appartient à une biclique différente, elles ont toutes des couleurs différentes et la forêt obtenue est donc bien multicolore. \square

Poursuivons l'exemple 2.39. Dans la décomposition bipartite du graphe G de la figure 12, on peut trouver une forêt qui est multicolore et qui possède au moins $\max\{2, 3\} = 3$ arêtes. Une telle forêt est donnée à la figure 14.

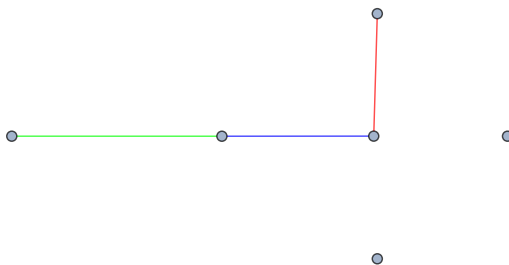


FIGURE 14 – Forêt multicolore associée à l'exemple 2.39.

La remarque suivante provient de l'article [2] d'Alon, Brualdi et Shader.

Remarque 2.46. Considérons les notations de la démonstration du théorème 2.45. Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, notons G_j le graphe biparti complet dont l'ensemble d'arêtes est E_j et considérons T_j l'ensemble des arêtes d'un sous-arbre couvrant de G_j . Puisque pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, r\}$, on a

$$\rho \left(\bigcup_{k \in K} E_k \right) = \rho \left(\bigcup_{k \in K} T_k \right),$$

il existe en réalité une forêt multicolore dans G qui possède au moins $\max\{n^+, n^-\}$ arêtes, chacune d'entre elles appartenant à l'un des ensembles T_1, \dots, T_r .

Le résultat suivant⁶ peut être démontré de façon immédiate grâce au théorème 2.45.

Corollaire 2.47. *Pour toute partition des arêtes du graphe complet K_n en bicliques, il existe un sous-arbre couvrant multicolore de K_n . Cet arbre possède évidemment $n - 1$ arêtes.*

Démonstration. Pour le graphe complet K_n , on déduit de l'exemple 1.4 que $n^- = n - 1$ et que $n^+ = 1$. Ainsi, par le théorème 2.45, il existe une forêt multicolore dans K_n qui possède au moins $n - 1$ arêtes. On en tire que cette forêt est un sous-arbre couvrant de K_n qui possède exactement $n - 1$ arêtes. \square

Poursuivons l'exemple 2.43. Pour chacune des deux décompositions biparties de K_5 de la figure 13, la figure 15 représente un sous-arbre couvrant multicolore de K_5 .

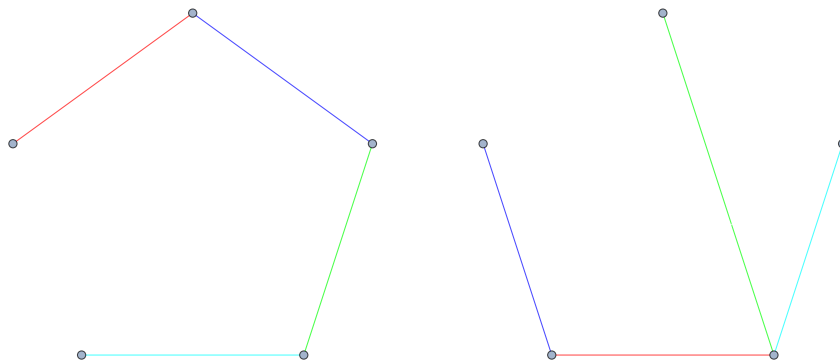


FIGURE 15 – Deux sous-arbres couvrants multicolores de K_5 associés à l'exemple 2.43.

6. Il semble que ce résultat ait été conjecturé par Dominique de Caen lors d'une communication privée avec Alon, Brualdi et Shader.

3 Théorème de Gale–Ryser

Dans le début de ce chapitre, nous allons travailler avec des matrices à coefficients dans l'ensemble $\{0, 1\}$. On les appelle des *matrices binaires*. Un exemple classique de matrices binaires est donné par les matrices de permutation qui possèdent exactement un élément égal à 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne. Nous allons étendre ce concept et étudier les ensembles de matrices binaires qui possèdent un nombre fixé de 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne. La principale question qui se pose alors est celle de l'existence de telles matrices et est l'objet du théorème de Gale–Ryser. Avant d'énoncer et de démontrer ce résultat, notamment grâce au théorème de Rado–Hall, nous donnons quelques formulations équivalentes de ces ensembles de matrices binaires. Dans la dernière section, nous étudions deux généralisations de ces ensembles de matrices binaires en considérant des matrices à coefficients naturels.

3.1 Ensembles $\mathcal{B}(L, C)$ de matrices et formulations équivalentes

Il existe 2^{mn} matrices binaires de dimension $m \times n$, allant de la matrice $O_{m,n}$ qui ne contient que des 0 à la matrice $J_{m,n}$ qui ne contient que des 1. Celles-ci permettent notamment de représenter une relation binaire R entre les ensembles finis X et Y , respectivement de cardinal m et n . En effet, si pour tout $x_i \in X$ et tout $y_j \in Y$, on pose

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, y_j) \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

alors A est une matrice binaire de dimension $m \times n$ qui représente la relation binaire R . On peut trouver d'autres bijections entre ces matrices binaires et certains objets fondamentaux des mathématiques.

Commençons par considérer un ensemble fini $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Une famille finie

$$\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$$

de sous-ensembles de X peut être vue comme une matrice binaire de dimension $m \times n$ de la façon suivante : on associe à la famille \mathcal{F} la matrice binaire A de dimension $m \times n$ définie pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$ par

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \in F_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'application φ qui associe à \mathcal{F} la matrice A est bien une bijection.

On peut également mettre les matrices binaires en correspondance avec les graphes bipartis. En effet, considérons un graphe biparti G dont les sommets sont partitionnés en les deux sous-ensembles $\{v_1, \dots, v_m\}$ et $\{w_1, \dots, w_n\}$. Le graphe G peut être vu comme une matrice binaire de dimension $m \times n$ de la façon suivante : on associe au graphe G la matrice binaire A de dimension $m \times n$ définie pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$ par

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si les sommets } v_i \text{ et } w_j \text{ sont reliés par une arête de } G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'application ψ qui associe à G la matrice A est bien une bijection.

Exemple 3.1. Considérons la matrice binaire A de dimension 3×5 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle représente la relation binaire R définie entre les ensembles finis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ par

$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}.$$

La famille de sous-ensembles de $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ associée à la matrice A est donnée par

$$\mathcal{F} = \varphi^{-1}(A) = (\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_3, x_4\}).$$

Le graphe biparti associé à la matrice A est donné par $G = \psi^{-1}(A)$ et est représenté à la figure 16.

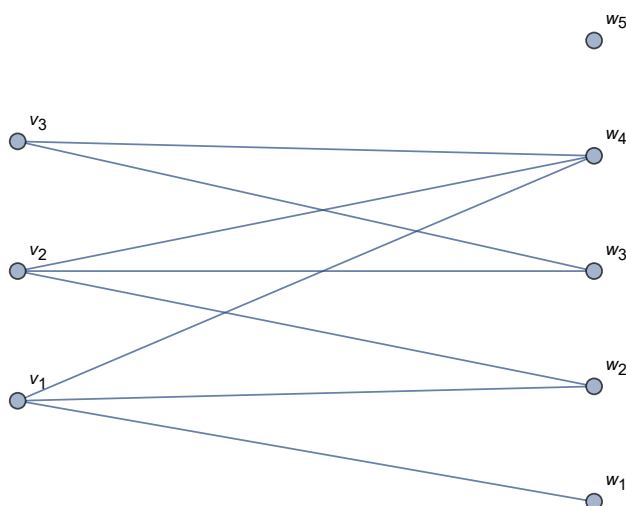


FIGURE 16 – Graphe biparti associé à la matrice A de l'exemple 3.1.

L'ensemble des matrices binaires de dimension $m \times n$ étant "très grand", nous allons nous focaliser sur certains de ses sous-ensembles. Nous allons en particulier considérer les matrices pour lesquelles chaque ligne et chaque colonne contient un nombre fixé d'éléments égaux à 1. Soient donc $L = (l_1, \dots, l_m)$ et $C = (c_1, \dots, c_n)$ deux vecteurs de naturels tels que

$$l_1 + \dots + l_m = c_1 + \dots + c_n. \quad (17)$$

On note $\mathcal{B}(L, C)$ l'ensemble des matrices binaires de dimension $m \times n$ qui possèdent l_i éléments égaux à 1 sur la i^{e} ligne, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, et c_j éléments égaux à 1 sur la j^{e} colonne, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit A une matrice binaire de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$.

Le vecteur L contient la somme des éléments sur chaque ligne de A et est donc appelé le *vecteur de somme par ligne* de A . Il est obtenu en multipliant la matrice A par le vecteur $(1, \dots, 1)$ de dimension $n \times 1$. Le vecteur C contient la somme des éléments sur chaque colonne de A et est donc appelé le *vecteur de somme par colonne* de A . Il est obtenu en multipliant le vecteur $(1, \dots, 1)$ de dimension $1 \times m$ par la matrice A . On peut établir les mêmes correspondances que précédemment.

Considérons un ensemble fini $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Les familles $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_m)$ de sous-ensembles de X telles que $|F_i| = l_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, et x_j appartient à c_j des sous-ensembles F_1, \dots, F_m , pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, sont en bijection avec les matrices de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$.

Les graphes bipartis dont les sommets sont partitionnés en les deux sous-ensembles $\{v_1, \dots, v_m\}$ et $\{w_1, \dots, w_n\}$ et qui sont tels que le degré du sommet v_i est l_i , pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, et le degré du sommet w_j est c_j , pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, sont en bijection avec les matrices de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$.

Exemple 3.2. Considérons les vecteurs de naturels $L = (2, 0, 1, 1)$ et $C = (2, 1, 1)$. L'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ contient les matrices binaires de dimension 4×3 suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Les familles $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ de sous-ensembles de X telles que $|F_i| = l_i$, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, et x_j appartient à c_j des sous-ensembles F_1, F_2, F_3, F_4 , pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, sont données par

$$(\{x_1, x_2\}, \{\}, \{x_1\}, \{x_3\}), (\{x_1, x_2\}, \{\}, \{x_3\}, \{x_1\}), (\{x_1, x_3\}, \{\}, \{x_1\}, \{x_2\}), \\ (\{x_1, x_3\}, \{\}, \{x_2\}, \{x_1\}) \text{ et } (\{x_2, x_3\}, \{\}, \{x_1\}, \{x_1\}).$$

Les graphes bipartis dont les sommets sont partitionnés en les deux sous-ensembles $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ et $\{w_1, w_2, w_3\}$ et qui sont tels que le degré du sommet v_i est l_i , pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, et le degré du sommet w_j est c_j , pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, sont représentés à la figure 17.

L'exemple suivant nous permet de montrer que certains ensembles $\mathcal{B}(L, C)$ sont vides.

Exemple 3.3. Considérons les vecteurs de naturels $L = (4, 3, 1, 1, 1)$ et $C = (4, 4, 1, 1)$. On a

$$4 + 3 + 1 + 1 + 1 = 10 = 4 + 4 + 1 + 1.$$

Supposons que A soit un élément de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$. Alors dans les deux premières colonnes de A , on doit avoir $4 + 4 = 8$ éléments égaux à 1. Or, les 5 lignes de A peuvent seulement contribuer pour $2+2+1+1+1 = 7$ éléments égaux à 1 dans les deux premières colonnes de A . Ainsi, il n'existe aucune matrice binaire de dimension 5×4 possédant les nombres de 1 donnés sur chaque ligne et chaque colonne. On dit alors que $\mathcal{B}(L, C) = \emptyset$.

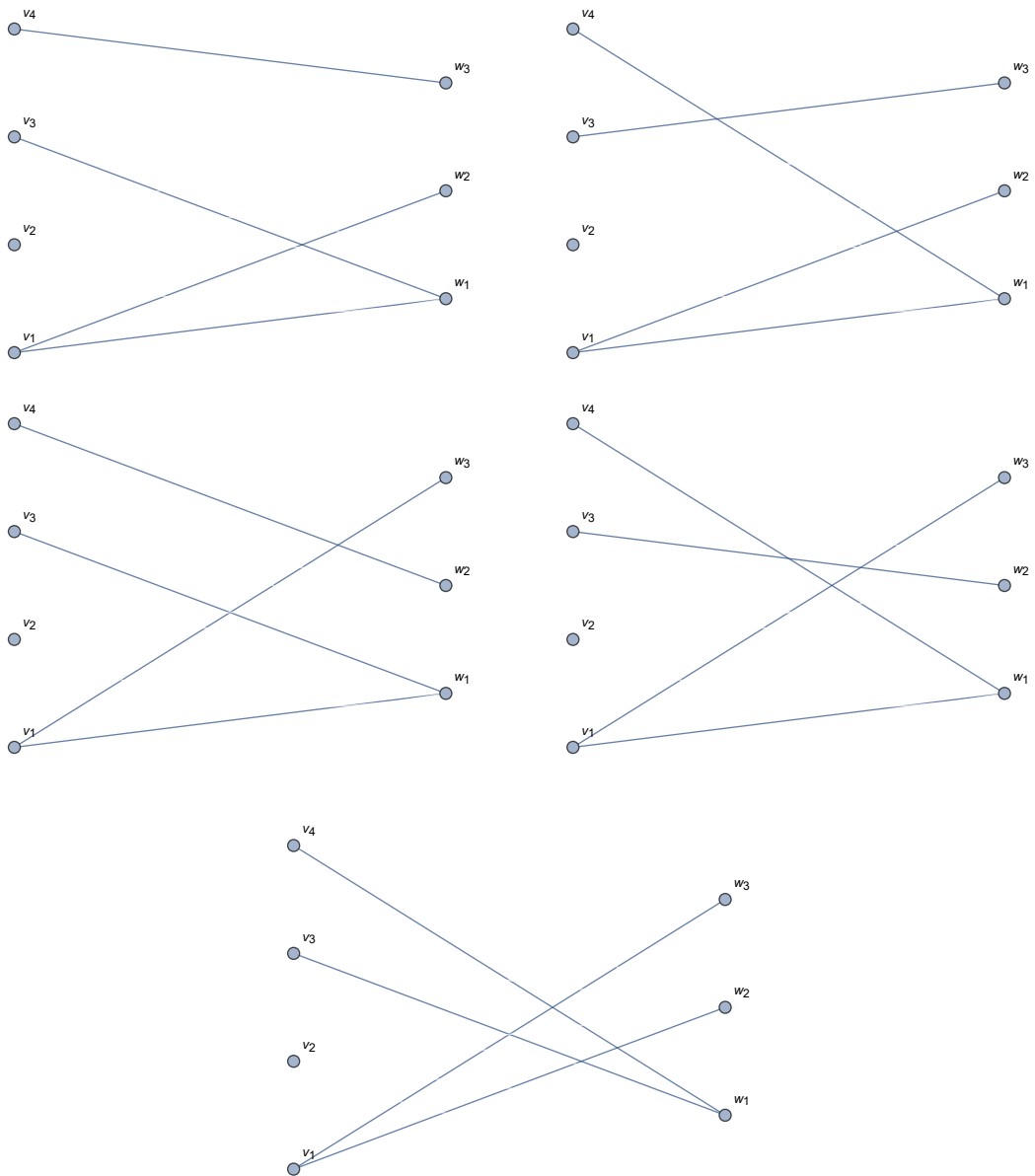


FIGURE 17 – Graphes bipartis en bijection avec les matrices de l'ensemble $\mathcal{B}((2, 0, 1, 1), (2, 1, 1))$ de l'exemple 3.2.

Il est clair que l'égalité (17) est une condition nécessaire pour que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ soit non vide. En effet, si A est une matrice de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$, alors la somme des éléments du vecteur L et la somme des éléments du vecteur C représentent le nombre total d'éléments égaux à 1 dans la matrice A . L'exemple 3.3 nous montre cependant que cette condition n'est pas suffisante. La section suivante se donne pour objectif de fournir une condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs L et C pour l'existence d'une matrice dans l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$.

3.2 Théorème de Gale–Ryser

L'énoncé et la démonstration du théorème de Gale–Ryser, qui fournit une condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs L et C pour que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ soit non vide, seront l'objet du théorème 3.9. Avant d'y arriver, nous avons besoin d'introduire deux nouvelles notions : le vecteur conjugué d'un vecteur donné et une relation de majoration entre deux vecteurs réels de même dimension.

Soient m et n deux naturels non nuls fixés pour cette section. Soient $L = (l_1, \dots, l_m)$ et $C = (c_1, \dots, c_n)$ deux vecteurs de naturels tels que

$$l_1 + \dots + l_m = c_1 + \dots + c_n.$$

Si les vecteurs L et C ne sont pas décroissants, alors il suffit de permuter les lignes et les colonnes des matrices de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ pour se ramener à un vecteur de somme par ligne et un vecteur de somme par colonne décroissants. Sans perte de généralité, nous allons donc supposer que L et C sont des vecteurs décroissants (c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, on a $l_i \geq l_{i+1}$ et $c_j \geq c_{j+1}$).

Pour que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ soit non vide, il faut que $l_1 \leq n$. En effet, si $l_1 > n$, alors on doit avoir strictement plus de 1 sur la première ligne de la matrice que son nombre de colonnes, ce qui est impossible. Supposons donc que $l_1 \leq n$. Cela implique, vu la décroissance du vecteur L , que $l_i \leq n$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, posons

$$l_j^* = |\{i \in \{1, \dots, m\} : l_i \geq j\}|.$$

On obtient un vecteur de naturels $L^* = (l_1^*, \dots, l_n^*)$, appelé *vecteur conjugué* de L . Remarquons que le vecteur L^* est toujours décroissant, même si on ne suppose pas que le vecteur L l'est. De plus, on a

$$l_1^* + \dots + l_n^* = l_1 + \dots + l_m.$$

En effet, si on pose

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } l_i \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, alors on a, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$l_j^* = \sum_{i=1}^m a_{i,j}$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$l_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

car $l_i \leq n$. On en tire que

$$\sum_{j=1}^n l_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^m l_i.$$

Définissons la matrice binaire A_L de dimension $m \times n$ en posant

$$(A_L)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } l_i \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$. La matrice A_L appartient à l'ensemble $\mathcal{B}(L, L^*)$. En effet, il est clair que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, comme $l_i \leq n$, la i^{e} ligne de la matrice A_L possède l_i éléments égaux à 1. En particulier, remarquons que sur chaque ligne, les éléments égaux à 1 sont consécutifs et commencent sur la première colonne (ils sont donc alignés à gauche). De plus, étant donné la définition du vecteur conjugué de L , on trouve que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la j^{e} colonne de la matrice A_L possède l_j^* éléments égaux à 1.

Exemple 3.4. Reprenons l'exemple 3.2, dans lequel $m = 4$ et $n = 3$, et ordonnons le vecteur L dans l'ordre décroissant. On a alors

$$L = (2, 1, 1, 0).$$

On a bien $l_1 = 2 \leq 3 = n$. Déterminons les éléments du vecteur conjugué de L :

- $l_1^* = |\{i \in \{1, 2, 3, 4\} : l_i \geq 1\}| = 3$;
- $l_2^* = |\{i \in \{1, 2, 3, 4\} : l_i \geq 2\}| = 1$;
- $l_3^* = |\{i \in \{1, 2, 3, 4\} : l_i \geq 3\}| = 0$.

On en tire que $L^* = (3, 1, 0)$, qui est bien un vecteur décroissant tel que

$$3 + 1 + 0 = 4 = 2 + 1 + 1 + 0.$$

Enfin, la matrice

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à l'ensemble $\mathcal{B}(L, L^*)$.

Notation 3.5. Si V est un vecteur réel de dimension $n \times 1$ (ou de dimension $1 \times n$), alors on note $V_{[j]}$ la j^{e} plus grande composante de V , pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. En cas d'égalité entre plusieurs composantes du vecteur V , on les classe dans l'ordre croissant de leurs indices.

Définition 3.6. Soient U et V deux vecteurs réels de dimension $n \times 1$ (ou de dimension $1 \times n$). On dit que U est *majoré* par V , ce que l'on note $U \preceq V$, si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k U_{[j]} \leq \sum_{j=1}^k V_{[j]},$$

avec l'égalité si $k = n$.

Remarque 3.7. Soient U et V deux vecteurs réels de dimension $n \times 1$ (ou de dimension $1 \times n$). Si U et V sont décroissants, alors on trouve que $U \preceq V$ si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k U_j \leq \sum_{j=1}^k V_j,$$

avec l'égalité si $k = n$.

Si U et V sont croissants, alors on trouve que $U \preceq V$ si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=n-k+1}^n U_j \leq \sum_{j=n-k+1}^n V_j,$$

avec l'égalité si $k = n$. De façon équivalente, cela revient à dire que pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=l}^n U_j \leq \sum_{j=l}^n V_j,$$

avec l'égalité si $l = 1$. Enfin, comme

$$\sum_{j=1}^l U_j = \sum_{j=1}^n U_j - \sum_{j=l+1}^n U_j \text{ et } \sum_{j=1}^l V_j = \sum_{j=1}^n V_j - \sum_{j=l+1}^n V_j,$$

on trouve que $U \preceq V$ si et seulement si pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^l U_j \geq \sum_{j=1}^l V_j,$$

avec l'égalité si $l = n$.

Remarque 3.8. On montre facilement que la relation \preceq de la définition 3.6 est réflexive et transitive. En effet, pour tout vecteur réel V de dimension $n \times 1$ (ou de dimension $1 \times n$), il est clair que $V \preceq V$ car pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k V_{[j]} = \sum_{j=1}^k V_{[j]}.$$

De plus, soient U, V et W trois vecteurs réels de dimension $n \times 1$ (ou de dimension $1 \times n$) tels que $U \preceq V$ et $V \preceq W$. On en tire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k U_{[j]} \leq \sum_{j=1}^k V_{[j]} \leq \sum_{j=1}^k W_{[j]},$$

avec les égalités si $k = n$. Ainsi, on trouve que $U \preceq W$.

Par contre, la relation \preceq n'est pas antisymétrique. Considérons, par exemple, les vecteurs $U = (1, 2, 3)$ et $V = (3, 2, 1)$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k U_{[j]} = \sum_{j=1}^k V_{[j]}.$$

Ainsi, il est clair que $U \preceq V$ et que $V \preceq U$. Cependant, les vecteurs U et V ne sont pas égaux.

De plus, la relation \preceq n'est pas symétrique. Considérons, par exemple, les vecteurs $U = (1, 2, 3)$ et $V = (4, 2, 0)$. Il est clair que $U \preceq V$ mais on n'a pas $V \preceq U$.

Le théorème suivant fournit une condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs L et C pour l'existence d'une matrice dans l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$. Il s'agit du théorème de Gale–Ryser, du nom des deux mathématiciens Gale et Ryser qui l'ont publié de manière indépendante dans les années 1950 dans les articles [7] et [22]. Nous allons le démontrer en utilisant le théorème 2.35 de Rado–Hall du chapitre précédent.

Théorème 3.9. *Soient $L = (l_1, \dots, l_m)$ et $C = (c_1, \dots, c_n)$ deux vecteurs décroissants de naturels tels que $l_1 + \dots + l_m = c_1 + \dots + c_n$. L'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ est non vide si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a*

$$c_1 + \dots + c_k \leq l_1^* + \dots + l_k^*, \quad (18)$$

avec l'égalité si $k = n$.

Puisque le vecteur C est décroissant par hypothèse et que le vecteur L^* est décroissant par construction, les inégalités (18) sont équivalentes à la relation $C \preceq L^*$.

Démonstration. Considérons l'ensemble fini

$$X = \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Soit $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_m)$ la famille de sous-ensembles de X définie, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, par

$$E_i = \{(i, j) : 1 \leq j \leq n\}.$$

Remarquons que la famille \mathcal{E} est une partition de l'ensemble X . Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, soit $\mathbf{M}_i = (E_i, \mathcal{I}_i)$ le matroïde uniforme $\mathbf{U}_{l_i, |E_i|} = \mathbf{U}_{l_i, n}$ défini sur l'ensemble E_i (voir définition 2.2). Considérons ensuite le matroïde \mathbf{M} défini sur l'ensemble $X = \bigcup_{i=1}^m E_i$

comme la somme directe des matroïdes $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_m$ (voir définition 2.29 pour plus de détails). On déduit de l'exemple 2.31 qu'un sous-ensemble Y de X est indépendant pour \mathbf{M} si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$|Y \cap E_i| \leq l_i.$$

De plus, on sait que la fonction rang de \mathbf{M} est telle que le rang de tout sous-ensemble Y de X vaut

$$\rho(Y) = \sum_{i=1}^m \min\{|Y \cap E_i|, l_i\}.$$

Considérons la famille \mathcal{F} de sous-ensembles de X définie par

$$\mathcal{F} = \left(\underbrace{F_1, \dots, F_1}_{c_1}, \underbrace{F_2, \dots, F_2}_{c_2}, \dots, \underbrace{F_n, \dots, F_n}_{c_n} \right),$$

où le sous-ensemble

$$F_j = \{(i, j) : 1 \leq i \leq m\}$$

est répété c_j fois, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Il existe une bijection entre les matrices de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ et les SRD indépendants pour \mathbf{M} de la famille \mathcal{F} . En effet, d'une part, supposons que A est une matrice de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$. Alors la famille

$$Z = \{(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} : A_{i,j} = 1\}$$

est un SRD indépendant pour \mathbf{M} de la famille \mathcal{F} car Z contient $c_1 + \dots + c_n$ éléments distincts et pour chacun des c_{j_0} couples $(i, j_0) \in Z$, on a $(i, j_0) \in F_{j_0}$. De plus, Z vu comme un ensemble est un indépendant de \mathbf{M} car pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on trouve que

$$|Z \cap E_i| = l_i.$$

D'autre part, considérons la famille Z' qui est un SRD indépendant pour \mathbf{M} de la famille \mathcal{F} et voyons Z' comme un ensemble. Définissons la matrice binaire A de dimension $m \times n$ en posant, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in Z' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme Z' est un SRD de la famille \mathcal{F} , on sait que $|Z'| = c_1 + \dots + c_n$ et même que $|Z' \cap F_j| = c_j$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. De plus, puisque Z' est un indépendant de \mathbf{M} , on trouve que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$|Z' \cap E_i| \leq l_i.$$

Il découle alors des égalités

$$|Z'| = \sum_{i=1}^m |Z' \cap E_i| = c_1 + \dots + c_n = l_1 + \dots + l_m$$

que $|Z' \cap E_i| = l_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Finalement, la matrice A ainsi définie est bien un élément de l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$. Remarquons qu'on ne s'intéresse pas au fait de savoir quelle copie de F_j contient quel élément du SRD indépendant de la famille \mathcal{F} . Ainsi, l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ est non vide si et seulement si la famille \mathcal{F} possède un SRD indépendant pour \mathbf{M} , ce qui est équivalent, au vu du théorème 2.35 de Rado–Hall, à avoir, pour tout n -uplet $(p_1, \dots, p_n) \in \{0, \dots, c_1\} \times \dots \times \{0, \dots, c_n\}$,

$$\rho \left(\bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^{p_j} F_j \right) \geq \sum_{j=1}^n p_j. \quad (19)$$

La valeur du membre de gauche dépend seulement des p_j qui sont non nuls et le membre de droite est le plus grand lorsque $p_j = c_j$. Alors les inégalités (19) sont équivalentes au fait d'avoir, pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$,

$$\rho \left(\bigcup_{j \in K} F_j \right) \geq \sum_{j \in K} c_j. \quad (20)$$

De plus, on trouve que $\bigcup_{j \in K} F_j$ est l'ensemble

$$\{(i, j) : 1 \leq i \leq m \text{ et } j \in K\},$$

c'est-à-dire toutes les positions, dans une matrice de dimension $m \times n$, dont l'indice de la colonne appartient à l'ensemble K . Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\left(\bigcup_{j \in K} F_j \right) \cap E_i = \{(i, j) : j \in K\}.$$

On en tire que

$$\rho \left(\bigcup_{j \in K} F_j \right) = \sum_{i=1}^m \min\{|K|, l_i\}$$

dépend seulement de $|K|$ et non de K lui-même. La décroissance du vecteur $C = (c_1, \dots, c_n)$ implique que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\max_{\{K \subseteq \{1, \dots, n\} : |K|=k\}} \sum_{j \in K} c_j = \sum_{j=1}^k c_j.$$

Finalement, on obtient que les inégalités (20) sont équivalentes au fait d'avoir, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{i=1}^m \min\{k, l_i\} \geq \sum_{j=1}^k c_j.$$

Or, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^m \min\{k, l_i\} = \sum_{j=1}^k l_j^*. \quad (21)$$

En effet, soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Posons $t_k = |\{i \in \{1, \dots, m\} : l_i \leq k\}|$. Vu la décroissance du vecteur L , nous savons que les t_k derniers éléments de L sont inférieurs ou égaux à k . On en tire que

$$\sum_{j=1}^k l_j^* = (m - t_k)k + \sum_{i=m-t_k+1}^m l_i = \sum_{i=1}^m \min\{k, l_i\}$$

car nous savons que $m - t_k$ éléments l_i sont strictement plus grands que k (et vérifient donc $\min\{k, l_i\} = k$). Lorsqu'on calcule $l_1^* + \dots + l_k^*$, ces $m - t_k$ éléments comptent donc pour $(m - t_k)k$. Pour ce qui est des t_k éléments l_i inférieurs ou égaux à k (qui vérifient donc $\min\{k, l_i\} = l_i$), chacun compte pour sa propre valeur dans le calcul de $l_1^* + \dots + l_k^*$.

On obtient donc finalement que la famille \mathcal{F} possède un SRD indépendant pour \mathbf{M} si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k l_j^* \geq \sum_{j=1}^k c_j.$$

Vu ce qui précède, on en déduit que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ est non vide si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k l_j^* \geq \sum_{j=1}^k c_j.$$

□

Reprenons les exemples 3.2 et 3.3. Dans le premier, en ordonnant les vecteurs L et C dans l'ordre décroissant, nous avons $L = (2, 1, 1, 0)$ et $C = (2, 1, 1)$. Nous avons vu que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ était non vide. Ceci est confirmé grâce au théorème de Gale–Ryser car $L^* = (3, 1, 0)$ et on a donc bien

- $c_1 = 2 \leq 3 = l_1^*$;
- $c_1 + c_2 = 2 + 1 = 3 \leq 4 = 3 + 1 = l_1^* + l_2^*$;
- $c_1 + c_2 + c_3 = 2 + 1 + 1 = 4 = 3 + 1 + 0 = l_1^* + l_2^* + l_3^*$.

Dans le deuxième, les vecteurs $L = (4, 3, 1, 1, 1)$ et $C = (4, 4, 1, 1)$ sont déjà ordonnés dans l'ordre décroissant. On peut calculer que $L^* = (5, 2, 2, 1)$ et on a alors que

$$c_1 + c_2 = 4 + 4 = 8 > 7 = 5 + 2 = l_1^* + l_2^*.$$

Le théorème de Gale–Ryser affirme alors que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ est vide, ce qui confirme ce que nous avons trouvé.

3.3 D'autres ensembles de matrices

Dans cette section, nous n'allons plus considérer des matrices binaires mais bien des matrices à coefficients naturels. Soient m et n deux naturels non nuls. Soient $L = (l_1, \dots, l_m)$ et $C = (c_1, \dots, c_n)$ deux vecteurs de naturels tels que

$$l_1 + \dots + l_m = c_1 + \dots + c_n. \tag{22}$$

Notons $\mathcal{N}(L, C)$ l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ à coefficients naturels dont le vecteur de somme par ligne est L et le vecteur de somme par colonne est C . Remarquons que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{N}(L, C)$. Comme précédemment, il est clair que l'égalité (22) est une condition nécessaire pour l'existence d'une matrice dans l'ensemble $\mathcal{N}(L, C)$ car chacun des deux membres de l'égalité correspond à la somme des éléments d'une matrice de l'ensemble $\mathcal{N}(L, C)$. Montrons que l'égalité (22) est également une condition suffisante pour que l'ensemble $\mathcal{N}(L, C)$ soit non vide. Supposons donc que cette égalité (22) est satisfaite .

Si $m = 1$, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

est l'unique matrice qui appartient à l'ensemble $\mathcal{N}(L, C)$.

Si $n = 1$, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$$

est l'unique matrice qui appartient à l'ensemble $\mathcal{N}(L, C)$.

Supposons que $m \geq 2$ et que $n \geq 2$. Considérons les deux cas suivants :

1. Si $\min\{l_1, c_1\} = l_1$, alors on utilise la matrice

$$\begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & A' \end{pmatrix}$$

et on procède par récurrence sur la matrice A' de dimension $(m - 1) \times n$, avec $L' = (l_2, \dots, l_m)$ et $C' = (c_1 - l_1, c_2, \dots, c_n)$.

2. Si $\min\{l_1, c_1\} = c_1$, alors on utilise la matrice

$$\begin{pmatrix} c_1 & \left| \right. & \\ 0 & & \\ 0 & & A' \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

et on procède par récurrence sur la matrice A' de dimension $m \times (n - 1)$, avec $L' = (l_1 - c_1, l_2, \dots, l_m)$ et $C' = (c_2, \dots, c_n)$.

Exemple 3.10. Considérons les vecteurs de naturels $L = (2, 0, 1, 1)$ et $C = (2, 1, 1)$. L'ensemble $\mathcal{N}(L, C)$ contient les matrices à coefficients naturels de dimension 4×3 suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant définir un troisième ensemble de matrices, qui généralise les ensembles $\mathcal{B}(L, C)$ et $\mathcal{N}(L, C)$, en suivant les considérations de Brualdi et Dahl dans leur article [5]. Il s'agit d'une généralisation dans le sens où, pour des cas particuliers bien choisis, le nouvel ensemble de matrices défini dans les lignes qui suivent coïncide avec les ensembles $\mathcal{B}(L, C)$ et $\mathcal{N}(L, C)$. Soient m et n deux naturels non nuls et soient b_1, \dots, b_m des vecteurs décroissants de naturels de dimension $1 \times n$. Considérons la matrice B de dimension $m \times n$ à coefficients naturels définie par

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Quitte à devoir effectuer des permutations, on peut supposer sans perte de généralité que les vecteurs b_1, \dots, b_m ont été ordonnés de sorte que le vecteur de somme par ligne L de la matrice B soit décroissant. Soit $C = (c_1, \dots, c_n)$ un vecteur décroissant de naturels. Notons $\mathcal{N}(B|C)$ l'ensemble des matrices à coefficients naturels de dimension $m \times n$ dont le vecteur de somme par colonne est C et dont les vecteurs lignes a_1, \dots, a_m sont tels que

$$a_i \preceq b_i,$$

pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, où \preceq est la relation introduite à la définition 3.6. Dans la suite de cette section, nous nous autorisons à noter, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ pour désigner la j^{e} composante des vecteurs a_i et b_i respectivement.

Exemple 3.11. Considérons les naturels $m = 3$ et $n = 3$. Posons $b_1 = (3, 3, 0)$, $b_2 = (2, 1, 1)$ et $b_3 = (2, 2, 0)$. Alors on a

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $C = (6, 4, 4)$. Alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

appartient à l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$. En effet, le vecteur de somme par colonne de A est

$$(3 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 2 + 1 + 1) = (6, 4, 4) = C$$

et on a

- $(3, 1, 2) \preceq (3, 3, 0)$ car $3 \leq 3$, $3 + 2 = 5 \leq 6 = 3 + 3$ et $3 + 2 + 1 = 6 = 3 + 3 + 0$;
- $(2, 1, 1) \preceq (2, 1, 1)$ car la relation \preceq est réflexive (voir remarque 3.8) ;
- $(1, 2, 1) \preceq (2, 2, 0)$ car $2 \leq 2$, $2 + 1 = 3 \leq 4 = 2 + 2$ et $2 + 1 + 1 = 4 = 2 + 2 + 0$.

Soit $L = (l_1, \dots, l_m)$ un vecteur décroissant de naturels. Considérons les deux cas particuliers suivants :

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, posons

$$b_i = (l_i, 0, \dots, 0).$$

On a $\mathcal{N}(B|C) = \mathcal{N}(L, C)$, pour tout vecteur décroissant de naturels $C = (c_1, \dots, c_n)$ qui vérifie l'égalité (22).

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{N}^{m \times n}$. Notons a_1, \dots, a_m les vecteurs lignes de la matrice A et D son vecteur de somme par colonne. Alors on sait que $A \in \mathcal{N}(B|C)$ si et seulement si $D = C$ et $a_i \preceq b_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Cela revient à demander que

$$D = \left(\sum_{i=1}^m a_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_{i,n} \right) = C$$

et que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = l_i \text{ et } \sum_{j=1}^k a_{i,[j]} \leq l_i.$$

Or, puisque A est une matrice positive, ceci est équivalent au fait d'avoir, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = l_i$$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} = c_j,$$

ce qui revient au final à dire que $A \in \mathcal{N}(L, C)$. □

2. Supposons que $l_1 \leq n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, posons

$$b_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{l_i}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-l_i}),$$

où b_i contient l_i éléments égaux à 1 et $n - l_i$ éléments nuls. On a $\mathcal{N}(B|C) = \mathcal{B}(L, C)$, pour tout vecteur décroissant de naturels $C = (c_1, \dots, c_n)$ qui vérifie les inégalités (18) de Gale-Ryser.

Démonstration. Il est clair que toute matrice de l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ est binaire. Soit donc $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$. Notons a_1, \dots, a_m les vecteurs lignes de la matrice A et D son vecteur de somme par colonne. Alors on sait que $A \in \mathcal{N}(B|C)$ si et seulement si $D = C$ et $a_i \preceq b_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Cela revient à demander que

$$D = \left(\sum_{i=1}^m a_{i,1}, \dots, \sum_{i=1}^m a_{i,n} \right) = C$$

et que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = l_i \text{ et } \sum_{j=1}^k a_{i,[j]} \leq \min\{k, l_i\}.$$

Or, puisque A est une matrice binaire, ceci est équivalent au fait d'avoir, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = l_i$$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} = c_j,$$

ce qui revient au final à dire que $A \in \mathcal{B}(L, C)$. □

Nous voulons déterminer si l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ est non vide. De plus, si tel est le cas, nous voulons construire une matrice de cet ensemble. Commençons par introduire une nouvelle notion.

Définition 3.12. Soit $V = (v_1, \dots, v_n)$ un vecteur d'entiers et soient deux naturels $j, k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $v_j > v_k$. Un *transfert* de j vers k sur le vecteur V remplace le vecteur V par le vecteur d'entiers W défini par

$$W = \begin{cases} (v_1, \dots, v_{j-1}, v_j - 1, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_k + 1, v_{k+1}, \dots, v_n) & \text{si } j < k \\ (v_1, \dots, v_{k-1}, v_k + 1, v_{k+1}, \dots, v_{j-1}, v_j - 1, v_{j+1}, \dots, v_n) & \text{si } k < j \end{cases}.$$

Si W est un vecteur d'entiers obtenu à partir du vecteur d'entiers V grâce à un transfert de j vers k , alors il est clair qu'on a

$$W \preceq V.$$

En effet, si $W = (w_1, \dots, w_n)$ et $V = (v_1, \dots, v_n)$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n w_i = \left(\sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\}} v_i \right) + v_j - 1 + v_k + 1 = \sum_{i=1}^n v_i$$

et pour tout $l \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$\sum_{i=1}^l w_{[i]} \leq \sum_{i=1}^l v_{[i]}.$$

Afin de caractériser l'existence d'une matrice dans l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$, nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.13. *Soit n un naturel non nul et soient deux vecteurs décroissants d'entiers $U = (u_1, \dots, u_n)$ et $V = (v_1, \dots, v_n)$. On a $U \preceq V$ si et seulement si U peut être obtenu à partir de V via une suite finie de transferts.*

Démonstration. Supposons que U peut être obtenu à partir de V via une suite finie de transferts. Notons U_1, \dots, U_p les vecteurs intermédiaires. Vu ce qui précède, on sait que $U \preceq U_1, U_1 \preceq U_2, \dots, U_{p-1} \preceq U_p$ et $U_p \preceq V$. On en déduit alors par transitivité de la relation \preceq que $U \preceq V$. Réciproquement, supposons que $U \preceq V$. Puisque U et V sont des vecteurs décroissants, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, nous avons

$$\sum_{j=1}^k u_j \leq \sum_{j=1}^k v_j,$$

avec l'égalité si $k = n$. L'algorithme suivant montre comment on peut obtenir le vecteur U à partir du vecteur V grâce à une suite finie de transferts :

$i = 1$

$j = 2$

Tant que $i \leq n$

 Si $v_i - u_i > 0$

 Si $v_j - u_j < 0$

$v_i = v_i - 1$ et $v_j = v_j + 1$ (transfert de i vers j)

 Sinon

$j = j + 1$

 Sinon

$i = i + 1$

$j = i + 1$

□

Lemme 3.14. *Soit A une matrice de l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ non vide et soit D un vecteur de naturels obtenu à partir du vecteur C grâce à un transfert. Alors il existe une matrice $A' \in \mathcal{N}(B|D)$ qui est obtenue en appliquant un transfert sur l'une des lignes de la matrice A .*

Démonstration. Supposons que le vecteur D est obtenu à partir du vecteur C grâce à un transfert de j vers k , c'est-à-dire qu'on a $c_j > c_k$. Puisqu'on a

$$\sum_{i=1}^m A_{i,j} = c_j > c_k = \sum_{i=1}^m A_{i,k},$$

on sait qu'il existe un naturel $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $A_{i_0, j} > A_{i_0, k}$. Un transfert de j vers k sur le vecteur ligne a_{i_0} de la matrice A résulte donc en un vecteur a'_{i_0} tel que $a'_{i_0} \preceq a_{i_0}$ et on obtient donc, en remplaçant a_{i_0} par a'_{i_0} dans A , une matrice A' de l'ensemble $\mathcal{N}(B|D)$. En effet, notons a'_1, \dots, a'_m les vecteurs lignes de la matrice A' . Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, on a

$$a'_i = a_i \preceq b_i.$$

En outre, on a $a'_{i_0} \preceq b_{i_0}$ car $a_{i_0} \preceq b_{i_0}$ et la relation \preceq est transitive. De plus, comme C est le vecteur de somme par colonne de la matrice A et comme la matrice A' est obtenue à partir de A en effectuant, sur l'une des lignes, un transfert dont les indices correspondent au transfert qui lie D à C , on obtient bien que D est le vecteur de somme par colonne de la matrice A' . \square

Le théorème suivant caractérise l'existence d'une matrice dans l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ et, si celui-ci est non vide, il fournit un algorithme de construction pour obtenir une matrice de l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$, à partir de la matrice B .

Théorème 3.15. *L'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ est non vide si et seulement si on a*

$$C \preceq \sum_{i=1}^m b_i.$$

Démonstration. Notons D le vecteur décroissant de naturels de dimension $1 \times n$ défini par

$$D = \sum_{i=1}^m b_i.$$

Si l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ est non vide, alors on a

$$C \preceq D.$$

En effet, soit A une matrice de l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$. Notons a_1, \dots, a_m les vecteurs lignes de la matrice A . Alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^k c_j = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m a_{i,[j]} \leq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m b_{i,j} = \sum_{j=1}^k d_j,$$

avec l'égalité si $k = n$. Vu la décroissance des vecteurs C et D , on déduit de la remarque 3.7 que $C \preceq D$. Réciproquement, supposons que $C \preceq D$. L'ensemble $\mathcal{N}(B|D)$ est non vide puisqu'il contient la matrice B . Par le lemme 3.13, C peut être obtenu à partir de D via une suite finie de transferts. Par le lemme 3.14, il existe alors une matrice dans l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ obtenue à partir de la matrice B grâce à une suite finie de transferts sur les lignes de B . \square

Reprenons l'exemple 3.11 considéré plus haut et utilisons les notations du théorème 3.15. On trouve que $D = (7, 6, 1)$. Comme $C = (6, 4, 4) \preceq (7, 6, 1) = D$, le théorème 3.15 affirme que l'ensemble $\mathcal{N}(B|C)$ est non vide, ce qui confirme ce que nous avons déjà vu. En partant de la matrice $B \in \mathcal{N}(B|D)$, nous pouvons obtenir la matrice $A \in \mathcal{N}(B|C)$ de l'exemple 3.11 en suivant l'algorithme de la preuve du théorème 3.15 :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Cela est dû au fait que le vecteur C peut être obtenu à partir du vecteur D en appliquant la suite finie de transferts $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3$ et $2 \rightarrow 3$. La matrice A ainsi obtenue n'est pas unique. Par exemple, on peut également effectuer les transferts suivants, sur les lignes des matrices :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & \mathbf{1} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

4 Théorème de Landau

Un tournoi est un graphe complet pour lequel on donne une orientation à chaque arête. En supposant que les sommets d'un tournoi correspondent aux joueurs (numérotés de 1 à n) et qu'un arc relie le sommet i au sommet j si le joueur i a battu le joueur j , un tournoi modélise les rencontres d'une poule, c'est-à-dire que chaque joueur affronte une et une seule fois tous les autres participants, dans laquelle on exclut la possibilité d'avoir un match nul. Nous pouvons associer à un tournoi un vecteur de score qui comptabilise le nombre de victoires de chaque joueur. Dans ce chapitre, nous démontrons le théorème de Landau qui caractérise les vecteurs de naturels qui peuvent être le vecteur de score d'un tournoi tel que défini ci-dessus. Nous étudions ensuite un type particulier de tournois, à savoir les tournois transitifs, et nous terminons par l'exploration de quelques propriétés spectrales de la matrice associée à un tournoi, ce qui nous mène à caractériser les matrices binaires dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

4.1 Tournois et théorème de Landau

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème de Landau qui caractérise l'existence d'un tournoi dont le vecteur de score est le vecteur croissant de naturels donné, nous commençons par introduire les différentes notions dont nous avons besoin.

Définition 4.1. Si n est un naturel non nul, un *tournoi d'ordre n* est une orientation T_n du graphe complet K_n . Il s'agit donc d'un graphe orienté simple possédant n sommets (que l'on peut supposer numérotés de 1 à n) et tel que pour tout couple (i, j) , avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $i \neq j$, il existe un arc du sommet i vers le sommet j ou un arc du sommet j vers le sommet i mais jamais les deux. Comme annoncé précédemment, un arc reliant le sommet i au sommet j symbolise une victoire du joueur i sur le joueur j .

Définition 4.2. Soit T_n un tournoi d'ordre n . Le *score* d'un sommet de T_n est son demi-degré sortant, c'est-à-dire le nombre d'arcs issus de ce sommet, ou encore le nombre de matchs gagnés par le joueur représenté par ce sommet. Le *vecteur de score* de T_n est le vecteur $S = (s_1, \dots, s_n)$, où s_i est le score du sommet i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. La *perte* d'un sommet de T_n est son demi-degré entrant, c'est-à-dire le nombre d'arcs arrivant dans ce sommet, ou encore le nombre de matchs perdus par le joueur représenté par ce sommet. Le *vecteur de perte* de T_n est le vecteur $P = (p_1, \dots, p_n)$, où p_i est la perte du sommet i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Il est clair que le vecteur de score S et le vecteur de perte P associés à un tournoi T_n d'ordre n sont des éléments de $\{0, \dots, n-1\}^n$ et qu'ils sont liés par la relation

$$S + P = (n-1, \dots, n-1)$$

car chaque sommet rencontre exactement $n-1$ arcs qui peuvent être entrants ou sortants.

Lemme 4.3. Si T_n est un tournoi d'ordre n de vecteur de score $S = (s_1, \dots, s_n)$ et de vecteur de perte $P = (p_1, \dots, p_n)$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i = C_n^2.$$

Démonstration. Le nombre total d'arcs sortant des sommets de T_n correspond au nombre total d'arcs entrant dans les sommets de T_n . Il est aussi égal au nombre total d'arêtes du graphe complet K_n , c'est-à-dire C_n^2 . \square

Exemple 4.4. En septembre 2022, lors de la phase de groupes de la finale de la Coupe Davis, l'équipe belge (B) de tennis a joué dans une poule avec l'Allemagne (G), l'Australie (A) et la France (F). Chaque rencontre comptait trois matches, à savoir deux simples et un double, et le pays qui avait gagné au moins deux matches était déclaré vainqueur de la rencontre. La figure 18 nous fournit un tableau reprenant les victoires (V) et défaites (D) de chaque équipe (lecture en ligne) et le graphe représentant ce tournoi.

	B	G	A	F
B	/	D	D	D
G	V	/	V	V
A	V	D	/	V
F	V	D	D	/

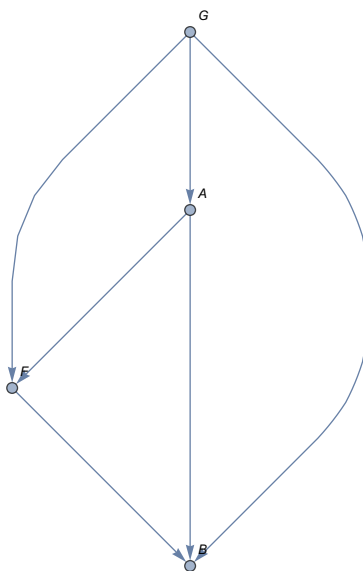


FIGURE 18 – Tableau des résultats et graphe associés à la poule de Coupe Davis de l'exemple 4.4.

Nous travaillons donc avec un tournoi d'ordre 4 dont le vecteur de score est donné par $S = (0, 3, 2, 1)$ et le vecteur de perte est donné par $P = (3, 0, 1, 2)$, en supposant que les

sommets sont considérés dans l'ordre du tableau (c'est-à-dire B, G, A et F). On retrouve bien ce qui était attendu, à savoir que

$$S + P = (0, 3, 2, 1) + (3, 0, 1, 2) = (3, 3, 3, 3)$$

et que

$$0 + 3 + 2 + 1 = 3 + 0 + 1 + 2 = 6 = C_4^2.$$

La *matrice de tournoi* associée à un tournoi T_n d'ordre n est sa matrice d'adjacence. Elle possède les propriétés suivantes, qui découlent immédiatement de la définition d'un tournoi.

Proposition 4.5. *Soit T_n un tournoi d'ordre n et soit T sa matrice de tournoi. Alors T est une matrice binaire carrée de dimension n , ses éléments diagonaux sont nuls et elle est telle que*

$$T + \tilde{T} = J_n - I_n.$$

Démonstration. Il est clair que T est une matrice binaire puisque deux sommets de T_n sont reliés par au plus un arc. De plus, comme T_n est un graphe à n sommets, sa matrice d'adjacence est une matrice carrée de dimension n . Les éléments diagonaux de T sont nuls car aucun joueur ne joue contre lui-même. Enfin, pour prouver que $T + \tilde{T} = J_n - I_n$, montrons que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$T_{i,j} + T_{j,i} = 1 - \delta_{i,j}.$$

Soient donc $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Si $i = j$, alors on a

$$0 + 0 = 0 = 1 - 1.$$

Si $i \neq j$, alors on peut supposer sans perte de généralité que le joueur i a battu le joueur j . On trouve donc que

$$1 + 0 = 1 = 1 - 0.$$

□

En considérant à nouveau les sommets dans l'ordre du tableau, la matrice de tournoi associée au tournoi de l'exemple 4.4 est donnée par la matrice binaire carrée de dimension 4

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.6. Le vecteur de score (respectivement le vecteur de perte) d'un tournoi est égal au vecteur de somme par ligne (respectivement au vecteur de somme par colonne) de la matrice de tournoi associée. En effet, soit T_n un tournoi d'ordre n et soit T sa matrice de tournoi. Si on multiplie la matrice T par le vecteur $(1, \dots, 1)^\sim$ de dimension $n \times 1$, on obtient le vecteur de score de T_n et si on multiplie le vecteur $(1, \dots, 1)$ de dimension $1 \times n$ par la matrice T , on obtient le vecteur de perte de T_n .

Remarque 4.7. Soit T_n un tournoi d'ordre n de vecteur de score S et de vecteur de perte P et soit T sa matrice de tournoi. En inversant le sens des arcs de T_n , on obtient un nouveau tournoi T'_n d'ordre n dont le vecteur de score est P et le vecteur de perte est S . La matrice de tournoi associée à T'_n est la matrice \tilde{T} .

Le résultat suivant est simplement une reformulation du fait que deux graphes sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même matrice d'adjacence, à permutation près (voir section II.1 de [20]).

Proposition 4.8. *Si T est une matrice de tournoi de dimension n , alors pour toute matrice de permutation P de dimension n , $P^{-1}TP$ est également une matrice de tournoi de dimension n . Elle correspond à une renumérotation des sommets du tournoi de départ.*

Supposons qu'au lieu de considérer les sommets du tournoi de l'exemple 4.4 dans l'ordre B, G, A et F , on les considère dans l'ordre B, F, A et G . La matrice de tournoi associée est alors donnée par

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et est égale à $P^{-1}TP$, si P est la matrice de permutation donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.9. Il découle de la proposition 4.8 que l'on peut toujours supposer que le vecteur de score d'un tournoi est croissant. Autrement dit, si $S = (s_1, \dots, s_n)$ est le vecteur de score d'un tournoi T_n d'ordre n , alors on peut supposer que

$$0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq n - 1.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit d'utiliser la bonne matrice de permutation pour réordonner les sommets du tournoi de sorte que les scores soient classés par ordre croissant.

Notation 4.10. Soit $S = (s_1, \dots, s_n)$ un vecteur croissant de naturels. On note $\tau(S)$ l'ensemble des tournois d'ordre n dont le vecteur de score est S .

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de Landau. Celui-ci a été introduit en 1953 par le mathématicien Hyman Garshin Landau dans son article [13]. Il s'agit de la suite de l'article [12], publié deux ans auparavant, qui se donnait pour objectif de modéliser le comportement animal et les dynamiques sociales.

Théorème 4.11. Soit $S = (s_1, \dots, s_n)$ un vecteur croissant de naturels. L'ensemble $\tau(S)$ est non vide si et seulement si pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq C_k^2, \quad (23)$$

avec l'égalité si $k = n$.

Remarque 4.12. Comme les vecteurs S et $(0, 1, \dots, n-1)$ sont croissants, il découle de la remarque 3.7 que les inégalités (23) sont équivalentes à la relation

$$S \preceq (0, 1, \dots, n-1),$$

au sens de la définition 3.6. De plus, les inégalités (23) sont équivalentes aux inégalités

$$\sum_{i \in K} s_i \geq C_{|K|}^2, \quad (24)$$

pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$, avec l'égalité si $K = \{1, \dots, n\}$. Un des deux sens est trivial et l'autre découle de la croissance du vecteur S . Dans le théorème 4.17 et le corollaire 4.18, nous donnerons deux autres conditions équivalentes aux inégalités (23).

Passons maintenant à la démonstration du théorème 4.11 de Landau et montrons que celui-ci peut être vu comme un cas particulier du théorème 2.35 de Rado–Hall.

Démonstration. Définissons l'ensemble fini

$$X = \{(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \text{ et } i \neq j\}.$$

Définissons un matroïde \mathbf{M} sur l'ensemble X à l'aide de ses circuits (voir définition 2.9) : l'ensemble \mathcal{C} des circuits du matroïde \mathbf{M} est l'ensemble des C_n^2 sous-ensembles disjoints

$$\{(i, j), (j, i)\}$$

de X de cardinal 2, définis pour tous naturels i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$. Cette définition de matroïde est légitimée par la proposition 2.11 car les trois propriétés de la proposition 2.10 sont vérifiées par la famille \mathcal{C} :

1. L'ensemble $\emptyset \subseteq X$ est de cardinal 0 et n'est donc pas un circuit du matroïde \mathbf{M} .
2. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $C_1 \subseteq C_2$. Comme C_1 et C_2 sont deux sous-ensembles de cardinal 2, on en déduit que $C_1 = C_2$.
3. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tels que $C_1 \neq C_2$. Puisque C_1 et C_2 sont deux sous-ensembles disjoints de X , on sait qu'il n'existe aucun élément $x \in C_1 \cap C_2$ et la propriété est donc toujours vérifiée.

Ainsi, un sous-ensemble Y de X est un indépendant de \mathbf{M} si et seulement s'il n'existe pas de naturels i et j satisfaisant à $1 \leq i < j \leq n$ tels que Y contient les couples (i, j) et (j, i) . Puisque le rang d'un sous-ensemble Y de X est le cardinal commun des sous-ensembles indépendants maximaux de Y , la fonction rang de \mathbf{M} est donnée, pour tout sous-ensemble Y de X , par

$$\rho(Y) = \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i < j \leq n\}} \min\{|Y \cap \{(i,j), (j,i)\}|, 1\}.$$

En particulier, le rang de \mathbf{M} est égal à C_n^2 car pour les C_n^2 couples (i, j) satisfaisant à $1 \leq i < j \leq n$, on sait que

$$\min\{|X \cap \{(i,j), (j,i)\}|, 1\} = \min\{2, 1\} = 1.$$

Soit $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ la famille des sous-ensembles de X définis, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, par

$$E_i = \{(i, j) : 1 \leq j \leq n \text{ et } j \neq i\},$$

Il existe un tournoi $T_n \in \tau(S)$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un sous-ensemble $D_i \subseteq E_i$ tel que $|D_i| = s_i$ et l'ensemble $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ est un indépendant du matroïde \mathbf{M} . En effet, si de tels sous-ensembles D_1, \dots, D_n existent, alors on peut considérer le tournoi T_n dont les sommets sont numérotés de 1 à n et qui est tel qu'un arc relie le sommet i au sommet j si et seulement si on a $(i, j) \in D_i$. Par construction, le vecteur de score de T_n est S . Réciproquement, à partir d'un tournoi T_n de $\tau(S)$ dont les sommets sont numérotés de 1 à n , on peut construire des sous-ensembles D_1, \dots, D_n qui satisfont aux conditions ci-dessus en posant, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$D_i = \{(i, j) : \text{il existe un arc de } T_n \text{ reliant le sommet } i \text{ au sommet } j\}.$$

On a bien que $D_i \subseteq E_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, car un sommet n'est jamais relié à lui-même dans un tournoi. De plus, puisque S est le vecteur de score de T_n , on sait que $|D_i| = s_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, car s_i arcs sortent du sommet i . Finalement, par définition d'un tournoi, il n'existe pas de naturels i et j satisfaisant à $1 \leq i < j \leq n$ tels que l'ensemble $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ contient les couples (i, j) et (j, i) et cet ensemble est donc bien un indépendant de \mathbf{M} .

Or, l'existence de tels sous-ensembles D_1, \dots, D_n est équivalente à l'existence d'un SRD indépendant pour \mathbf{M} de la famille \mathcal{F} de sous-ensembles de X définie par

$$\mathcal{F} = (\underbrace{E_1, \dots, E_1}_{s_1}, \underbrace{E_2, \dots, E_2}_{s_2}, \dots, \underbrace{E_n, \dots, E_n}_{s_n}),$$

dans laquelle l'ensemble E_i est répété s_i fois, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par le théorème 2.35 de Rado–Hall, on sait que la famille \mathcal{F} possède un SRD indépendant pour \mathbf{M} si et seulement si pour tout $K \subseteq \{1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, n, \dots, n\}$ (vu comme un multi-ensemble), on a

$$\rho\left(\bigcup_{i \in K} E_i\right) \geq |K|^7,$$

7. Le cardinal d'un multi-ensemble est, comme dans le cas d'un ensemble, son nombre d'éléments, répétés selon leur ordre respectif.

avec l'égalité si $K = \{1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, n, \dots, n\}$. Puisque le fait d'avoir plusieurs copies d'un même ensemble dans une union ne change pas son rang, on trouve que la famille \mathcal{F} possède un SRD indépendant pour \mathbf{M} si et seulement si pour tout sous-ensemble $K' \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a

$$\rho\left(\bigcup_{i \in K'} E_i\right) \geq \sum_{i \in K'} s_i, \quad (25)$$

avec l'égalité si $K' = \{1, \dots, n\}$. En effet, supposons que la famille \mathcal{F} possède un SRD indépendant pour \mathbf{M} . Soit un sous-ensemble $K' \subseteq \{1, \dots, n\}$. Définissons le multi-ensemble

$$K = \bigcup_{i \in K'} \bigcup_{j=1}^{s_i} \{i\} \subseteq \{1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, n, \dots, n\}.$$

Vu ce qui précède, on sait que

$$\rho\left(\bigcup_{i \in K} E_i\right) \geq |K|.$$

Or, on a

$$\rho\left(\bigcup_{i \in K} E_i\right) \leq \rho\left(\bigcup_{i \in K'} E_i\right)$$

et

$$|K| = \sum_{i \in K'} s_i.$$

Réciproquement, soit $K \subseteq \{1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, n, \dots, n\}$ (vu comme un multi-ensemble). Définissons l'ensemble

$$K' = \{i \in \{1, \dots, n\} : K \text{ contient au moins un élément égal à } i\} \subseteq \{1, \dots, n\}.$$

Alors, par hypothèse, on sait que

$$\rho\left(\bigcup_{i \in K'} E_i\right) \geq \sum_{i \in K'} s_i.$$

Or, on a

$$\rho\left(\bigcup_{i \in K'} E_i\right) = \rho\left(\bigcup_{i \in K} E_i\right)$$

et

$$\sum_{i \in K'} s_i \geq |K|.$$

Soit un sous-ensemble $K' \subseteq \{1, \dots, n\}$. Notons $k' = |K'|$. On calcule que

$$\begin{aligned} \rho\left(\bigcup_{i \in K'} E_i\right) &= (n-1) + (n-2) + \dots + (n-(k'-1)) + (n-k') \\ &= k'(n-k') + (k'-1) + (k'-2) + \dots + 1 + 0 \\ &= C_{k'}^2 + k'(n-k'). \end{aligned}$$

On sait donc que $\rho(\cup_{i \in K'} E_i)$ ne dépend pas de K' lui-même mais seulement de son cardinal k' . Pour un naturel k' fixé, on sait, par croissance du vecteur S , que $\sum_{i \in K'} s_i$ est la plus grande lorsque $K' = \{n - k' + 1, \dots, n\}$. Alors les inégalités (25) sont équivalentes aux inégalités

$$C_{k'}^2 + k'(n - k') \geq \sum_{i=n-k'+1}^n s_i = C_n^2 - \sum_{i=1}^{n-k'} s_i,$$

pour tout $k' \in \{0, \dots, n\}$. De plus, chaque inégalité ci-dessus est équivalente à l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n-k'} s_i \geq C_n^2 - C_{k'}^2 - k'(n - k'),$$

ou encore à l'inégalité

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq C_n^2 - C_{n-k}^2 - k(n - k),$$

en utilisant le changement de variable $k = n - k'$ (on a donc $0 \leq k \leq n$). La conclusion découle alors du fait que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} C_n^2 - C_{n-k}^2 - k(n - k) &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} - \frac{2k(n-k)}{2} \\ &= \frac{n(n-1) - (n-k)(n+k-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - n^2 - kn + n + kn + k^2 - k}{2} \\ &= \frac{k^2 - k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = C_k^2. \end{aligned}$$

Remarquons que si $k = n$, alors on a bien l'égalité

$$\sum_{i=1}^n s_i = C_n^2.$$

□

Nous savons que l'ensemble $\tau((0, 1, 2, 3))$ est non vide puisqu'un tournoi de celui-ci est donné à l'exemple 4.4 en considérant les sommets dans l'ordre B, F, A et G . Dans ce cas, les inégalités (23) de Landau sont effectivement respectées car on a

- $0 \geq C_0^2 = 0$;
- $0 \geq C_1^2 = 0$;
- $0 + 1 = 1 \geq C_2^2 = 1$;
- $0 + 1 + 2 = 3 \geq C_3^2 = 3$;
- $0 + 1 + 2 + 3 = 6 = C_4^2$.

Par contre, l'ensemble $\tau((0, 0, 2, 4, 4))$ est vide. En effet, les inégalités (23) de Landau ne sont pas vérifiées quand k vaut 2 ou 3 car on a

$$0 + 0 = 0 < C_2^2 = 1$$

et

$$0 + 0 + 2 = 2 < C_3^2 = 3.$$

Remarque 4.13. Soit T_n un tournoi d'ordre n dont le vecteur de score est $S = (s_1, \dots, s_n)$. Ainsi, le théorème 4.11 affirme que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq C_k^2,$$

avec l'égalité si $k = n$. Supposons qu'il existe un naturel $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que

$$\sum_{i=1}^k s_i = C_k^2. \quad (26)$$

Alors la matrice de tournoi associée à T_n est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} * & O_{k, n-k} \\ J_{n-k, k} & * \end{pmatrix}.$$

En effet, si on considère les k premiers joueurs du tournoi T_n , c'est-à-dire ceux associés aux scores s_1, \dots, s_k , on déduit de l'égalité (26) que chacune des victoires d'un de ces k joueurs a eu lieu contre un autre de ces k joueurs. Autrement dit, aucun de ces k joueurs n'a battu un des $n - k$ autres joueurs. Cela justifie la présence de la matrice nulle de dimension $k \times (n - k)$ en haut à droite de la matrice T . Par définition, on sait que chaque match du tournoi mène à une victoire de l'un des deux joueurs en opposition. Ainsi, chacun des $n - k$ derniers joueurs de T_n a battu les k premiers joueurs, ce qui justifie la présence de la matrice ne contenant que des 1 de dimension $(n - k) \times k$ en bas à gauche de la matrice T . La matrice de tournoi T est donc réductible et le tournoi T_n associé n'est pas fortement connexe.

Considérons un dernier exemple pour illustrer la remarque précédente.

Exemple 4.14. La figure 19 représente un tournoi T_6 d'ordre 6 dont le vecteur de score est $S = (1, 1, 2, 2, 4, 5)$. Dans ce cas, les inégalités (23) de Landau sont effectivement respectées car on a

- $0 \geq C_0^2 = 0$;
- $1 \geq C_1^2 = 0$;
- $1 + 1 = 2 \geq C_2^2 = 1$;
- $1 + 1 + 2 = 4 \geq C_3^2 = 3$;

- $1 + 1 + 2 + 2 = 6 \geq C_4^2 = 6$;
- $1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10 \geq C_5^2 = 10$;
- $1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 5 = 15 = C_6^2$.

De plus, nous avons les égalités

$$1 + 1 + 2 + 2 = 6 = C_4^2$$

et

$$1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10 = C_5^2.$$

La matrice de tournoi associée au tournoi T_6 de la figure 19 est

$$T = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{array} \right).$$

Cette matrice T est bien réductible et le tournoi T_6 de la figure 19 n'est pas fortement connexe car il n'existe aucun chemin joignant le sommet 1 au sommet 6 par exemple.

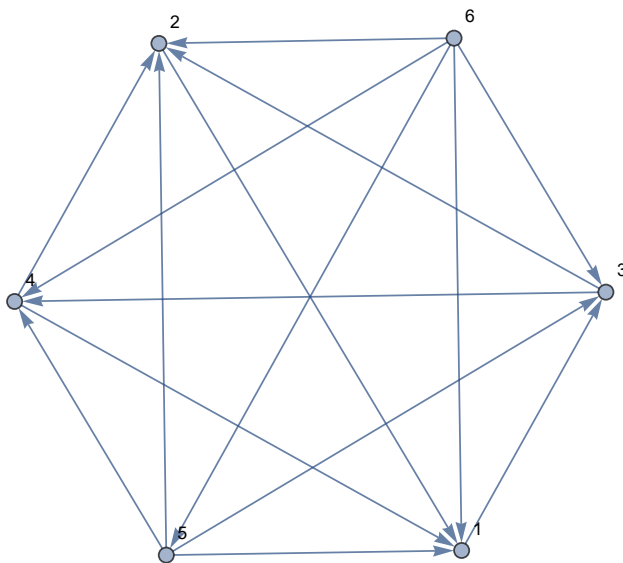


FIGURE 19 – Tournoi T_6 dont le vecteur de score est $S = (1, 1, 2, 2, 4, 5)$.

La remarque suivante établit un lien entre le théorème de Landau et le théorème de Gale–Ryser. Un autre lien entre ces deux résultats sera donné à la fin de la section 4.2.

Remarque 4.15. Soient $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $S' = (s'_1, \dots, s'_n)$ deux vecteurs croissants de naturels qui sont les vecteurs de score de deux tournois. Par le théorème 4.11 de Landau et la remarque 4.12, on sait que

$$S \preceq (0, 1, \dots, n-1) \text{ et } S' \preceq (0, 1, \dots, n-1).$$

Puisque les trois vecteurs S , S' et $(0, 1, \dots, n-1)$ sont croissants, cela signifie, au vu de la remarque 3.7, que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq \sum_{i=1}^k (i-1) \text{ et } \sum_{i=1}^k s'_i \geq \sum_{i=1}^k (i-1)$$

Montrons que

$$(n-1, \dots, 1, 0) \preceq S^*,$$

où S^* est le vecteur conjugué de S tel que défini au début de la section 3.2. Puisque les deux vecteurs $(n-1, \dots, 1, 0)$ et S^* sont décroissants, il suffit, au vu de la remarque 3.7, de montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^k (n-i) \leq \sum_{i=1}^k s_i^*,$$

avec l'égalité si $k = n$. Soit donc $k \in \{1, \dots, n\}$. Par un raisonnement analogue à celui ayant permis de montrer l'égalité (21), on trouve que

$$\sum_{i=1}^k s_i^* = (n-t_k)k + \sum_{i=1}^{t_k} s_i \geq k(n-t_k) + \sum_{i=1}^{t_k} (i-1) = \frac{2kn - 2kt_k + t_k^2 - t_k}{2},$$

si $t_k = |\{i \in \{1, \dots, n\} : s_i < k\}|$. De plus, on a

$$\sum_{i=1}^k (n-i) = kn - \sum_{i=1}^k i = kn - \frac{k^2 + k}{2} = \frac{2kn - k^2 - k}{2}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{2kn - k^2 - k}{2} &\leq \frac{2kn - 2kt_k + t_k^2 - t_k}{2} \\ \Leftrightarrow t_k^2 - t_k(1+2k) + (k^2 + k) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow t_k \leq k \text{ ou } t_k &\geq k+1, \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai puisque t_k et k sont des naturels. On en tire que

$$\sum_{i=1}^k s_i^* \geq \frac{2kn - 2kt_k + t_k^2 - t_k}{2} \geq \frac{2kn - k^2 - k}{2} = \sum_{i=1}^k (n-i).$$

De plus, si $k = n$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n (n-i) = \sum_{j=0}^{n-1} j = C_n^2 = \sum_{i=1}^n s_i^*.$$

Il découle alors de la transitivité de la relation \preceq établie à la remarque 3.8 et du fait que $(0, 1, \dots, n-1) \preceq (n-1, \dots, 1, 0)$ que

$$S' \preceq S^*$$

et on en déduit, par le théorème 3.9 de Gale–Ryser, que si S et S' sont les vecteurs de score de deux tournois, alors l'ensemble $\mathcal{B}(S, S')$ est non vide.

4.2 Un tournoi particulier

Un *tournoi transitif* d'ordre n est un tournoi qui est tel que si le joueur i bat le joueur j et le joueur j bat le joueur k , alors le joueur i bat le joueur k . Comme on peut toujours supposer que le vecteur de score d'un tournoi est croissant (voir remarque 4.9), on trouve que le vecteur de score d'un tournoi transitif d'ordre n est $S = (0, 1, \dots, n-1)$. En ordonnant les sommets dans l'ordre associé à ce vecteur croissant S , on trouve que le joueur i bat le joueur j si et seulement si $j < i$. La matrice de tournoi correspondante est une matrice triangulaire inférieure ne possédant que des 0 sur la diagonale principale et que des 1 sous celle-ci. Un tournoi transitif modélise donc une poule dans laquelle le meilleur joueur bat tous les autres, le deuxième bat tout le monde sauf le meilleur et ainsi de suite jusqu'au dernier qui perd contre tout le monde.

Le tournoi d'ordre 4 de l'exemple 4.4 est transitif. En considérant les sommets dans l'ordre B, F, A et G , le vecteur de score est $S = (0, 1, 2, 3)$ et la matrice de tournoi est la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est bien une matrice triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale principale et des 1 sous celle-ci.

Le théorème suivant a notamment été trouvé par Guiduli *et al.* dans l'article [11]. Il affirme que pour tout vecteur croissant de naturels S tel que l'ensemble $\tau(S)$ introduit à la notation 4.10 est non vide, il existe un tournoi dont le vecteur de score est S et dont les sommets peuvent être partitionnés en deux sous-ensembles de même cardinal (à une unité près si le nombre de joueurs est impair) qui induisent chacun un tournoi transitif.

Théorème 4.16. *Soit $S = (s_1, \dots, s_n)$ un vecteur croissant de naturels tel que l'ensemble $\tau(S)$ est non vide. Alors il existe un tournoi $T_n \in \tau(S)$ tel que pour tous naturels $j, k \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant à $k < j$ et $j \equiv k \pmod{2}$, le joueur j bat le joueur k .*

Afin de démontrer le théorème précédent, nous allons suivre le raisonnement de Brualdi et Shen dans leur article [6]. Nous avons dès lors besoin de résultats intermédiaires. Le premier d'entre eux nous fournit, comme dans le théorème 4.11, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tournoi ayant un vecteur de score donné. On constate donc que les inégalités (27) sont équivalentes aux inégalités (24). Cependant, nous allons montrer dans la preuve que, prise séparément des autres, chacune des inégalités du théorème suivant est plus forte que celle qui lui correspond parmi les inégalités (24).

Théorème 4.17. *Soit $S = (s_1, \dots, s_n)$ un vecteur croissant de naturels. L'ensemble $\tau(S)$ est non vide si et seulement si pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a*

$$\sum_{i \in K} s_i \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i - 1) + \frac{1}{2} C_{|K|}^2, \quad (27)$$

avec l'égalité si $K = \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Commençons par montrer que la condition est suffisante. Pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i \in K} (i - 1) \geq \sum_{i=1}^{|K|} (i - 1) = C_{|K|}^2.$$

Ainsi, si les inégalités (27) sont satisfaites, on sait qu'on a, pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{i \in K} s_i \geq C_{|K|}^2.$$

La conclusion découle alors du théorème 4.11 de Landau et de la remarque 4.12.

Montrons ensuite que la condition est nécessaire. Supposons donc que l'ensemble $\tau(S)$ est non vide. Définissons la fonction f en posant, pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$,

$$f(K) = \sum_{i \in K} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i - 1) - \frac{1}{2} C_{|K|}^2.$$

Parmi les sous-ensembles non vides $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ qui minimisent la valeur de la fonction f , choisissons celui dont le cardinal est le plus petit. On en tire que

$$K = \{i \in \{1, \dots, n\} : 1 \leq i \leq |K|\}.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, alors on sait qu'il existe des naturels j et k tels que $j \in K$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus K$ et $j = k + 1$. Comme $k < j$, on sait que $s_k \leq s_j$ car le vecteur S est

croissant. Or, on a

$$\begin{aligned}
& f(K) - f(K \setminus \{j\}) \\
&= \sum_{i \in K} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i-1) - \frac{1}{2} C_{|K|}^2 - \left(\sum_{i \in K \setminus \{j\}} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in K \setminus \{j\}} (i-1) - \frac{1}{2} C_{|K \setminus \{j\}|}^2 \right) \\
&= s_j - \frac{1}{2}(j-1) - \frac{1}{2} (C_{|K \setminus \{j\}|+1}^2 - C_{|K \setminus \{j\}|}^2) \\
&= s_j - \frac{1}{2}(j-1) - \frac{1}{2} C_{|K \setminus \{j\}|}^1 \\
&= s_j - \frac{1}{2}(j + |K| - 2) \\
&< 0
\end{aligned} \tag{28}$$

et

$$\begin{aligned}
& f(K \cup \{k\}) - f(K) \\
&= \sum_{i \in K \cup \{k\}} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in K \cup \{k\}} (i-1) - \frac{1}{2} C_{|K \cup \{k\}|}^2 - \left(\sum_{i \in K} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i-1) - \frac{1}{2} C_{|K|}^2 \right) \\
&= s_k - \frac{1}{2}(k-1) - \frac{1}{2} (C_{|K|+1}^2 - C_{|K|}^2) \\
&= s_k - \frac{1}{2}(k-1) - \frac{1}{2} C_{|K|}^1 \\
&= s_k - \frac{1}{2}(k + |K| - 1) \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{29}$$

où les inégalités (28) et (29) découlent du choix du sous-ensemble K . On en tire que

$$\frac{1}{2}(k + |K| - 1) \leq s_k \leq s_j < \frac{1}{2}(j + |K| - 2) = \frac{1}{2}(k + |K| - 1),$$

ce qui est absurde.

Ainsi, on trouve que

$$\begin{aligned}
f(K) &= \sum_{i=1}^{|K|} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|K|} (i-1) - \frac{1}{2} C_{|K|}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{|K|} s_i - C_{|K|}^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

où l'inégalité (30) découle du fait que l'ensemble $\tau(S)$ est non vide et du théorème 4.11 de Landau. La conclusion découle alors du choix du sous-ensemble K . En effet, comme la fonction f est positive en un élément qui la rend minimale, on sait qu'elle est positive sur son domaine de définition. De plus, si $K = \{1, \dots, n\}$, on a bien l'égalité souhaitée. \square

Corollaire 4.18. Soit $S = (s_1, \dots, s_n)$ un vecteur croissant de naturels. L'ensemble $\tau(S)$ est non vide si et seulement si pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i \in K} s_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i-1) + \frac{1}{4} |K| (2n - |K| - 1),$$

avec l'égalité si $K = \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Commençons par considérer le cas où $K = \{1, \dots, n\}$. Vu le lemme 4.3, on a, d'une part,

$$\sum_{i \in K} s_i = \sum_{i=1}^n s_i = C_n^2$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i-1) + \frac{1}{4} |K| (2n - |K| - 1) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i-1) + \frac{1}{4} n(2n - n - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{4} n(n-1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{4} n(n-1) \\ &= \frac{(n-1)n}{2} = C_n^2. \end{aligned}$$

Considérons ensuite un sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ et posons $J = \{1, \dots, n\} \setminus K$. Alors on a

$$\sum_{i \in K} s_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i-1) + \frac{1}{4} |K| (2n - |K| - 1)$$

si et seulement si on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} s_i &= C_n^2 - \sum_{i \in K} s_i \\ &\geq C_n^2 - \left(\frac{1}{2} \sum_{i \in K} (i-1) + \frac{1}{4} |K| (2n - |K| - 1) \right) \\ &= C_n^2 - \frac{1}{2} \left(C_n^2 - \sum_{i \in J} (i-1) \right) - \frac{1}{4} (n - |J|)(n + |J| - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in J} (i-1) + \frac{1}{2} \left(C_n^2 - \frac{(n - |J|)(n + |J| - 1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in J} (i-1) + \frac{1}{2} \frac{n^2 - n - n^2 - n|J| + n + n|J| + |J|^2 - |J|}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in J} (i-1) + \frac{1}{2} \frac{|J|(|J| - 1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i \in J} (i-1) + \frac{1}{2} C_{|J|}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la conclusion découle du théorème 4.17. □

Corollaire 4.19. Soit $S = (s_1, \dots, s_n)$ un vecteur croissant de naturels. Supposons que l'ensemble $\tau(S)$ soit non vide. Alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{k-1}{2} \leq s_k \leq \frac{n+k-2}{2}.$$

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement du théorème 4.17 et du corollaire 4.18 appliqués au sous-ensemble $K = \{k\}$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. \square

Définition 4.20. Soient m et n deux naturels non nuls. Un *tournoi biparti* d'ordre $n + m$ est une orientation $T_{n,m}$ du graphe biparti complet $K_{n,m}$. Le *vecteur de score* d'un tournoi biparti est la donnée de deux vecteurs de naturels $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $S' = (s'_1, \dots, s'_m)$ tels que le vecteur S (respectivement le vecteur S') contient le demi-degré sortant de chaque sommet qui se trouve dans le sous-ensemble de cardinal n (respectivement de cardinal m). Comme précédemment, on peut supposer que les vecteurs S et S' sont croissants.

Remarque 4.21. Soit $T_{n,m}$ un tournoi biparti d'ordre $n + m$ dont le vecteur de score est formé des deux vecteurs croissants de naturels $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $S' = (s'_1, \dots, s'_m)$. La matrice d'adjacence de $T_{n,m}$ est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} O_n & U \\ J_{m,n} - \tilde{U} & O_m \end{pmatrix},$$

où U est une matrice binaire de dimension $n \times m$ dont le vecteur de somme par ligne est S et le vecteur de somme par colonne est le vecteur R' de dimension $1 \times m$ défini par

$$R' = (n, \dots, n) - S'.$$

Avant de pouvoir démontrer le théorème 4.16, nous avons besoin d'un dernier lemme que nous démontrons en utilisant le théorème 3.9 de Gale–Ryser.

Lemme 4.22. Deux vecteurs croissants de naturels $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $S' = (s'_1, \dots, s'_m)$ forment le vecteur de score d'un tournoi biparti d'ordre $n + m$ si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tout $l \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\sum_{i=1}^k s_i + \sum_{j=1}^l s'_j \geq kl, \tag{31}$$

avec l'égalité si $k = n$ et $l = m$.

Démonstration. Supposons que les deux vecteurs croissants de naturels $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $S' = (s'_1, \dots, s'_m)$ forment le vecteur de score d'un tournoi biparti d'ordre $n + m$. Notons $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ les deux sous-ensembles de sommets de ce tournoi biparti. Soient $k \in \{1, \dots, n\}$ et $l \in \{1, \dots, m\}$. Alors il est clair que

$$\sum_{i=1}^k s_i + \sum_{j=1}^l s'_j \geq kl.$$

En effet, kl est égal à la somme du nombre d'arcs sortant d'un des sommets u_1, \dots, u_k pour rejoindre un des sommets v_1, \dots, v_l (ce nombre est inférieur ou égal à $\sum_{i=1}^k s_i$) et du nombre d'arcs sortant d'un des sommets v_1, \dots, v_l pour rejoindre un des sommets u_1, \dots, u_k (ce nombre est inférieur ou égal à $\sum_{j=1}^l s'_j$). De plus, si $k = n$ et $l = m$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n s_i + \sum_{j=1}^m s'_j = nm$$

car le membre de gauche est égal à la somme du nombre d'arcs sortant des n sommets u_1, \dots, u_n et du nombre d'arcs sortant des m sommets v_1, \dots, v_m . Cela revient à compter le nombre d'arcs sortant et entrant dans les n sommets u_1, \dots, u_n . Ce dernier vaut bien nm .

Réciproquement, supposons que $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $S' = (s'_1, \dots, s'_m)$ soient deux vecteurs croissants de naturels satisfaisant aux inégalités (31). Au vu de la remarque 4.21, il est clair que les vecteurs S et S' forment le vecteur de score d'un tournoi biparti d'ordre $n + m$ si et seulement s'il existe une matrice dans l'ensemble $\mathcal{B}(S, R')$, où R' est toujours le vecteur défini par

$$R' = (n, \dots, n) - S'.$$

Il suffit donc, au vu du théorème 3.9 de Gale–Ryser, de montrer qu'on a, pour tout $l \in \{1, \dots, m\}$,

$$r'_1 + \dots + r'_l \leq s_1^* + \dots + s_l^*,$$

avec l'égalité si $l = m$. Soit donc $l \in \{1, \dots, m\}$. Par hypothèse, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} r'_1 + \dots + r'_l &= (n - s'_1) + \dots + (n - s'_l) \\ &= ln - s'_1 - \dots - s'_l \\ &\leq ln + \sum_{i=1}^k s_i - kl. \end{aligned}$$

Posons $k_l = |\{i \in \{1, \dots, n\} : s_i \leq l\}|$. Vu la croissance du vecteur S , nous savons donc que les k_l premiers éléments de S sont inférieurs ou égaux à l . Ainsi, on trouve que

$$r'_1 + \dots + r'_l \leq ln + \sum_{i=1}^{k_l} s_i - k_l l.$$

Par un raisonnement analogue à celui ayant permis de montrer l'égalité (21), on trouve que

$$ln + \sum_{i=1}^{k_l} s_i - k_l l = l(n - k_l) + \sum_{i=1}^{k_l} s_i = s_1^* + \dots + s_l^*.$$

□

Remarque 4.23. Les inégalités (31) du lemme 4.22 peuvent s'exprimer à l'aide de sous-ensembles. En effet, les vecteurs croissants de naturels $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $S' = (s'_1, \dots, s'_m)$ forment le vecteur de score d'un tournoi biparti d'ordre $n + m$ si et seulement si pour tout sous-ensemble $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ et tout sous-ensemble $L \subseteq \{1, \dots, m\}$, on a

$$\sum_{k \in K} s_k + \sum_{l \in L} s'_l \geq |K||L|,$$

avec l'égalité si $K = \{1, \dots, n\}$ et $L = \{1, \dots, m\}$. Un des deux sens est trivial et l'autre découle de la croissance des vecteurs S et S' .

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 4.16.

Démonstration. Posons

$$V_1 = \{i \in \{1, \dots, n\} : i \text{ est impair}\}$$

et

$$V_2 = \{i \in \{1, \dots, n\} : i \text{ est pair}\}.$$

Par le corollaire 4.19, on sait que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$s_i \geq \frac{i-1}{2}.$$

Construisons donc un graphe d'ordre n en traçant un arc du sommet j vers le sommet k si $j > k$ et si $j \equiv k \pmod{2}$. Ainsi, les tournois induits par les deux sous-ensembles V_1 et V_2 sont transitifs. En particulier, on a utilisé $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ arcs issus de chaque sommet i . Or, on sait que

$$\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{i-1}{2} & \text{si } i \in V_1 \\ \frac{i-2}{2} & \text{si } i \in V_2 \end{cases}.$$

Il nous reste donc à prouver que les vecteurs de naturels

$$\left(s_i - \frac{i-1}{2} : i \in V_1\right) \text{ et } \left(s_i - \frac{i-2}{2} : i \in V_2\right)$$

forment le vecteur de score d'un tournoi biparti d'ordre $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dont la partition des sommets est (V_1, V_2) . Soient deux sous-ensembles disjoints $J \subseteq V_1$ et $K \subseteq V_2$. Alors on sait que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \left(s_i - \frac{i-1}{2}\right) + \sum_{i \in K} \left(s_i - \frac{i-2}{2}\right) &= \sum_{i \in J \cup K} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in J \cup K} (i-1) + \frac{1}{2} \sum_{i \in K} 1 \\ &\geq \frac{1}{2} C_{|J \cup K|}^2 + \frac{1}{2} |K| \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} C_{|J|+|K|}^2 + \frac{1}{2} |K| \\ &\geq |J||K|, \end{aligned} \tag{33}$$

avec l'égalité si $J = V_1$ et $K = V_2$ car, dans ce cas, on a $J \cup K = \{1, \dots, n\}$. L'inégalité (32) découle du théorème 4.17. L'inégalité(33) est justifiée par le fait que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C_{|J+|K|}^2 + \frac{1}{2}|K| \geq |J||K| &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{(|J| + |K|)(|J| + |K| - 1)}{2} + \frac{1}{2}|K| \geq |J||K| \\ &\Leftrightarrow \frac{(|J| + |K|)^2 - |J| + |K|}{4} \geq |J||K| \\ &\Leftrightarrow (|J| - |K|)^2 - |J| + |K| \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (|J| - |K|)(|J| - |K| - 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow |J| \geq |K| + 1 \text{ ou } |J| \leq |K|, \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai. En particulier, si $J = V_1$ et $K = V_2$, on a bien l'égalité. La conclusion découle alors du lemme 4.22. □

Exemple 4.24. Reprenons l'exemple 4.14. Nous avons montré que le vecteur croissant de naturels $S = (1, 1, 2, 2, 4, 5)$ est tel que l'ensemble $\tau(S)$ est non vide. Le tournoi représenté à la figure 19 ne vérifie cependant pas les propriétés voulues dans le théorème 4.16. Or, nous savons qu'un tel tournoi existe et allons donc en donner un. Puisque $n = 6$, nous savons, en utilisant les notations de la preuve du théorème 4.16, que $V_1 = \{1, 3, 5\}$, que $V_2 = \{2, 4, 6\}$ et qu'il doit exister des arcs reliant le sommet 3 au sommet 1, le sommet 5 aux sommets 1 et 3, le sommet 4 au sommet 2 et le sommet 6 aux sommets 2 et 4. Le graphe de gauche de la figure 20 représente cette situation. Nous devons ensuite ajouter des arcs pour relier les autres sommets entre eux, en respectant le vecteur de score S de départ. Ainsi, il manque 1 (respectivement 1, 1, 1, 2 et 3) arc(s) sortant du sommet 1 (respectivement du sommet 2,3,4,5 et 6). Le graphe de droite de la figure 20 représente un tournoi vérifiant ces conditions.

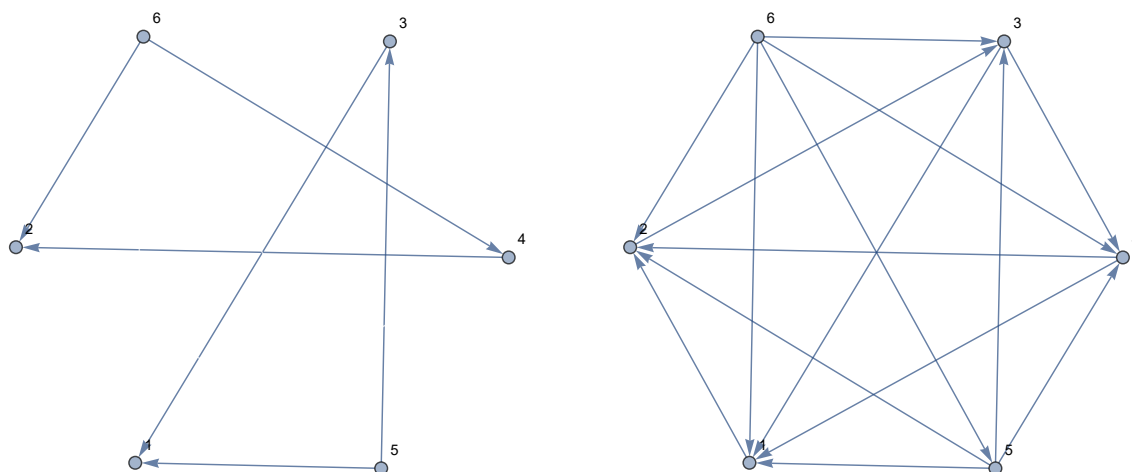


FIGURE 20 – Construction d'un tournoi de $\tau((1, 1, 2, 2, 4, 5))$ qui vérifie les conditions du théorème 4.16.

Le tournoi $T_n \in \tau(S)$ du théorème 4.16 contient les deux tournois transitifs T_1 et T_2 , respectivement d'ensemble de sommets $\left\{1, 3, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$ et $\left\{2, 4, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$. Si on permute simultanément les lignes et les colonnes de la matrice de tournoi associée à T_n de sorte que les sommets impairs viennent avant les sommets pairs, la matrice de tournoi correspondante est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} U_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} & V \\ J_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} - \tilde{V} & U_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \end{pmatrix},$$

où U_m représente une matrice triangulaire inférieure de dimension m ne contenant que des 0 sur la diagonale principale et que des 1 sous celle-ci (c'est-à-dire une matrice associée à un tournoi transitif d'ordre m). Ainsi, l'existence d'un tournoi $T_n \in \tau(S)$ qui satisfait aux conditions du théorème 4.16 est équivalente à l'existence de la matrice V de dimension $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Soient L le vecteur de somme par ligne de la matrice V et C son vecteur de somme par colonne. Ils sont déterminés par le vecteur de score $S = (s_1, \dots, s_n)$ et le vecteur de perte $P = (p_1, \dots, p_n)$ (pour rappel lui-même déterminé par S) du tournoi T_n de la façon suivante :

1. Si n est pair, alors on a

$$L = \left(s_1 - 0, s_3 - 1, \dots, s_{n-1} - \frac{n-2}{2} \right)$$

et

$$C = \left(p_2 - \frac{n}{2} + 1, p_4 - \frac{n}{2} + 2, \dots, p_n - 0 \right).$$

2. Si n est impair, alors on a

$$L = \left(s_1 - 0, s_3 - 1, \dots, s_n - \frac{n-1}{2} \right)$$

et

$$C = \left(p_2 - \frac{n-1}{2} + 1, p_4 - \frac{n-1}{2} + 2, \dots, p_{n-1} - 0 \right).$$

On en tire que l'existence d'un tournoi $T_n \in \tau(S)$ qui vérifie les conditions du théorème 4.16 est équivalente au fait que l'ensemble $\mathcal{B}(L, C)$ soit non vide, ce qui nous ramène au théorème de Gale–Ryser.

4.3 Propriétés spectrales des matrices de tournoi

Dans cette section, nous allons étudier quelques propriétés spectrales des matrices de tournoi. Rappelons que le *rayon spectral* d'une matrice carrée A est égal au plus grand module de ses valeurs propres et qu'il est noté $\rho(A)$. Nous allons tout d'abord donner une borne supérieure pour le rayon spectral d'une matrice de tournoi. Pour cela, nous avons

besoin d'un résultat à propos du rang d'une matrice de tournoi. Nous caractérisons ensuite les matrices binaires dont toutes les valeurs propres sont strictement positives et montrons qu'aucune matrice de tournoi ne peut vérifier cette propriété.

Lemme 4.25. *Le rang d'une matrice de tournoi de dimension n vaut n ou $n - 1$.*

Démonstration. Soit T une matrice de tournoi de dimension n . Soit T' la matrice de dimension $n \times (n + 1)$ obtenue en ajoutant à la matrice T une colonne initiale j_n qui ne contient que des 1. Soit x un vecteur réel de dimension $n \times 1$ tel que $\tilde{x} T' = 0$. On en tire que $\tilde{x} j_n = 0$ et que $\tilde{x} T = 0$ en séparant la première colonne j_n du reste T de la matrice T' . Ainsi, d'une part, nous avons que

$$\begin{aligned}\tilde{x} (J_n - I_n) x &= \tilde{x} J_n x - \tilde{x} I_n x \\ &= 0 - \tilde{x} x \\ &= -\tilde{x} x.\end{aligned}$$

D'autre part, grâce à la proposition 4.5, nous avons aussi que

$$\begin{aligned}\tilde{x} (J_n - I_n) x &= \tilde{x} (T + \tilde{T}) x \\ &= \tilde{x} T x + \tilde{x} \tilde{T} x \\ &= (\tilde{x} T) x + \tilde{x} (\tilde{x} T)^\sim \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, on en tire que $\tilde{x} x = 0$. Il en découle que $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$, c'est-à-dire que

$$x_1 = \dots = x_n = 0.$$

Or, si L_j représente la j^e ligne de la matrice T' , pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, alors on a

$$\tilde{x} T' = \sum_{j=1}^n x_j L_j.$$

En effet, pour tout $i \in \{1, \dots, n + 1\}$, le i^e élément du membre de gauche vaut

$$(\tilde{x} T')_i = \sum_{k=1}^n x_k T'_{k,i}$$

et le i^e élément du membre de droite vaut

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j L_j \right)_i = \sum_{j=1}^n x_j (L_j)_i = \sum_{j=1}^n x_j T'_{j,i}.$$

Ainsi, nous avons montré que

$$\sum_{j=1}^n x_j L_j = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0,$$

c'est-à-dire que les n lignes de la matrice T' sont linéairement indépendantes. Ceci implique que T' est de rang n . On en tire que T est de rang au moins $n - 1$. \square

On déduit du lemme 4.25 qu'une matrice de tournoi est inversible ou qu'elle admet 0 comme valeur propre de multiplicité géométrique 1. Puisque les matrices de tournoi sont positives, il découle de la théorie de Perron–Frobenius que si T est la matrice de tournoi associée au tournoi T_n d'ordre n , alors il existe une valeur propre positive de la matrice T qui est égale à son rayon spectral. En effet, nous savons par la remarque 1.3 que le spectre de la matrice T est égal à l'union des spectres de ses composantes irréductibles T_1, \dots, T_k . Au vu du théorème A.9, chaque matrice T_i de dimension au moins 2 admet une valeur propre strictement positive r_i égale à son rayon spectral. De plus, chaque matrice T_i de dimension 1 est nécessairement la matrice nulle et elle possède donc une unique valeur propre r_i qui est nulle et égale à son rayon spectral. Ainsi, si on pose

$$r = \max\{r_i : 1 \leq i \leq k\},$$

on trouve que r est une valeur propre positive de la matrice T qui est égale à son rayon spectral. On peut même en déduire que la matrice de tournoi T admet une valeur propre strictement positive si et seulement si le tournoi T_n n'est pas transitif. En effet, d'une part, procédons par contraposition et supposons donc que le tournoi T_n est transitif. Dans ce cas, nous savons que la matrice T est une matrice triangulaire inférieure qui ne possède que des 0 sur la diagonale principale. Ainsi, son unique valeur propre est nulle. Réciproquement, supposons que la matrice T n'admette pas de valeur propre strictement positive. On en tire que la valeur propre positive de la matrice T qui est égale à son rayon spectral est nulle. Ainsi, l'unique valeur propre de la matrice T est nulle. On déduit de ce qui précède que toutes ses composantes irréductibles sont de dimension 1. Ainsi, le tournoi T_n ne possède aucune composante fortement connexe contenant au moins deux sommets. Le seul tournoi qui vérifie cette propriété est le tournoi transitif d'ordre n .

Définition 4.26. Un tournoi T_n d'ordre impair n est *régulier* si son vecteur de score (et donc également son vecteur de perte) est le vecteur

$$\left(\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2} \right).$$

Un tournoi T_n d'ordre pair n est *presque régulier* si son vecteur de score est le vecteur

$$\left(\underbrace{\frac{n-2}{2}, \dots, \frac{n-2}{2}}_{\frac{n}{2}}, \underbrace{\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}} \right),$$

où chacun des deux scores $\frac{n-2}{2}$ et $\frac{n}{2}$ est présent $\frac{n}{2}$ fois. On peut étendre ces notions de régularité aux matrices de tournoi.

La proposition suivante, due aux mathématiciens Brauer et Gentry dans leur article [3], donne une borne supérieure pour le rayon spectral d'une matrice de tournoi.

Proposition 4.27. *Si T est la matrice de tournoi associée au tournoi T_n d'ordre n , alors on a*

$$\rho(T) \leq \frac{n-1}{2},$$

avec l'égalité si et seulement si T_n est un tournoi régulier.

Démonstration. Au vu de ce qui précède, nous savons que $\rho(T)$ est une valeur propre de la matrice T . Notons-la λ_1 . Soit x un vecteur propre non nul de la matrice T associé à la valeur propre λ_1 . Ainsi, grâce à la proposition 4.5, on a

$$\begin{aligned} \tilde{x} J_n x - \tilde{x} x &= \tilde{x} (J_n - I_n) x = \tilde{x} (T + \tilde{T}) x \\ &= \tilde{x} T x + \tilde{x} \tilde{T} x = \tilde{x} T x + (T x) \tilde{x} \\ &= \lambda_1 \tilde{x} x + \lambda_1 \tilde{x} x = 2 \lambda_1 \tilde{x} x. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on trouve que

$$(2\lambda_1 + 1) \tilde{x} x = \tilde{x} J_n x = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

avec l'égalité si et seulement si x est un multiple du vecteur $(1, \dots, 1)^\sim$. Finalement, on a obtenu que

$$(2\lambda_1 + 1) \tilde{x} x \leq n \tilde{x} x \Leftrightarrow 2\lambda_1 + 1 \leq n \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \frac{n-1}{2},$$

avec l'égalité si et seulement si $(1, \dots, 1)^\sim$ est un vecteur propre de la matrice T associé à la valeur propre λ_1 . Or, si S est le vecteur de score du tournoi T_n , ceci est équivalent au fait d'avoir, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^n T_{i,j} = s_i = \lambda_1.$$

Ainsi, on a $s_1 = \dots = s_n$ et comme le lemme 4.3 affirme que

$$\sum_{i=1}^n s_i = C_n^2,$$

cela revient à demander que $s_i = \frac{n-1}{2}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que T_n soit un tournoi régulier. \square

Nous avons précédemment pu constater que certaines matrices de tournoi possèdent une valeur propre strictement positive. Dans la suite de cette section, nous allons caractériser les matrices binaires quelconques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives en vue de déterminer si certaines matrices de tournoi vérifient cette propriété.

Il est assez simple de trouver des matrices binaires carrées dont toutes les valeurs propres sont positives ou même strictement positives. Par exemple, les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont 0 et 2, de multiplicité 2 et 1 respectivement, et l'unique valeur propre de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est 1 de multiplicité 3. Ce n'est cependant pas le cas de toutes les matrices binaires carrées car certaines admettent des valeurs propres strictement négatives. Par exemple, les valeurs propres de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont -1 et 1 , chacune étant de multiplicité 1. Il semble donc légitime de chercher à caractériser les matrices binaires dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Bien que le théorème suivant ne considère pas une telle matrice, sa place est justifiée par le fait qu'il va nous permettre de déduire la caractérisation souhaitée.

Théorème 4.28. *Soit n un naturel non nul et soit A une matrice binaire carrée de dimension n . Supposons que r est un naturel tel que la matrice A possède r valeurs propres strictement positives et $n - r$ valeurs propres nulles et tel que $\text{tr}(A) \leq r$. Alors il existe une matrice de permutation P de dimension n telle que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire inférieure avec r éléments égaux à 1 et $n - r$ éléments nuls sur la diagonale principale. En particulier, on en tire que $\text{tr}(A) = r$ et que les r valeurs propres strictement positives de la matrice A sont égales à 1.*

Démonstration. Notons $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A . Puisque nous savons que la moyenne arithmétique de r nombres est supérieure ou égale à la moyenne géométrique de ces r nombres, on trouve que

$$1 \geq \frac{\text{tr}(A)}{r} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_r}{r} \geq (\lambda_1 \dots \lambda_r)^{\frac{1}{r}}. \quad (34)$$

En utilisant les propositions XI.3.6 et XI.3.11 de [19], on obtient que

$$\sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=r}} \det(A_I) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=r}} \prod_{i \in I} \lambda_i = \lambda_1 \dots \lambda_r > 0, \quad (35)$$

si A_I désigne la sous-matrice principale de A déterminée par les indices dans le sous-ensemble $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Puisque A est une matrice binaire, le membre de gauche de (35) est un entier. On en tire que $\lambda_1 \dots \lambda_r \geq 1$. On déduit alors de (34) que

$$1 \geq \frac{\text{tr}(A)}{r} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_r}{r} \geq (\lambda_1 \dots \lambda_r)^{\frac{1}{r}} \geq 1$$

et donc que

$$1 = \frac{\text{tr}(A)}{r} = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_r}{r} = (\lambda_1 \cdots \lambda_r)^{\frac{1}{r}}.$$

On peut en conclure que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 1$ (ce qui montre que la matrice A possède r valeurs propres égales à 1 et $n-r$ valeurs propres nulles) et que $\text{tr}(A) = r$. Soient A_1, \dots, A_k les composantes irréductibles de la matrice A . Ce sont évidemment des matrices binaires. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, notons r_i le rayon spectral de la matrice A_i . On sait que r_i est égal à 0 ou à 1 et que r_i est une valeur propre simple de la matrice A_i . En effet, si A_i est une matrice de dimension 1, alors elle possède une unique valeur propre, à savoir r_i , qui est simple. Si par contre A_i est une matrice de dimension au moins 2, alors la conclusion découle du théorème A.9 de Perron–Frobenius. Puisque le spectre de la matrice A est égal à l’union des spectres des matrices A_1, \dots, A_k , on sait que r matrices A_i satisfont à $r_i = 1$ et que les $k-r$ autres matrices A_i satisfont à $r_i = 0$. On en tire, d’une part, que $k \geq r$ et, d’autre part, que les $k-r$ matrices A_i telles que $r_i = 0$ sont des matrices nulles de dimension 1. En effet, l’unique valeur propre d’une telle matrice A_i est 0 et elle est de multiplicité 1. De plus, toute matrice A_i satisfaisant à $r_i = 1$ est soit la matrice de dimension 1 qui ne contient qu’un seul élément égal à 1, soit une matrice irréductible de dimension au moins 2. Dans les deux cas, elle possède au moins un élément égal à 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne. De plus, si une ligne ou une colonne d’une telle matrice A_i contient au moins deux éléments égaux à 1, alors le point 5 de la proposition A.10 nous mène à une contradiction. En effet, nous savons dans ce cas que $s_{\max} \geq 2$. Si $s_{\min} = s_{\max}$, alors on sait que $s_{\min} = r_i = s_{\max}$ et on en tire que $r_i \geq 2$, ce qui est impossible. Si par contre $s_{\min} \neq s_{\max}$, alors on sait que $s_{\min} < r_i < s_{\max}$ et comme $s_{\min} \geq 1$, on trouve que $r_i > 1$, ce qui est impossible également. On en tire que toute matrice A_i telle que $r_i = 1$ est une matrice de permutation et, comme toutes ses autres éventuelles valeurs propres doivent être nulles, elle est de dimension 1. Cela découle du fait que le déterminant de toute matrice de permutation vaut 1 ou -1 et est donc non nul. Ainsi, toute matrice A_i satisfaisant à $r_i = 1$ est égale à la matrice identité I_1 . En conclusion, A possède r composantes irréductibles égales à la matrice I_1 et les $k-r$ autres composantes irréductibles de A sont égales à la matrice O_1 . On en tire que $k = n$ et par définition des composantes irréductibles, il existe une matrice de permutation P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire inférieure avec r éléments égaux à 1 et $n-r$ éléments nuls sur la diagonale principale. \square

Exemple 4.29. Considérons la matrice binaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de ses valeurs propres grâce au logiciel Mathematica nous montre que les valeurs propres de cette matrice sont 0 et 1, de multiplicité 1 et 3 respectivement. On a $\text{tr}(A) = 3$. On déduit du théorème 4.28 qu’il existe une matrice de permutation P telle que $P^{-1}AP$

est une matrice triangulaire inférieure avec trois éléments égaux à 1 et un élément nul sur la diagonale principale. Une telle matrice est donnée, par exemple, par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.30. L'hypothèse relative à la trace de la matrice binaire A dans le théorème 4.28 est nécessaire. Considérons, par exemple, la matrice binaire de dimension 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont

$$0, 1, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

On a donc trois valeurs propres strictement positives et une valeur propre nulle. La trace de la matrice A vaut $4 > 3$. Nous pouvons dans ce cas montrer qu'il n'existe aucune matrice de permutation P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire inférieure avec trois éléments égaux à 1 et un élément nul sur la diagonale principale. En effet, si tel est le cas, alors on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

et cette matrice contient au moins sept éléments nuls, ce qui est impossible car la matrice A en contient seulement six.

Comme annoncé précédemment, le théorème 4.28 nous permet d'obtenir une caractérisation des matrices binaires dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Corollaire 4.31. *Pour tout naturel non nul n , les valeurs propres d'une matrice binaire A de dimension n sont toutes strictement positives si et seulement s'il existe une matrice de permutation P de dimension n telle que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.*

Démonstration. Soit n un naturel non nul. Supposons que A est une matrice binaire de dimension n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Puisque la trace d'une matrice binaire de dimension n vaut au plus n , il suffit d'appliquer le théorème 4.28 avec $r = n$. Réciproquement, s'il existe une matrice de permutation P de dimension n telle

que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1, alors le polynôme caractéristique de la matrice $P^{-1}AP$ est donné par

$$\chi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) = (\lambda - 1)^n$$

et l'unique valeur propre de la matrice $P^{-1}AP$ est donc 1 de multiplicité n . Ainsi, l'unique valeur propre de la matrice A est 1 de multiplicité n et les valeurs propres de A sont donc toutes strictement positives. \square

Revenons au problème initial qui consistait à déterminer si certaines matrices de tournoi ont toutes leurs valeurs propres strictement positives. Nous savons que si A est une matrice carrée, alors toute matrice de permutation P est telle que les éléments diagonaux de A coïncident avec les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$. Or, si T est une matrice de tournoi, tous ses éléments diagonaux sont nuls. Ainsi, il ne peut exister aucune matrice de permutation P telle que les éléments diagonaux de $P^{-1}TP$ sont égaux à 1. On déduit alors du corollaire 4.31 que les valeurs propres de la matrice T ne sont pas toutes strictement positives. Ainsi, nous savons qu'aucune matrice de tournoi ne possède que des valeurs propres strictement positives.

Nous concluons cette section par un résultat mettant en bijection les matrices binaires dont toutes les valeurs propres sont strictement positives avec des graphes particuliers. Ce qui suit est dû au mathématicien Eric Weissten qui, au début des années 2000, a compté le nombre de matrices binaires de dimension n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Ses calculs ont mené aux résultats suivants, pour $n \in \{1, \dots, 5\}$:

$$1, 3, 25, 543 \text{ et } 29281.$$

Weissten a alors constaté qu'il s'agissait des cinq premiers termes de la suite qui compte le nombre de graphes orientés possédant n sommets numérotés et ne contenant pas de cycle (un tel graphe est dit *acyclique*). Celle-ci correspond à la suite A003024 disponible dans l'encyclopédie OEIS (voir [24]). Weissten a donc conjecturé que les deux suites sont identiques. Ce résultat s'est avéré être vrai et a pu être démontré mais avant de passer à l'énoncé du théorème et à sa preuve, donnons l'ensemble de ces matrices binaires et de ces graphes pour $n = 1$ (voir figure 21) et pour $n = 2$ (voir figure 22).

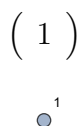


FIGURE 21 – Matrice binaire de dimension 1 dont toutes les valeurs propres sont strictement positives et graphe orienté acyclique possédant un sommet numéroté.

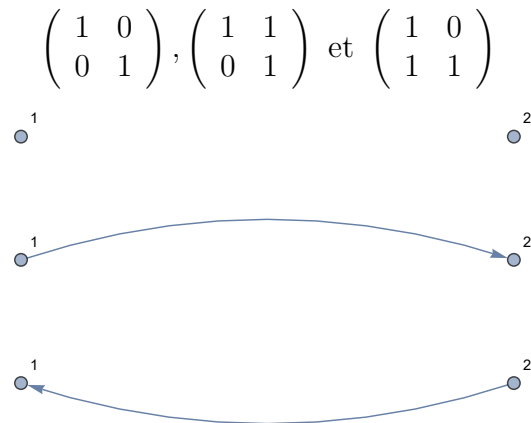


FIGURE 22 – Matrices binaires de dimension 2 dont toutes les valeurs propres sont strictement positives et graphes orientés acycliques possédant deux sommets numérotés.

Théorème 4.32. *Pour tout naturel non nul n , le nombre de graphes orientés possédant n sommets numérotés et ne contenant pas de cycle est égal au nombre de matrices binaires de dimension n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.*

Cette conjecture de Weissten a été prouvée en 2004 par McKay *et al.* dans leur article [14]. C'est de celui-ci que s'inspire la démonstration proposée ci-dessous.

Démonstration. Soit n un naturel non nul. Soit G un graphe orienté possédant n sommets numérotés et ne contenant pas de cycle et soit A sa matrice d'adjacence. Alors A est une matrice binaire de dimension n dont tous les éléments diagonaux sont nuls car si un sommet du graphe G est relié à lui-même par un arc, alors on a une boucle sur ce sommet, c'est-à-dire un cycle de longueur 1, ce qui est impossible. Ainsi, la matrice B de dimension n définie par

$$B = A + I$$

est une matrice binaire. De plus, toutes les valeurs propres de la matrice B sont strictement positives. En effet, les valeurs propres de la matrice B ne changent pas si on réordonne les sommets du graphe G en suivant un ordre partiel qu'il génère (un tel ordre existe car le graphe G est acyclique). Un exemple de cette opération est donné à la figure 23. Or, dans ce cas, la matrice A est triangulaire avec des 0 sur sa diagonale principale et la matrice B est donc triangulaire avec des 1 sur sa diagonale principale. Ainsi, toutes les valeurs propres de la matrice B sont égales à 1 et sont donc strictement positives.

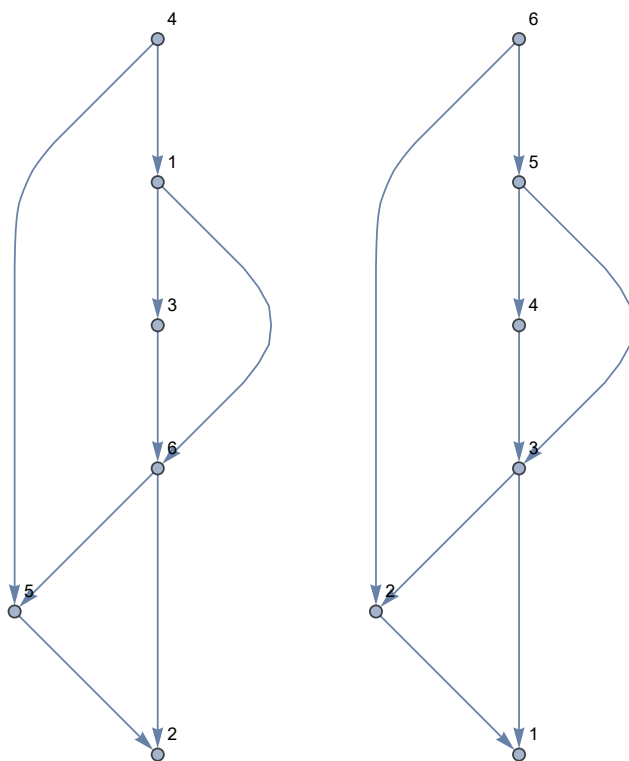


FIGURE 23 – Un graphe orienté acyclique à gauche et une renumérotation possible de ses six sommets, en suivant un ordre partiel généré par le graphe, à droite.

Soit maintenant B une matrice binaire de dimension n dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont strictement positives. Alors on a

$$1 \geq \frac{1}{n} \operatorname{tr}(B) \quad (36)$$

$$= \frac{1}{n} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

$$\geq (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} \quad (37)$$

$$= (\det(B))^{\frac{1}{n}}$$

$$\geq 1, \quad (38)$$

où les inégalités (36), (37) et (38) découlent respectivement du fait que $\operatorname{tr}(B) \leq n$, de l'inégalité arithmético-géométrique et du fait que $\det(B)$ est un entier strictement positif. On en tire que la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique des valeurs propres de la matrice B sont égales. Ainsi, on sait que les n valeurs propres de la matrice B sont égales. De plus, comme on a obtenu que $\operatorname{tr}(B) = n$, on en déduit que $\lambda_i = 1$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. En particulier, tous les éléments diagonaux de la matrice B sont égaux à 1. Soit H un graphe orienté qui possède n sommets numérotés et dont la matrice d'adjacence est B . Ainsi, on sait que H contient une boucle sur chacun de ses sommets. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{tr}(B^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Ainsi, le nombre de chemins fermés de longueur $k \in \mathbb{N}$ dans le graphe H vaut n . Or, on sait qu'on a n chemins fermés de longueur k qui sont obtenus en utilisant uniquement les boucles sur chacun des n sommets du graphe H . Il n'existe donc aucun chemin fermé dans H qui utilise un autre arc que les boucles sur chaque sommet. Posons $A = B - I$. Alors A est une matrice binaire de dimension n qui est la matrice d'adjacence du graphe orienté G défini à partir de H en retirant les boucles sur chacun des n sommets. Ainsi, le graphe G possède n sommets numérotés et ne contient pas de chemin fermé. En particulier, il ne contient pas de cycle. \square

Finalement, on peut déduire quelques corollaires du théorème 4.32.

Corollaire 4.33.

1. Soit A une matrice binaire dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Alors toutes les valeurs propres de la matrice A sont égales à 1. De plus, pour tout naturel non nul n , l'unique matrice binaire symétrique de dimension n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est la matrice identité I_n .
2. Soit A une matrice de dimension n à coefficients entiers telle que $\operatorname{tr}(A) \leq n$. Toutes les valeurs propres de la matrice A sont strictement positives si et seulement si A peut s'écrire sous la forme $I_n + N$, où N est une matrice nilpotente de dimension n .

3. Si un graphe orienté contient un cycle de longueur au moins 2, alors sa matrice d'adjacence possède une valeur propre qui n'est pas strictement positive (c'est-à-dire que celle-ci peut être nulle, strictement négative ou bien strictement complexe).
4. Soit G un graphe orienté d'ordre n et soit k un naturel tel que $k \leq n$. Les valeurs propres du graphe G sont 1 et 0, respectivement de multiplicité k et $n - k$, si et seulement si le graphe G ne contient aucun cycle, à l'exception d'une boucle sur k de ses n sommets.
5. Rappelons que deux matrices carrées A et B de même dimension sont dites équivalentes s'il existe une matrice de permutation P telle que $P^{-1}BP = A$. Le nombre de classes d'équivalence des matrices binaires de dimension n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est égal au nombre de graphes orientés possédant n sommets non numérotés et ne contenant pas de cycle.
6. Soit A une matrice de dimension n à coefficients dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Alors on a $n = 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

1. Le fait que toutes les valeurs propres de la matrice A soient égales à 1 a déjà été montré dans la preuve du théorème 4.32.
Soit n un naturel non nul. La matrice identité I_n est bien une matrice binaire symétrique de dimension n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Supposons que B est une matrice binaire symétrique de dimension n dont toutes les valeurs propres sont strictement positives et qui est différente de la matrice identité. Par la seconde partie de la preuve du théorème 4.32, on sait que $B - I$ est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté acyclique G qui possède n sommets numérotés. Vu la symétrie de la matrice B et comme B n'est pas la matrice identité, il existe deux sommets distincts v_i et v_j tels que le sommet v_i est relié au sommet v_j et le sommet v_j est relié au sommet v_i dans le graphe G . Ce graphe orienté contient donc un cycle de longueur 2, ce qui est absurde. On obtient donc bien l'unicité de la matrice identité I_n pour la propriété voulue.
2. Supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la matrice A sont strictement positives. Comme $\text{tr}(A) \leq n$, en appliquant un raisonnement analogue à celui de la preuve du théorème 4.32, on trouve que toutes les valeurs propres de la matrice A sont égales à 1. De plus, on sait que $\det(A) = 1$ et que $\text{tr}(A) = n$. Ainsi, tous les éléments diagonaux de la matrice A sont égaux à 1. Soit G le multi-graphe orienté d'ordre n dont la matrice d'adjacence est A . On sait alors que G possède une boucle sur chacun de ses n sommets. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Ainsi, le nombre de chemins fermés de longueur $k \in \mathbb{N}$ dans le graphe G vaut n . Comme on peut trouver n chemins fermés de longueur $k \in \mathbb{N}$ grâce aux boucles sur les n sommets, on sait que le graphe G ne contient pas de chemin fermé qui utilise un arc reliant deux sommets distincts. En particulier, le graphe G est acyclique. On peut donc ordonner ses sommets en respectant un ordre partiel qu'il génère. Soit H le multi-graphe obtenu à partir de G grâce à cette opération et en retirant les boucles sur chacun des n sommets. La matrice d'adjacence du graphe H est donc de la forme $P^{-1}(A-I)P$, où P est une matrice de permutation. Il s'agit d'une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont nuls. C'est donc bien une matrice nilpotente. Il suffit finalement de remarquer que si N est une matrice nilpotente, alors PNP^{-1} est également une matrice nilpotente car pour tout naturel k , on a

$$(PNP^{-1})^k = PN^kP^{-1}.$$

Ainsi, puisque $P^{-1}(A-I)P$ est une matrice nilpotente, on déduit de ce qui précède que $A-I$ est une matrice nilpotente. Réciproquement, supposons que A peut s'écrire sous la forme $I+N$, où N est une matrice nilpotente. Nous savons (voir section XI.11 de [19]) que toutes les valeurs propres de la matrice N sont nulles. On en tire que toutes les valeurs propres de la matrice $A = I + N$ sont égales à 1 et sont donc strictement positives.

3. Soit G un graphe orienté. Procédons par contraposition et supposons donc que toutes les valeurs propres de la matrice d'adjacence A du graphe G sont strictement positives. Par la preuve du théorème 4.32, on trouve que les seuls cycles de G sont les boucles sur chacun de ses sommets. Ainsi, le graphe G ne contient pas de cycle de longueur au moins 2.
4. Supposons que les valeurs propres du graphe G sont 1 et 0, respectivement de multiplicité k et $n - k$. Ainsi, la matrice d'adjacence A du graphe G est une matrice binaire dont k éléments diagonaux sont égaux à 1 et $n - k$ sont nuls. Ainsi, le graphe G possède une boucle sur exactement k de ses n sommets. De plus, pour tout naturel l , nous savons que

$$\text{tr}(A^l) = \sum_{i=1}^k 1 + \sum_{i=k+1}^n 0 = k.$$

Comme on peut trouver k chemins fermés de longueur $l \in \mathbb{N}$ dans le graphe G via les k boucles, on sait qu'il n'y a aucun chemin fermé, et donc aucun cycle, dans le graphe G qui emprunte un arc reliant deux sommets distincts, ce qui conclut. Réciproquement, supposons que le graphe G possède exactement k boucles et aucun autre cycle. Réordonnons les sommets en respectant un ordre partiel généré par le graphe G . La matrice d'adjacence de ce nouveau graphe est alors de la forme $P^{-1}AP$, où A est la matrice d'adjacence du graphe G et P est une matrice de permutation. Il s'agit d'une matrice binaire triangulaire qui possède k éléments égaux à 1 et $n - k$ éléments nuls sur la diagonale principale. Ainsi, elle possède k valeurs propres égales à 1 et $n - k$ valeurs propres nulles. Il en va de même pour la matrice A , ce qui conclut.

5. Considérons deux graphes orientés G et H dont les n sommets sont numérotés et dont les matrices d'adjacence sont A et B respectivement. Ils correspondent au même graphe dont les n sommets ne sont pas numérotés si et seulement s'il existe une matrice de permutation P telle que $P^{-1}BP = A$. La conclusion découle alors immédiatement du théorème 4.32.
6. Par un raisonnement analogue à celui de la preuve du théorème 4.32, on sait que toutes les valeurs propres de la matrice A sont égales à 1, que $\det(A) = 1$ et que $\text{tr}(A) = n$. On en déduit que tous les éléments diagonaux de la matrice A sont égaux à 1. En ajoutant ou en soustrayant la première ligne de A à chaque autre ligne, on peut obtenir une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * \\ O_{n-1,1} & C \end{pmatrix},$$

où C est une matrice carrée de dimension $n - 1$ dont les éléments sont égaux à $-2, 0$ ou 2 et qui est telle que

$$\det(C) = \det(B) = \det(A) = 1.$$

Par multilinéarité du déterminant, nous savons qu'il existe une matrice D à coefficients dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ telle que

$$\det(C) = 2^{n-1} \det(D) = 1.$$

Nous savons que le déterminant de la matrice D est un entier non nul. On en tire que 2^{n-1} divise 1 et donc que $n = 1$. Ainsi, puisque tous les éléments diagonaux de la matrice A valent 1, on trouve que

$$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

□

Dans le chapitre qu'il a écrit dans le livre *Combinatorial Mathematics V* (voir [21] pour le détail de ses calculs), Robert Robinson donne une formule de récurrence pour le nombre R_n de graphes orientés possédant n sommets numérotés et ne contenant pas de cycle. On pose $R_0 = 1$ et on a, pour tout naturel $n \geq 1$,

$$R_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} C_n^i 2^{i(n-i)} R_{n-i}.$$

A Théorème de Perron–Frobenius

Cette annexe a pour but de démontrer le théorème de Perron–Frobenius. Celui-ci présente plusieurs applications en théorie des graphes. Il permet notamment de montrer qu’un graphe connexe dont le spectre est symétrique par rapport à 0 est biparti ou encore d’estimer, pour certains graphes, le nombre de chemins de longueur n joignant deux sommets. En suivant ce qui a été fait dans le chapitre 8 du livre [1] de Allouche et Shallit, nous commençons par énoncer et prouver plusieurs résultats intermédiaires qui permettent finalement de démontrer le théorème A.9 de Perron–Frobenius. La proposition A.10 nous apporte quelques informations supplémentaires dans le cadre des matrices carrées strictement positives. Ce résultat provient du chapitre 1 du livre [4] de Richard Anthony Brualdi et est utilisé dans le théorème 4.28 de ce mémoire.

A.1 Rappels

Nous commençons par quelques rappels nécessaires à la compréhension de ce qui suit.

Une matrice carrée positive A est dite *réductible* s’il existe une matrice de permutation P telle que la matrice $P^{-1}AP$ peut s’écrire sous la forme

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} C & O \\ * & D \end{pmatrix},$$

où C et D sont des matrices carrées et O est une matrice rectangulaire nulle. Si ce n’est pas le cas, alors la matrice A est dite *irréductible*. Une matrice carrée positive A est dite *primitive* s’il existe un naturel $k \geq 1$ tel que tous les éléments de la matrice A^k sont strictement positifs.

Soit A une matrice de dimension n . Son *polynôme caractéristique* est le polynôme χ_A défini par

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Rappelons que l’ensemble

$$Z = \{p \in \mathbb{C}[z] : p(A) = 0\}$$

est un idéal propre de l’anneau principal $\mathbb{C}[z]$. Il existe donc un polynôme unitaire \mathcal{M}_A tel que $Z = \langle \mathcal{M}_A \rangle$. Ce polynôme \mathcal{M}_A est appelé le *polynôme minimum* de la matrice A .

Les résultats suivants sont bien connus en algèbre linéaire et peuvent être retrouvés dans le chapitre XI des notes de cours [19].

Proposition A.1. *Soit A une matrice à coefficients complexes de dimension n . Alors on a les résultats suivants :*

1. *Le nombre complexe λ_0 est une valeur propre de la matrice A si et seulement si $\chi_A(\lambda_0) = 0$;*
2. *On a $\chi_A(A) = 0$ (c’est le théorème de Cayley–Hamilton) ;*
3. *Le polynôme minimum \mathcal{M}_A divise le polynôme caractéristique χ_A . De plus, tout zéro de χ_A est un zéro de \mathcal{M}_A ;*

Définition A.2. Soit A une matrice de dimension n . On définit la *matrice adjointe* $\text{adj}(A)$ de A comme étant la transposée de la matrice de dimension n dont l'élément à la position (i, j) est égal au produit de $(-1)^{i+j}$ et du déterminant de la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Selon la terminologie de certains auteurs, la matrice adjointe de A est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs de A . On sait (voir chapitre V de [19]) que pour toute matrice A de dimension n , on a

$$A \text{adj}(A) = \text{adj}(A) A = \det(A) I_n. \quad (39)$$

A.2 Théorème de Perron–Frobenius

Nous allons dans cette section démontrer le théorème de Perron–Frobenius.

Définition A.3. Soit A une matrice de dimension n . Soit $g_A(\lambda)$ le plus grand commun diviseur unitaire de tous les éléments polynomiaux de la matrice $\text{adj}(\lambda I - A)$. L'*adjoint réduit* de $\lambda I - A$ est la matrice

$$C_A(\lambda) = \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{g_A(\lambda)}$$

dont les entrées sont des polynômes en λ .

Lemme A.4. Soit A une matrice de dimension n à coefficients complexes et soit

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_d \lambda^d$$

un polynôme à coefficients complexes de degré d . Alors on a $p(A) = 0$ si et seulement s'il existe une matrice $B_A(\lambda)$ de dimension n , dont les éléments sont des polynômes de degré au plus $d - 1$ en λ , telle que

$$(\lambda I - A) B_A(\lambda) = p(\lambda) I.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'une matrice $B_A(\lambda)$ de dimension n dont les éléments sont des polynômes de degré au plus $d - 1$ en λ peut s'écrire sous la forme

$$B_A(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots + \lambda^{d-1} B_{d-1},$$

où B_0, \dots, B_{d-1} sont des matrices de dimension n dont les entrées sont des complexes. Ainsi, l'existence d'une telle matrice $B_A(\lambda)$ telle que

$$(\lambda I - A) B_A(\lambda) = p(\lambda) I$$

est équivalente à l'existence de matrices B_0, \dots, B_{d-1} de dimension n à coefficients complexes telles que

$$(\lambda I - A)(B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \dots + \lambda^{d-1} B_{d-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_d \lambda^d) I,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
-AB_0 &= \alpha_0 I; \\
B_0 - AB_1 &= \alpha_1 I; \\
B_1 - AB_2 &= \alpha_2 I; \\
&\vdots \\
B_{d-2} - AB_{d-1} &= \alpha_{d-1} I; \\
B_{d-1} &= \alpha_d I.
\end{aligned}$$

En partant de la dernière égalité et en remontant jusqu'à la deuxième, on trouve successivement que

$$\begin{aligned}
B_{d-1} &= \alpha_d I; \\
B_{d-2} &= \alpha_d A + \alpha_{d-1} I; \\
&\vdots \\
B_1 &= \alpha_d A^{d-2} + \alpha_{d-1} A^{d-3} + \cdots + \alpha_2 I; \\
B_0 &= \alpha_d A^{d-1} + \alpha_{d-1} A^{d-2} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 I.
\end{aligned}$$

Finalement, la première égalité est satisfaite si et seulement si on a

$$\alpha_0 I = -AB_0 = -\alpha_d A^d - \alpha_{d-1} A^{d-1} - \cdots - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A,$$

ce qui est équivalent à $p(A) = 0$. □

Proposition A.5. *Soit A une matrice à coefficients complexes de dimension n . Alors on a les résultats suivants :*

1. On a

- $\mathcal{M}_A(\lambda) = \frac{\chi_A(\lambda)}{g_A(\lambda)}$;
- $\frac{C_A(\lambda)}{\mathcal{M}_A(\lambda)} = \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{\chi_A(\lambda)}$;
- $(\lambda I - A)C_A(\lambda) = C_A(\lambda)(\lambda I - A) = \mathcal{M}_A(\lambda)I$;

2. Si χ'_A désigne la dérivée du polynôme χ_A , alors on a $\chi'_A(\lambda) = \text{tr}(\text{adj}(\lambda I - A))$.

Démonstration.

1. Nous savons que

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\det(\lambda I - A)I)_{1,1}.$$

Or, grâce à l'égalité (39), il est clair que $(\det(\lambda I - A)I)_{1,1}$ est égal au produit matriciel de la première ligne de $\lambda I - A$ par la première colonne de $\text{adj}(\lambda I - A)$. Il s'agit donc d'une combinaison linéaire d'éléments de $\text{adj}(\lambda I - A)$. Ainsi, puisque tous ces éléments sont divisibles par g_A , on en déduit que le polynôme g_A divise le polynôme χ_A . Soit donc le polynôme p_A défini par

$$p_A(\lambda) = \frac{\chi_A(\lambda)}{g_A(\lambda)}.$$

Au vu de l'égalité (39) appliquée à la matrice $\lambda I - A$, on trouve que

$$(\lambda I - A) \operatorname{adj}(\lambda I - A) = \operatorname{adj}(\lambda I - A)(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A) I = \chi_A(\lambda) I. \quad (40)$$

En divisant ces égalités (40) par le polynôme g_A , on obtient

$$(\lambda I - A) C_A(\lambda) = C_A(\lambda)(\lambda I - A) = p_A(\lambda) I. \quad (41)$$

Le lemme A.4 implique alors que $p_A(A) = 0$. De plus, en effectuant la division euclidienne de p_A par \mathcal{M}_A , on obtient

$$p_A(\lambda) = q_A(\lambda) \mathcal{M}_A(\lambda) + r_A(\lambda),$$

avec $\deg(r_A) < \deg(\mathcal{M}_A)$. En évaluant l'égalité ci-dessus en A et en utilisant la définition du polynôme minimum de A , on trouve que $0 = 0 + r_A(A)$. Si r_A n'est pas le polynôme nul, alors le fait que $r_A(A) = 0$ et que $\deg(r_A) < \deg(\mathcal{M}_A)$ contredit la minimalité du polynôme \mathcal{M}_A . On en déduit que r_A est le polynôme nul et donc que $p_A(\lambda) = \mathcal{M}_A(\lambda) q_A(\lambda)$. En injectant ceci dans les égalités (41), on trouve que

$$(\lambda I - A) C_A(\lambda) = C_A(\lambda)(\lambda I - A) = \mathcal{M}_A(\lambda) q_A(\lambda) I.$$

De plus, puisque $\mathcal{M}_A(A) = 0$ par définition du polynôme minimum, le lemme A.4 assure l'existence d'une matrice $B_A(\lambda)$ de dimension n , dont les éléments sont des polynômes en λ , telle que $(\lambda I - A) B_A(\lambda) = \mathcal{M}_A(\lambda) I$. Ainsi, pour tout réel λ suffisamment grand, on a

$$\frac{B_A(\lambda)}{\mathcal{M}_A(\lambda)} = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{C_A(\lambda)}{\mathcal{M}_A(\lambda) q_A(\lambda)},$$

et donc

$$q_A(\lambda) B_A(\lambda) = C_A(\lambda).$$

En particulier, q_A doit être un polynôme constant car le plus grand commun diviseur des éléments polynomiaux de la matrice $C_A(\lambda)$ vaut 1. De plus, puisque les polynômes χ_A , \mathcal{M}_A et g_A sont unitaires, on déduit des égalités

$$p_A(\lambda) = \frac{\chi_A(\lambda)}{g_A(\lambda)} \text{ et } p_A(\lambda) = \mathcal{M}_A(\lambda) q_A(\lambda)$$

que le polynôme q_A est unitaire également. On trouve finalement que $q_A(\lambda) = 1$ et on en déduit que $p_A = \mathcal{M}_A$ et donc que

$$(\lambda I - A) C_A(\lambda) = C_A(\lambda) (\lambda I - A) = \mathcal{M}_A(\lambda) I,$$

$$\mathcal{M}_A(\lambda) = \frac{\chi_A(\lambda)}{g_A(\lambda)}$$

et

$$\frac{C_A(\lambda)}{\mathcal{M}_A(\lambda)} = \frac{\operatorname{adj}(\lambda I - A)}{g_A(\lambda) \mathcal{M}_A(\lambda)} = \frac{\operatorname{adj}(\lambda I - A)}{\chi_A(\lambda)}.$$

2. Le résultat est immédiat lorsque A est une matrice diagonale. En effet, supposons que $A = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Alors on a

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \gamma_1) \cdots (\lambda - \gamma_n)$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{adj}(\lambda I - A)) &= \text{tr}(\text{adj}(\text{diag}(\lambda - \gamma_1, \dots, \lambda - \gamma_n))) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda - \gamma_1) \cdots \widehat{(\lambda - \gamma_i)} \cdots (\lambda - \gamma_n) \\ &= \chi'_A(\lambda). \end{aligned}$$

Supposons ensuite que A est une matrice diagonalisable. On sait donc qu'il existe une matrice inversible S telle que $A = S\Delta S^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale. Soit λ un réel suffisamment grand. Alors on a

$$(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - S\Delta S^{-1})^{-1} = (S(\lambda I - \Delta)S^{-1})^{-1} = S(\lambda I - \Delta)^{-1}S^{-1}.$$

En multipliant ces égalités par le déterminant de la matrice $\lambda I - A$, qui est aussi le déterminant de la matrice $\lambda I - \Delta$, on obtient grâce aux égalités (39) que

$$\text{adj}(\lambda I - A) = S \text{adj}(\lambda I - \Delta) S^{-1}$$

et donc que

$$\chi'_A(\lambda) = \chi'_\Delta(\lambda) = \text{tr}(\text{adj}(\lambda I - \Delta)) = \text{tr}(\text{adj}(\lambda I - A)).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'ensemble des matrices et que la trace, l'adjoint et le déterminant sont des fonctions continues en les éléments d'une matrice. □

Proposition A.6. *Soit n un naturel tel que $n \geq 2$. Alors on a les résultats suivants :*

1. *Soit A une matrice positive et irréductible de dimension n et soit x un vecteur positif de dimension $n \times 1$. S'il existe un naturel $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que le vecteur x contient exactement k éléments strictement positifs, alors le vecteur $(I+A)x$ contient strictement plus que k entrées strictement positives ;*
2. *Si A est une matrice positive et irréductible de dimension n et si x est un vecteur positif et non nul de dimension $n \times 1$, alors toutes les entrées du vecteur $(I+A)^{n-1}x$ sont strictement positives ;*
3. *Une matrice positive A de dimension n est irréductible si et seulement si toutes les entrées de la matrice $(I+A)^{n-1}$ sont strictement positives ;*
4. *Un vecteur propre positif et non nul d'une matrice positive irréductible a toutes ses entrées strictement positives ;*

5. Soit A une matrice positive de dimension n . La matrice A est irréductible si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un naturel non nul k tel que $A_{i,j}^{(k)} > 0$, où $A_{i,j}^{(k)}$ représente l'élément à la position (i, j) de la matrice A^k ⁸. Dans ce cas, nous savons en plus que $k \leq n$.

En particulier, toute matrice primitive est irréductible.

Démonstration.

1. Soit P une matrice de permutation de dimension n telle que les k premières composantes du vecteur Px sont strictement positives et les $n - k$ suivantes sont nulles. On a

$$(I + A)x = x + Ax. \quad (42)$$

Comme $A \geq 0$, on en déduit que $(I + A)x$ ne peut pas avoir strictement plus que $n - k$ éléments nuls. De plus, si le vecteur $(I + A)x$ possède exactement $n - k$ éléments nuls, alors on sait, par l'égalité (42), que si $i \in \{1, \dots, n\}$ est tel que $x_i = 0$, alors on a $(Ax)_i = 0$. On en tire que si $i \in \{1, \dots, n\}$ est tel que $(Px)_i = 0$, alors on a $(PAx)_i = 0$. En effet, supposons que $(Px)_i = 0$ et que $\sigma(j) = i$, où σ est la permutation associée à la matrice de permutation P . Ainsi, nous savons que $x_j = 0$. Vu ce qui précède, on a $(Ax)_j = 0$ et donc $(PAx)_i = (Ax)_j = 0$. Il s'ensuit que $(PAx)_i = 0$ pour tout $i \in \{k + 1, \dots, n\}$. Posons B la matrice positive définie par

$$B = PAP^{-1}$$

et définissons le vecteur $y = Px$. Ainsi, pour tout $i \in \{k + 1, \dots, n\}$, on a

$$(By)_i = (PAx)_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n B_{i,j}y_j = 0.$$

Puisque $B \geq 0$ et que $y_j > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on en tire que $B_{i,j} = 0$ pour tout $i \in \{k + 1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, k\}$. Ainsi, la matrice A est réductible, ce qui est absurde. On en tire que le vecteur $(I + A)x$ contient strictement moins de $n - k$ éléments nuls, c'est-à-dire qu'il contient strictement plus de k éléments strictement positifs.

2. Il suffit d'itérer le point 1.
 3. Si la matrice positive A de dimension n est irréductible, alors pour tout vecteur e_j de la base canonique de \mathbb{R}^n , on trouve, en utilisant le point 2, que

$$(I + A)^{n-1}e_j > 0.$$

8. L'utilisation de parenthèses autour de l'exposant k vise à ne pas confondre $A_{i,j}^{(k)}$ avec $A_{i,j}^k$ qui est égal à la k^{e} puissance de l'élément à la position (i, j) de la matrice A . En fait, on a $A_{i,j}^{(k)} = (A^k)_{i,j}$.

Ainsi, toutes les colonnes de la matrice $(I + A)^{n-1}$ sont strictement positives et toutes ses entrées sont donc strictement positives. Réciproquement, supposons que toutes les entrées de la matrice $(I + A)^{n-1}$ sont strictement positives. Par définition, la matrice $(I + A)^{n-1}$ est donc irréductible. Or, si une matrice positive B est telle qu'il existe un naturel non nul k pour lequel B^k est une matrice irréductible, alors la matrice B est également irréductible. En effet, procédons par contraposition et supposons donc que B est une matrice réductible. Alors il existe une matrice de permutation P telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} C & O \\ * & D \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on trouve que

$$P^{-1}B^kP = (P^{-1}BP)^k = \begin{pmatrix} C^k & O \\ * & D^k \end{pmatrix}$$

et B^k est donc une matrice réductible.

De plus, une matrice positive B est irréductible si et seulement si la matrice $I + B$ est irréductible. En effet, soit B une matrice positive carrée. Alors on sait que la matrice B est réductible si et seulement s'il existe une matrice de permutation P telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} C & O \\ * & D \end{pmatrix}.$$

Or, l'existence d'une telle matrice P est équivalente à l'existence d'une matrice de permutation Q telle que

$$Q^{-1}(I + B)Q = \begin{pmatrix} C' & O \\ * & D' \end{pmatrix}.$$

Enfin, par définition, une telle matrice Q existe si et seulement si la matrice $I + B$ est réductible. Puisque la matrice $(I + A)^{n-1}$ est irréductible et que $n - 1$ est un naturel non nul, on en déduit que $I + A$ est une matrice irréductible et donc que A est une matrice irréductible.

4. Soit A une matrice positive irréductible et soit λ_0 une valeur propre de A . Supposons que x est un vecteur propre positif et non nul de la matrice A associé à la valeur propre λ_0 et supposons que x possède $k \geq 1$ entrées nulles. Par le point 1, on sait alors que le vecteur $(I + A)x$ doit avoir strictement moins de k entrées nulles. Supposons que $\lambda_0 \neq -1$. Comme

$$(I + A)x = (1 + \lambda_0)x,$$

avec $1 + \lambda_0 \neq 0$, le vecteur $(I + A)x$ doit avoir k entrées nulles, ce qui est absurde. Si par contre $\lambda_0 = -1$, alors on trouve que

$$(I + A)x = 0$$

et puisque A est une matrice positive, on en déduit que $x = 0$, ce qui est absurde également. Ainsi, toutes les entrées du vecteur x sont strictement positives.

5. Supposons que A est une matrice irréductible. Par le point 3, on sait que toutes les entrées de la matrice $(I + A)^{n-1}$ sont strictement positives. Ainsi, toutes les entrées de la matrice $A(I + A)^{n-1}$ sont strictement positives également. En effet, comme A est une matrice positive, tous les éléments de $A(I + A)^{n-1}$ sont positifs. De plus, si un élément de cette matrice est égal à 0, alors cela implique qu'une ligne de la matrice A est nulle et A n'est donc pas irréductible. Il suffit maintenant de considérer l'élément strictement positif à la position (i, j) de la matrice

$$A(I + A)^{n-1} = A \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A^k = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} A^k$$

pour conclure qu'il existe un naturel non nul $k \leq n$ tel que $A_{i,j}^{(k)} > 0$. Réciproquement, procédons par contraposition et supposons que la matrice A n'est pas irréductible. Alors il existe une matrice de permutation P de dimension n telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} C & O \\ * & D \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout naturel k , on a

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} C^k & O \\ * & D^k \end{pmatrix}.$$

En particulier, l'élément dans le coin supérieur droit de la matrice $P^{-1}A^kP$ est nul, pour tout naturel k . Or, il existe des indices $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indépendants de k tels que cet élément en haut à droite de la matrice $P^{-1}A^kP$ correspond à $A_{i,j}^{(k)}$.

De plus, si A est une matrice primitive, alors il existe un naturel non nul k tel que tous les éléments de la matrice A^k sont strictement positifs. Ainsi, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un naturel non nul k tel que $A_{i,j}^{(k)} > 0$ et la matrice A est donc irréductible. □

Définition A.7. Soit A une matrice positive et irréductible de dimension n . La *fonction de Collatz–Wielandt* de la matrice A est la fonction f_A définie pour tout vecteur positif et non nul x de dimension $n \times 1$ par

$$f_A(x) = \min_{\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Pour tout naturel non nul n , notons X_n l'ensemble des vecteurs positifs de dimension $n \times 1$ dont la somme des éléments vaut 1.

Proposition A.8. Soit A une matrice positive et irréductible de dimension $n \geq 2$ et soit f_A sa fonction de Collatz–Wielandt. Alors on a les résultats suivants :

1. La fonction f_A est telle que $f_A(tx) = f_A(x)$, pour tout réel $t > 0$ et tout vecteur x positif et non nul de dimension $n \times 1$;
2. Soit x un vecteur positif et non nul de dimension $n \times 1$. Alors $f_A(x)$ est le plus grand nombre réel ρ tel que le vecteur $(A - \rho I)x$ a toutes ses entrées positives ;
3. Soit x un vecteur positif et non nul de dimension $n \times 1$ et soit $y = (I + A)^{n-1}x$. Alors on a $f_A(y) \geq f_A(x)$;
4. Il existe un vecteur $y \in X_n$ tel que, pour tout vecteur $x \in X_n$, on a

$$f_A(y) \geq f_A(x).$$

Démonstration.

1. Soit x un vecteur positif et non nul de dimension $n \times 1$ et soit t un réel strictement positif. Alors on a

$$\begin{aligned} f_A(tx) &= \min_{\{i \in \{1, \dots, n\} : (tx)_i \neq 0\}} \frac{(A(tx))_i}{(tx)_i} \\ &= \min_{\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}} \frac{t(Ax)_i}{tx_i} \\ &= \min_{\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}} \frac{(Ax)_i}{x_i} \\ &= f_A(x). \end{aligned}$$

2. Le vecteur

$$(A - f_A(x)I)x = Ax - f_A(x)x$$

a toutes ses entrées positives. En effet, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la i^{e} composante de ce vecteur est donnée par

$$\begin{cases} (Ax)_i - f_A(x)x_i = (Ax)_i & \text{si } x_i = 0 \\ (Ax)_i - f_A(x)x_i \geq (Ax)_i - \frac{(Ax)_i}{x_i}x_i = 0 & \text{si } x_i \neq 0 \end{cases}.$$

Or, puisque A est une matrice positive et que x est un vecteur positif, on sait que $(Ax)_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, ce qui conclut. De plus, soit ρ un réel tel que le vecteur $(A - \rho I)x$ a toutes ses entrées positives. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq 0$ (il existe au moins un tel indice i car x est un vecteur non nul), on a

$$(Ax)_i - \rho x_i \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(Ax)_i}{x_i} \geq \rho$$

car x est un vecteur positif. On en déduit que

$$\rho \leq \min_{\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq 0\}} \frac{(Ax)_i}{x_i} = f_A(x).$$

3. Vu le point 2, on sait que tous les éléments du vecteur $Ax - f_A(x)x$ sont positifs. En multipliant (à gauche) ce vecteur par la matrice $(I + A)^{n-1}$, on trouve que tous les éléments du vecteur

$$(I + A)^{n-1}(Ax - f_A(x)x) = (I + A)^{n-1}Ax - f_A(x)(I + A)^{n-1}x$$

sont positifs car A est une matrice positive. Or, les matrices A et

$$(I + A)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j A^j$$

commutent car deux puissances d'une même matrice commutent. Ainsi, tous les éléments du vecteur

$$A(I + A)^{n-1}x - f_A(x)(I + A)^{n-1}x$$

sont positifs, c'est-à-dire que tous les éléments du vecteur $Ay - f_A(x)y$ sont positifs. Comme y est un vecteur positif et non nul de dimension $n \times 1$, on utilise à nouveau le point 2 et on obtient que $f_A(y) \geq f_A(x)$.

4. Il est clair que la fonction f_A est continue sur l'ensemble X_n . Or cet ensemble X_n est compact. En effet, la fonction

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow x_1 + \dots + x_n$$

est continue. Comme $\{1\}$ est un fermé de \mathbb{R} , on en déduit que $f^{-1}(\{1\})$ est un fermé de \mathbb{R}^n . Or, on peut écrire que

$$X_n = f^{-1}(\{1\}) \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\} \right).$$

Puisque $[0, +\infty[$ est un fermé de \mathbb{R} et que la projection sur la i^e composante

$$p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow x_i$$

est une fonction continue pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on sait que

$$\{(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$$

est un fermé de \mathbb{R}^n . On en déduit que X_n est un ensemble fermé car c'est l'intersection de plusieurs ensembles fermés. De plus, X_n est borné car $X_n \subseteq \mathcal{B}(0, 1)$. En effet, si $(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \in X_n$, alors on a

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (x_1 + \dots + x_n)^2 = 1.$$

La conclusion découle donc du fait que la fonction f_A est continue sur le compact X_n .

□

Nous pouvons enfin prouver le célèbre théorème de Perron–Frobenius.

Proposition A.9. *Soit A une matrice positive et irréductible de dimension $n \geq 2$. Grâce au point 4 de la proposition A.8, nous pouvons poser*

$$r = \max\{f_A(x) : x \in X_n\}.$$

Alors on a les résultats suivants :

1. *Le nombre r est une valeur propre strictement positive de la matrice A telle que toute valeur propre complexe λ_0 de A vérifie l'inégalité $|\lambda_0| \leq r$. Ainsi, il existe une valeur propre réelle et strictement positive de la matrice A qui est égale à son rayon spectral et celle-ci est appelée valeur propre de Perron de A ;*
2. *Il existe un vecteur propre de la matrice A , associé à la valeur propre r , qui est strictement positif et tel que tout vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre r est un multiple réel de ce vecteur. En outre, tout vecteur $x \in X_n$ pour lequel $f_A(x) = r$ est un vecteur propre de la matrice A , associé à la valeur propre r , qui est strictement positif ;*
3. *La valeur propre r de la matrice A est simple (c'est-à-dire que sa multiplicité algébrique vaut 1).*

Démonstration.

1. On sait, par le point 4 de la proposition A.8, qu'il existe un vecteur $y \in X_n$ tel que, pour tout vecteur $x \in X_n$, on a

$$f_A(y) \geq f_A(x).$$

Alors on a $r = f_A(y)$. Soit u le vecteur de dimension $n \times 1$ dont tous les éléments sont égaux à $\frac{1}{n}$. Puisque $u \in X_n$, on trouve que

$$r \geq f_A(u) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{(Au)_i}{u_i} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n A_{i,j} > 0$$

car la matrice A étant irréductible, elle ne peut pas contenir une ligne nulle. On vient donc de montrer que r est un réel strictement positif. De plus, le point 2 de la proposition A.8 implique que $Ay - ry = Ay - f_A(y)y$ est un vecteur dont tous les éléments sont positifs. Supposons que $Ay - ry$ n'est pas le vecteur nul. Alors le point 2 de la proposition A.6 implique que le vecteur

$$(I + A)^{n-1}(Ay - ry)$$

a tous ses éléments qui sont strictement positifs. Définissons le vecteur positif

$$z = (I + A)^{n-1}y.$$

En appliquant un raisonnement identique à celui de la preuve du point 3 de la proposition A.8, on trouve que $Az - rz$ est un vecteur dont toutes les entrées sont strictement positives. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le vecteur $Az - (r + \varepsilon)z$ a tous ses éléments qui sont positifs. Par le point 2 de la proposition A.8, on trouve alors que $f_A(z) \geq r + \varepsilon$. On en tire que $f_A(z) > r$ et comme

$$f_A(z) = f_A\left(\frac{z}{|z|}\right),$$

cela contredit la maximalité de r . Il en découle que $Ay - ry = 0$. Ainsi, r est bien une valeur propre de la matrice A et y est un vecteur propre positif et non nul de la matrice A associé à la valeur propre r . Par le point 4 de la proposition A.6, on sait donc que y doit avoir tous ses éléments qui sont strictement positifs.

Soit λ_0 une valeur propre de la matrice A . Alors il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda_0 x$. Cela implique que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\lambda_0 x_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j.$$

Ainsi, on déduit du fait que la matrice A est positive que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$|\lambda_0| |x_i| \leq \sum_{j=1}^n A_{i,j} |x_j|.$$

Autrement dit, si on note x' le vecteur positif de dimension $n \times 1$ dont la i^e entrée est $|x_i|$, alors le vecteur $Ax' - |\lambda_0|x'$ a tous ses éléments positifs et on en tire, par le point 2 de la proposition A.8, que

$$|\lambda_0| \leq f_A(x') = f_A\left(\frac{x'}{|x'|}\right) \leq r. \quad (43)$$

2. On a déjà montré dans le point 1 qu'il existe un vecteur propre de la matrice A , associé à la valeur propre r , qui est strictement positif. On sait également que tout vecteur $x \in X_n$ pour lequel $f_A(x) = r$ est un vecteur propre de la matrice A , associé à la valeur propre r , qui est strictement positif.

Montrons maintenant que le sous-espace propre associé à la valeur propre r est de dimension 1. Soit y le vecteur du point 1 et soit x un vecteur propre non nul de la matrice A associé à la valeur propre r . Notons x' le vecteur dont chaque entrée est égale au module de l'entrée correspondante dans le vecteur x . Les inégalités (43) impliquent alors que

$$f_A(x') = r.$$

On déduit alors du point 2 de la proposition A.8 que $Ax' - rx'$ est un vecteur positif. De plus, comme x n'est pas le vecteur nul, on sait que x' n'est pas le vecteur nul non plus. Ainsi, comme dans la preuve du point 1, le vecteur $Ax' - rx'$ est nul et x' a

tous ses éléments qui sont strictement positifs. Par conséquent, tous les éléments du vecteur x sont non nuls. On en tire que tous les éléments de tout vecteur propre non nul de la matrice A , associé à la valeur propre r , sont non nuls. De plus, le vecteur $y_1x - x_1y$ est soit égal au vecteur nul, soit un vecteur propre non nul de la matrice A associé à la valeur propre r . Or, son premier élément est nul et vu ce qui précède, il ne peut donc pas être un vecteur propre non nul de la matrice A associé à la valeur propre r . On en déduit que $y_1x - x_1y = 0$ et les vecteurs y et x sont donc linéairement dépendants (c'est-à-dire que le vecteur x est un multiple du vecteur y).

3. Il suffit de montrer que $\chi'_A(r) \neq 0$. Par le point 2 de la proposition A.5, on sait que

$$\chi'_A(r) = \text{tr}(\text{adj}(rI - A)).$$

Posons

$$B_A(\lambda) = \text{adj}(\lambda I - A).$$

Grâce à l'égalité (39), on a

$$(\lambda I - A) B_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) I = \chi_A(\lambda) I$$

et donc $(rI - A) B_A(r) = \chi_A(r) I = 0$. Ainsi, toute colonne de la matrice $B_A(r)$ est soit nulle, soit un vecteur propre non nul de la matrice A associé à la valeur propre r (et est donc, vu le point 2, un multiple réel d'un vecteur strictement positif). Ainsi, toute colonne de la matrice $B_A(r)$ est nulle, strictement positive ou strictement négative. Puisque \tilde{A} est également une matrice irréductible et que sa valeur propre de Perron est r , on sait, par un raisonnement analogue, que toute ligne de la matrice $B_A(r)$ est nulle, strictement positive ou strictement négative. De plus, vu le point 2, on sait que le sous-espace propre de la matrice A associé à la valeur propre r est de dimension 1. La matrice $rI - A$ est donc de rang $n - 1$ et il existe une sous-matrice de $rI - A$ de dimension $n - 1$ de déterminant non nul. Or, à un facteur -1 près, les entrées de la matrice $B_A(r)$ sont exactement les déterminants des sous-matrices de $rI - A$ de dimension $n - 1$. On en déduit qu'il existe un élément non nul dans la matrice $B_A(r)$. Au vu de ce qui précède, la colonne contenant cet élément est strictement positive ou strictement négative. Supposons que cette colonne soit strictement positive (respectivement strictement négative). Puisque les lignes de la matrice $B_A(r)$ sont nulles, strictement positives ou strictement négatives, on en déduit que toutes les lignes de la matrice $B_A(r)$ sont strictement positives (respectivement strictement négatives). Les entrées de la matrice $B_A(r)$ sont donc toutes strictement positives (respectivement strictement négatives) et on trouve alors que

$$\chi'_A(r) = \text{tr}(B_A(r)) > 0 \text{ (respectivement } \chi'_A(r) = \text{tr}(B_A(r)) < 0).$$

Dans tous les cas, on a bien montré que $\chi'_A(r) \neq 0$.

□

Nous savons, vu le point 5 de la proposition A.6, que toute matrice strictement positive est irréductible. Nous pouvons donc appliquer la théorie de Perron–Frobenius à toute matrice strictement positive. La proposition A.10 se base sur ce constat et nous donne quelques résultats additionnels, à condition de travailler avec cette hypothèse supplémentaire.

Proposition A.10. *Soit A une matrice strictement positive de dimension $n \geq 2$ et soit r sa valeur propre de Perron. Alors on a les résultats suivants :*

1. *La valeur propre r est l'unique valeur propre de la matrice A qui possède un vecteur propre strictement positif;*
2. *Si x est un vecteur strictement positif et si α est un réel tel que*

$$Ax \leq \alpha x$$

et le vecteur Ax n'est pas égal au vecteur αx , alors on a $r < \alpha$;

3. *Si x est un vecteur strictement positif et si α est un réel tel que*

$$Ax \geq \alpha x$$

et le vecteur Ax n'est pas égal au vecteur αx , alors on a $r > \alpha$;

4. *Si B est une matrice de dimension n différente de la matrice A et telle que $B \geq A$, alors on a $r_B > r$, où r_B désigne la valeur propre de Perron de la matrice B ;*
5. *Soient s_{\min} la plus petite somme par ligne de la matrice A et s_{\max} la plus grande somme par ligne de la matrice A . Alors on a*

$$s_{\min} \leq r \leq s_{\max},$$

avec l'égalité des deux côtés si et seulement si $s_{\min} = s_{\max}$.

Démonstration.

1. Soit y un vecteur propre strictement positif de la matrice \tilde{A} associé à la valeur propre r . L'existence d'un tel vecteur découle du théorème de Perron–Frobenius et du fait que les valeurs propres de la matrice \tilde{A} coïncident avec les valeurs propres de la matrice A . Alors on a

$$\tilde{A}y = ry \Leftrightarrow \tilde{y}A = r\tilde{y},$$

ou autrement dit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^n y_j A_{j,i} = r y_i.$$

Soit x un vecteur strictement positif. Définissons, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le réel

$$\mu_i = \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j.$$

Alors on obtient que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\mu_i - r) x_i y_i &= \sum_{i=1}^n (\mu_i x_i) y_i - \sum_{i=1}^n (r y_i) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j} x_j \right) y_i - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j A_{j,i} \right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A_{i,j} x_j y_i - A_{j,i} x_i y_j) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Supposons que x est un vecteur propre strictement positif de la matrice A associé à la valeur propre μ . On en déduit que $\mu_i = \mu$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On obtient alors que

$$\sum_{i=1}^n (\mu - r) x_i y_i = 0.$$

Comme $x_i y_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on trouve finalement que $\mu = r$.

2. Reprenons les notations de la preuve du point 1. Soit α un réel tel que

$$Ax \leq \alpha x$$

et le vecteur Ax n'est pas égal au vecteur αx . Si tous les μ_i ne sont pas égaux entre eux, alors les égalités (44) montrent que

$$r < \max\{\mu_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

Or, on sait que $\alpha \geq \max\{\mu_i : 1 \leq i \leq n\}$. En effet, si $\alpha < \max\{\mu_i : 1 \leq i \leq n\} = \mu_{i_0}$, alors on a

$$\begin{aligned}
(Ax)_{i_0} &= \sum_{j=1}^n A_{i_0,j} x_j \\
&= \mu_{i_0} x_{i_0} \\
&> \alpha x_{i_0} \\
&= (\alpha x)_{i_0},
\end{aligned}$$

ce qui est absurde.

3. On applique un raisonnement analogue à celui de la preuve du point 2, en sachant que si tous les μ_i ne sont pas égaux entre eux, alors les égalités (44) montrent que

$$\min\{\mu_i : 1 \leq i \leq n\} < r.$$

4. Soit B une matrice de dimension n différente de la matrice A et telle que $B \geq A$ et soit r_B sa valeur propre de Perron. Soit aussi x un vecteur propre strictement positif de la matrice A associé à la valeur propre r . Alors on a

$$Bx \geq Ax = rx.$$

De plus, le vecteur Bx est différent du vecteur $Ax = rx$. Le point 3 montre donc que $r < r_B$.

5. Il suffit d'appliquer les points 2 et 3 au vecteur strictement positif j_n de dimension n qui ne contient que des 1. En effet, on a

$$s_{\min} j_n \leq A j_n \leq s_{\max} j_n.$$

Si le vecteur $A j_n$ est différent du vecteur $s_{\min} j_n$, alors on déduit du point 3 que $s_{\min} < r$. Si par contre on a $A j_n = s_{\min} j_n$, alors on en déduit que s_{\min} est une valeur propre de la matrice A et le point 1 implique donc que $s_{\min} = r$. Si le vecteur $A j_n$ est différent du vecteur $s_{\max} j_n$, alors on déduit du point 2 que $r < s_{\max}$. Si par contre on a $A j_n = s_{\max} j_n$, alors on en déduit que s_{\max} est une valeur propre de la matrice A et le point 1 implique donc que $s_{\max} = r$. Finalement, dans tous les cas, on a

$$s_{\min} \leq r \leq s_{\max}.$$

□

D'autres résultats concernant les matrices positives et en lien avec le théorème de Perron–Frobenius peuvent être trouvés dans le chapitre 8 du livre [1] de Allouche et Shallit.

Références

- [1] Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit, *Automatic sequences : Theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, New York, 2003.
- [2] Noga Alon, Richard Anthony Brualdi et Bryan Lynn Shader, *Multicolored forests in bipartite decompositions of graphs*, Journal of Combinatorial Theory. Series B **53** (1991), n° 1, p. 143-148.
- [3] Alfred Brauer et Ivey Gentry, *On the characteristic roots of tournament matrices*, Bulletin (new series) of the American Mathematical Society **74** (1968), n° 6, p. 1133-1135.
- [4] Richard Anthony Brualdi, *The mutually beneficial relationship of graphs and matrices*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, n° 115, American Mathematical Society, Providence, 2011.
- [5] Richard Anthony Brualdi et Geir Dahl, *Majorization classes of integral matrices*, Linear Algebra and its Applications **436** (2012), n° 4, p. 802-813.
- [6] Richard Anthony Brualdi et Jian Shen, *Landau's inequalities for tournament scores and a short proof of a theorem on transitive sub-tournaments*, Journal of Graph Theory **38** (2001), n° 4, p. 244-254.
- [7] David Gale, *A theorem on flows in networks*, Pacific Journal of Mathematics **7** (1957), n° 2, p. 1073-1082.
- [8] Emeric Gioan et Jorge Luis Ramírez Alfonsín, *Eléments de théorie des matroïdes et matroïdes orientés*, Informatique mathématique - une photographie en 2013 (Philippe Langlois, éd.), Presses Universitaires de Perpignan, Perpignan, 2013, p. 47-95.
- [9] Michel Goemans, *Lecture notes on matroid optimization*, Combinatorial Optimization, Massachusetts Institute of Technology, 2017, disponible via l'URL <https://math.mit.edu/~goemans/18433S11/matroid-notes.pdf>, consulté le 21 mars 2023.
- [10] Ronald Lewis Graham et Henry Otto Pollak, *On the addressing problem for loop switching*, The Bell System Technical Journal **50** (1971), n° 8, p. 2495-2519.
- [11] Barry Guiduli *et al.*, *2-partition-transitive tournaments*, Journal of Combinatorial Theory. Series B **72** (1998), n° 2, p. 181-196.
- [12] Hyman Garshin Landau, *On dominance relations and the structure of animal societies : I. Effect of inherent characteristics*, The Bulletin of Mathematical Biophysics **13** (1951), n° 1, p. 1-19.
- [13] Hyman Garshin Landau, *On dominance relations and the structure of animal societies : III. The condition for a score structure*, The Bulletin of Mathematical Biophysics **15** (1953), n° 2, p. 143-148.
- [14] Brendan Damien McKay *et al.*, *Acyclic digraphs and eigenvalues of $(0,1)$ -matrices*, Journal of Integer Sequences **7** (2004), n° 3.

- [15] Frédéric Meunier, *Introduction aux matroïdes*, Notes de cours à destination des étudiants du Master Parisien de Recherche Opérationnelle, 2023, disponible via l'URL <<http://cermics.enpc.fr/~meunief/Matroids.pdf>>, consulté le 3 avril 2023.
- [16] Carl Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. Vol. 1, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [17] Bogdan Nica, *A brief introduction to spectral graph theory*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zürich, 2018.
- [18] John Robinson Pierce, *Network for block switching of data*, The Bell System Technical Journal **21** (1972), n° 6, p. 1133-1145.
- [19] Michel Rigo, *Algèbre linéaire*, Notes de cours à l'Université de Liège, Année académique 2009-2010, disponible via l'URL <http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_math.pdf>, consulté le 25 mars 2023.
- [20] Michel Rigo, *Théorie des graphes*, Notes de cours à l'Université de Liège, Année académique 2009-2010, disponible via l'URL <http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_graphes.pdf>, consulté le 25 mars 2023.
- [21] Robert Robinson, *Counting unlabeled acyclic digraphs*, Combinatorial mathematics V (C. H. C. Little, éd), Lecture Notes in Mathematics, 622, Springer, Berlin, 1977, p. 28-43.
- [22] Herbert John Ryser, *Combinatorial properties of matrices of zeros and ones*, Canadian journal of mathematics **9** (1957), p. 371-377.
- [23] Jean-Sébastien Sereni, *Dix heures avec les matroïdes*, Notes pour le cours d'algorithmique des graphes à destination des étudiants du Master Parisien de Recherche en Informatique à l'Université Diderot (Paris), 2012, disponible via l'URL <https://lbgi.fr/~sereni/Lectures/AG_Fall111/ag11_cours.pdf>, consulté le 2 avril 2023.
- [24] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)*, disponible via l'URL <<https://oeis.org/>>, consulté le 4 mai 2023.
- [25] Dominic Welsh, *Matroid theory*, London Mathematical Society Monographs, n° 8, Academic Press, London, 1976.
- [26] Gilles Zémor, *Notes de cours d'algorithmique*, Notes de cours à destination des étudiants du Master en Recherche Opérationnelle à l'Université de Bordeaux, 2021, disponible via l'URL <<https://www.math.u-bordeaux.fr/~gzemor/algorithmique.pdf>>, consulté le 30 avril 2023.