# Mémoire

**Auteur :** Michel, Alicia
**Promoteur(s) :** Esser, Céline
**Faculté :** Faculté des Sciences
**Diplôme :** Master en sciences mathématiques, à finalité didactique
**Année académique :** 2022-2023
**URI/URL :** http://hdl.handle.net/2268.2/17374

Mémoire

# Convergence et divergence des séries de Fourier

MICHEL Alicia

Promotrice : ESSER Céline

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année académique 2022–2023

# Introduction

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) publie en 1822 un traité intitulé *Théorie analytique de la chaleur*. Ce traité marque l'émergence de ce qu'on appelle de nos jours les séries trigonométriques de Fourier. Dans son ouvrage, Fourier aborde la convergence de ces séries. Selon lui, toutes les séries convergent vers la fonction qu'on développe en série trigonométrique. En effet, Fourier écrit à la page 259 de son traité ce qui suit :

> 1° Les séries ordonnées selon les cosinus ou les sinus des arcs multiples sont toujours convergentes, c'est-à-dire qu'en donnant à la variable une valeur quelconque non imaginaire, la somme des termes converge de plus en plus vers une seule limite fixe, qui est la valeur de la fonction développée.

FIGURE 1 – *Théorie analytique de la chaleur* (1822), n°235.

On peut déduire que la convergence traitée par Fourier est la convergence ponctuelle. Par ailleurs, Fourier écrit au n°418 de son traité : "il n'y a ainsi aucune fonction $fx$, ou partie de fonction, que l'on ne puisse exprimer en une suite trigonométrique." Pour Fourier, la fonction qu'on veut développer en série trigonométrique n'est pas forcément continue, elle est entièrement arbitraire. Ainsi, on peut voir que pour Fourier, toute fonction peut être décomposée en série trigonométrique et que ces séries convergent vers la fonction qu'on cherche à développer.
Après Fourier, de nombreux mathématiciens ont réfléchi à la convergence de ces séries. Savoir si la série de Fourier d'une fonction donnée est convergente est un vaste sujet de recherche. Dirichlet, du Bois-Reymond, Kolmogorov, Kahane, Katznelson, Carleson, Hunt ont apportés de célèbres résultats. Dans ce mémoire, nous allons traiter certains de ces résultats. Nous devons d'abord rappeler quelques notions.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Considérons l'espace $L^2([a,b])$ des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $|f|^2 \in L^1([a,b])$. Pour rappel, $L^2([a,b])$ est muni du produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

pour tout $f, g \in L^2([a,b])$. Deux fonctions appartenant à $L^2([a,b])$ sont orthogonales si leur produit scalaire est nul.

Considérons une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions à valeurs réelles ou complexes, appartenant à $L^2([a,b])$, orthogonales deux à deux et telles [1] que $\langle \phi_m, \phi_m \rangle = \lambda_m > 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par la suite, on dira que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Supposons que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \phi_n$$

converge (dans un sens à préciser) vers une fonction $f$ sur $]a,b[$. Si on multiplie les deux membres de l'équation

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \phi_n \tag{1}$$

par $\overline{\phi_n}$ et si on intègre sur $]a,b[$ alors on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)}\, dx \tag{2}$$

parce que les fonctions de la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthogonales deux à deux et telles que $\langle \phi_m, \phi_m \rangle = \lambda_m > 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. L'argument employé ici est purement formel.

Soit $f$ une fonction définie sur $]a,b[$ et calculons les coefficients $c_n$ grâce à (2). Si on écrit

$$f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \phi_n \tag{3}$$

alors les nombres $c_n$ sont appelés les *coefficients de Fourier de* $f$ et la série de (3) est appelée *série de Fourier de* $f$ par rapport au système $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons que le symbole "$\sim$" signifie que les coefficients $c_n$ sont liés à $f$ par (2) mais ne signifie pas que la série est convergente (dans un sens à préciser) et encore moins qu'elle converge vers $f$. On est donc confronté à un problème : en quel sens et sous quelles conditions, la série (3) "représente" $f$ ? En effet, on peut donner différents sens à la convergence de la série en fonction de l'espace fonctionnel considéré. On peut donc se demander sous quelles conditions dans un espace fonctionnel la série de Fourier converge et sous quelles conditions elle converge vers $f$.

Dans ce mémoire, nous allons étudier deux systèmes particuliers. Considérons d'abord la suite des fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies par $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Ces fonctions appartiennent à $L^2([-\pi,\pi])$ et sont orthogonales deux à deux car on a

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi & \text{si } m = n. \end{cases} \tag{4}$$

1. Puisque $\lambda_m > 0$, il s'ensuit que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $\phi_m$ n'est pas identiquement nulle.

Ce système est appelé *système trigonométrique complexe*. Appliquons ce qu'on a vu précédemment à ce système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $f$ est une fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, les coefficients de (2) s'écrivent

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \tag{5}$$

et sont nommés [2] *coefficients de Fourier complexes de $f$*. Remarquons que pour que $c_n$ soit bien défini pour tout $n\in\mathbb{Z}$, il faut que la fonction $f$ soit intégrable sur $]-\pi,\pi[$. Par la suite, on notera généralement $\hat{f}(n)$ pour désigner $c_n$. Cela permet d'identifier plus facilement de quelle fonction on considère les coefficients de Fourier. Vu les appellations définies précédemment, la série de Fourier de $f$ par rapport au système trigonométrique complexe est donnée par

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inx}. \tag{6}$$

Pour plus de facilité, on dira par la suite que (6) est [3] la *série de Fourier complexe de f.*

À partir du système trigonométrique complexe, il est possible de définir un autre système de la manière suivante

$$\frac{1}{2},\ \frac{e_1+e_{-1}}{2},\ \frac{e_1-e_{-1}}{2i},\ldots,\ \frac{e_n+e_{-n}}{2},\ \frac{e_n-e_{-n}}{2i},\ldots$$

Ce système peut également s'écrire

$$\frac{1}{2},\ \cos,\ \sin,\ldots,\ \cos(n\,\cdot),\ \sin(n\,\cdot),\ldots \tag{7}$$

Ces fonctions appartiennent à $L^2([-\pi,\pi])$ et sont orthogonales deux à deux car si $m\neq n$ avec $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ alors on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)dx = 0$$

et pour tout $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos(nx)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin(mx)dx = 0.$$

En outre, on a $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}dx = \frac{1}{2}\pi$ et pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1+\cos(2nx)dx = \pi.$$

2. L'adjectif *trigonométrique* est sous-entendu.
3. L'adjectif *trigonométrique* est sous-entendu.

De manière similaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi.$$

L'ensemble des fonctions de (7) est appelé *système trigonométrique*. Appliquons également ce qu'on a vu précédemment à ce système. Soit $f$ une fonction définie sur $]-\pi,\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons[4]

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt. \tag{8}$$

Ces coefficients sont nommés[5] *coefficients de Fourier de* $f$. Pour que ces coefficients soient bien définis, il faut que le produit des fonctions $f$ et $\cos(n\,\cdot)$ (resp. $\sin(n\,\cdot)$) soit intégrable sur $]-\pi,\pi[$, ce qui est à nouveau le cas si $f$ est intégrable sur $]-\pi,\pi[$. Vu les appellations définies précédemment, on obtient que la série de Fourier de $f$ par rapport au système trigonométrique est donnée par

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)). \tag{9}$$

Pour plus de facilité, on dira par la suite que[6] (9) est la *série de Fourier de f.*

De plus, remarquons que les coefficients de Fourier d'une fonction $f$ définie sur $]-\pi,\pi[$ et les coefficients de Fourier complexes de cette même fonction sont liés parce que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Par la suite, si aucune confusion n'est possible, on parlera des *coefficients de Fourier de f* et de la *série de Fourier* ou du *développement de f* sans forcément employer l'adjectif "complexe". On utilisera la notation $S(f,x)$ pour désigner la série de Fourier de la fonction $f$ en $x \in \mathbb{R}$ sous la forme de (6) ou (9) en fonction du contexte. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f)$ la $(n+1)^{\text{ème}}$ somme partielle de $S(f)$, c'est-à-dire

$$(S_n(f))(x) = S_n(f,x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx))$$

4. Au vu des fonctions qui constituent le système trigonométrique, on considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de considérer une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme pour (2). Normalement, on devrait définir un élément $d = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2}dt$ et les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ de la même manière. Cependant, si on définit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on se rend compte que dans ce cas, on a $a_0 = d$ et $b_0 = 0$.

5. L'adjectif *trigonométrique* est sous-entendu.

6. L'adjectif *trigonométrique* est sous-entendu.

pour $x \in \mathbb{R}$ si on considère le système trigonométrique (7) et

$$(S_n(f))(x) = S_n(f, x) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijx}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ si on considère le système trigonométrique complexe.

Étant donné que les séries (6) et (9) sont $2\pi$-périodiques, on va supposer que la fonction $f$ dont on considère la série de Fourier est définie sur $\mathbb{R}$ en ajoutant la condition de périodicité suivante

$$f(x + 2k\pi) = f(x)$$

pour tout $x \in [-\pi, \pi[$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction $f$ est $2\pi$-périodique et l'intervalle d'intégration de (5) et (8) peut donc être remplacé par un autre intervalle de longueur $2\pi$ comme $]0, 2\pi[$. Par la suite, il est sous-entendu qu'on considère des fonctions $2\pi$-périodiques, sauf mention explicite du contraire. De plus, si une fonction est dite périodique alors il est sous-entendu que sa période vaut $2\pi$.

Par conséquent, cette condition de périodicité permet de travailler par la suite avec le groupe $\mathbb{T}$, c'est-à-dire le quotient $\mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z}$ où $2\pi\,\mathbb{Z}$ est le groupe des multiples entiers de $2\pi$. Si $x \in \mathbb{R}$ alors la classe d'équivalence de $x$ pour la relation d'équivalence modulo $2\pi$ est notée $[x]$. Ainsi, $[x] = \{x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{T}$. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ alors $[x_1]$ et $[x_2]$ sont distincts lorsque $x_1 \neq x_2 + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Par la suite, on écrira $x \in \mathbb{T}$ au lieu de $[x] \in \mathbb{T}$ pour alléger les notations. Notons par exemple que si $x \in \mathbb{T}$ est tel que $x \neq 0$ alors on sous-entend que $x \neq 0 + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Au lieu d'écrire que $x \neq 0$, on écrira parfois que $x \in \mathbb{T}$ n'est pas un multiple entier de $2\pi$.

Pour considérer des fonctions définies sur $\mathbb{T}$, on identifie une fonction définie sur $\mathbb{T}$ à une fonction $2\pi$-périodique définie sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de considérer des notions telles que la continuité, la dérivabilité, l'intégrabilité [7], ... pour des fonctions définies sur $\mathbb{T}$. Une fonction est dite continue, dérivable, intégrable, à variation bornée, ... sur $\mathbb{T}$ si la fonction $2\pi$-périodique définie sur $\mathbb{R}$ qui lui correspond satisfait ces propriétés sur un intervalle de longueur $2\pi$ [8]. En particulier, si $f$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ et si on note également $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie sur $\mathbb{R}$ qui lui correspond, alors on pose

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Au vu de cette identification entre les fonctions définies sur $\mathbb{T}$ et les fonctions $2\pi$-périodiques définies sur $\mathbb{R}$, sauf mention explicite du contraire, on considérera que si $x \in \mathbb{T}$ alors $x \in [0, 2\pi[$. On identifie $\mathbb{T}$ à un intervalle de la forme $[\alpha, 2\pi + \alpha[$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Cela permettra notamment de considérer des intervalles inclus dans $\mathbb{T}$. En particulier, si $E$ est un ensemble

7. Sauf mention explicite du contraire, on considère la mesure de Lebesgue.

8. Puisque la fonction est $2\pi$-périodique, on peut considérer n'importe quel intervalle de longueur $2\pi$. En fonction de la notion considérée, on prend un intervalle ouvert ou fermé de longueur $2\pi$.

mesurable inclus dans $\mathbb{T}$ alors la mesure de $E$ est donnée par

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_E(x)dx.$$

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons considérer différents espaces fonctionnels. Commençons par définir les espaces $C^0(\mathbb{T})$ et $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leqslant p < +\infty$ ainsi que leurs normes respectives.

On note $C^0(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ et à valeurs complexes. La norme associée à $C^0(\mathbb{T})$ est notée $\|\cdot\|_\infty$ et est définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x)| \quad \text{si } f \in C^0(\mathbb{T}).$$

On sait que $(C^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Soit $1 \leqslant p < +\infty$. On note $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable sur $\mathbb{T}$. On définit la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ associée à $L^p(\mathbb{T})$ par

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } f \in L^p(\mathbb{T}).$$

On sait que l'espace $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach. Remarquons qu'avec ces notations, l'hypothèse la plus naturelle pour que les coefficients de Fourier d'une fonction $f$ soient bien définis est de demander que $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Cette introduction a été rédigée grâce à [4], [7], [8], [13] et [14].

Dans ce mémoire, nous allons fournir différents résultats de convergence et de divergence des séries de Fourier. Nous débuterons par des définitions et des propriétés utiles pour la suite ainsi qu'une section consacrée aux noyaux de Dirichlet, de Fejér et de de La Vallée Poussin. Dans le deuxième chapitre, nous traiterons des résultats de convergence tels que le test de Dini pour la convergence qui permet d'aborder le cas des fonctions dérivables sur $\mathbb{T}$ ; le principe de localisation qui permet d'obtenir une propriété surprenante des séries de Fourier ; le théorème de Dirichlet-Jordan qui considère des fonctions à variation bornée sur $\mathbb{T}$. Le troisième chapitre sera consacré à la divergence des séries de Fourier. Nous considérerons des espaces homogènes de Banach sur $\mathbb{T}$ et des ensembles de divergence pour ces espaces. Nous terminerons avec le théorème de Kolmogorov.

# Chapitre 1

# Définitions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord la définition de deux notions qui nous accompagneront tout au long de ce mémoire. Nous rappelons également des résultats classiques liés aux séries de Fourier et au produit de convolution. Ensuite, nous étudierons des noyaux et plus particulièrement des noyaux de sommabilité dont les propriétés nous aiderons par la suite.

## 1.1 Polynômes trigonométriques et produit de convolution

Dans le cadre de ce mémoire, nous utiliserons des polynômes trigonométriques. Donnons la définition de ces polynômes. Celle-ci provient de la référence [8].

**Définition 1.1.1.** Un polynôme trigonométrique sur $\mathbb{T}$ est une fonction $P$ de la forme

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} r_n e^{inx} \quad \forall x \in \mathbb{T},$$

où $N \in \mathbb{N}$ et où $r_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \{-N, \ldots, N\}$. Le degré de $P$ est le plus grand naturel $n$ tel que $|r_n| + |r_{-n}| \neq 0$.

Remarquons que si on connait la fonction $P$, il est possible en utilisant (4) de déterminer ses coefficients $r_n$. Pour tout $n \in \{-N, \ldots, N\}$, on obtient ainsi

$$r_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(t) e^{-int} dt.$$

On retrouve donc les coefficients de Fourier de $P$.

Le produit de convolution est une autre notion que nous utiliserons dans ce mémoire. La définition suivante est également tirée de la référence [8].

**Définition 1.1.2.** Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Le produit de convolution des fonctions $f$ et $g$ est défini par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy \quad \text{où } x \in \mathbb{T}\,.$$

Pour presque tout $x \in \mathbb{T}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$. De plus, $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ et le produit de convolution est commutatif et linéaire sur chacun des facteurs. Ces propriétés découlent de résultats prouvés au cours d'introduction à l'analyse harmonique [1].

## 1.2 Propriétés des coefficients de Fourier

Dans cette section, nous rappelons des résultats classiques liés aux coefficients de Fourier d'une fonction.

**Proposition 1.2.1.** *Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a*

(a) $(\widehat{\alpha f})(n) = \alpha \hat{f}(n)$ *où* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) $(\widehat{f+g})(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$.

(c) $(\widehat{f * g})(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

*Démonstration.* Les deux premiers points s'obtiennent par linéarité de l'intégrale. La preuve du troisième point découle d'un résultat prouvé dans [1]. □

Le lemme de Riemann-Lebesgue est un résultat incontournable lorsqu'on étudie les séries de Fourier. La preuve de ce résultat a été vue dans le cours d'introduction à l'analyse harmonique [1].

**Lemme 1.2.1.** ***(Riemann-Lebesgue)*** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors* $\lim_{|n| \to +\infty} \hat{f}(n) = 0$.
*En particulier,* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$.

## 1.3 Des noyaux célèbres

Dans cette section, nous allons définir et étudier différents noyaux. Tout au long du mémoire, nous allons considérer deux noyaux de sommabilité : le noyau de Fejér et le noyau de de La Vallée Poussin. Les propriétés de ces noyaux nous permettront d'obtenir différents résultats de convergence et de divergence des séries de Fourier. La définition suivante provient de la référence [8].

**Définition 1.3.1.** Un noyau de sommabilité est[1] une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $2\pi$-périodiques et continues sur $\mathbb{T}$ satisfaisant les 3 propriétés suivantes :

$(S_1)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(x)dx = 1.$$

$(S_2)$ Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |k_n(x)|dx \leqslant C.$$

$(S_3)$ Pour tout $0 < \delta < \pi$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(x)|dx = 0.$$

Un noyau de sommabilité positif est un noyau de sommabilité tel que $k_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### 1.3.1 Noyau de Dirichlet

Le premier noyau que nous allons considérer est le noyau de Dirichlet, noté $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Celui-ci n'est pas un noyau de sommabilité car il ne satisfait pas la condition $(S_2)$ de la définition 1.3.1. Cependant, nous verrons que la moyenne de Cesàro de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité. Nous verrons également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la $(n+1)^{\text{ème}}$ somme partielle de la série de Fourier d'une fonction est égale au produit de convolution de la fonction considérée avec le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La définition suivante est tirée de [1].

**Définition 1.3.1.1.** Le noyau de Dirichlet $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par

$$D_n(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } x \text{ est un multiple entier de } 2\pi, \\ \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau de Dirichlet ne satisfait pas la condition $(S_2)$ de la définition 1.3.1 car comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2}\ln(n) + O(1),$$

il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|D_n\|_{L^1} = +\infty$. Une preuve de cette égalité est fournie dans [2].

1. On considère parfois une famille $(k_r)_r$ dépendant d'un paramètre continu $r$ plutôt que d'un paramètre discret $n$. Dans ce mémoire, on considère des familles dépendant d'un paramètre discret $n$.

Pour terminer cette sous-section, nous allons voir deux autres expressions du noyau de Dirichlet.

**Lemme 1.3.1.1.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{T}$, on a*

$$D_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijx} = 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos(jx).$$

*Démonstration.* La première égalité a été prouvée dans [1]. Pour la deuxième égalité, remarquons que si $x \in \mathbb{T}$ alors

$$\sum_{j=-n}^{n} e^{ijx} = 1 + \sum_{j=1}^{n} e^{ijx} + \sum_{j=-n}^{-1} e^{ijx} = 1 + \sum_{j=1}^{n}(e^{ijx} + e^{-ijx}) = 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos(jx).$$

□

### 1.3.2 Noyau de Fejér

À partir du noyau de Dirichlet, il est possible d'obtenir un noyau de sommabilité en considérant la moyenne de Cesàro de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite ainsi obtenue est appelée noyau de Fejér. La définition suivante provient de la référence [2].

**Définition 1.3.2.1.** Le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{T},$$

où $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne noyau de Dirichlet.

Comme mentionné précédemment, le noyau de Dirichlet $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas un noyau de sommabilité pour la définition 1.3.1. Cependant, le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quant à lui un noyau de sommabilité positif. Le lemme suivant nous permettra de le montrer. La preuve de ce lemme se base sur les références [11] et [12].

**Lemme 1.3.2.1.**

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$K_n(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \text{ est un multiple entier de } 2\pi, \\ \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{T}$, on a*

$$K_n(x) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijx}.$$

*Démonstration.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x$ est un multiple entier de $2\pi$ alors en utilisant la définition 1.3.1.1 du noyau de Dirichlet, on a successivement que

$$\begin{aligned} K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2 - k^2) \\ &= \frac{1}{n+1}(n+1)^2 \\ &= n+1. \end{aligned}$$

Si $x$ n'est pas un multiple entier de $2\pi$, la définition du noyau de Dirichlet 1.3.1.1 implique

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(kx + \frac{x}{2}\right)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Or, on a $2\sin\left(kx + \frac{x}{2}\right)\sin(\frac{x}{2}) = \cos(kx) - \cos((k+1)x)$. Donc, on en déduit que

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx) - \cos((k+1)x)}{2\sin^2(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos((n+1)x)}{2\sin^2(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin^2(\frac{x}{2})}, \end{aligned}$$

ce qui montre le premier point de l'énoncé.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{T}$. Le lemme 1.3.1.1 permet d'obtenir que

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=-k}^{k} e^{ijx}.$$

Si on permute les sommes, on en tire que

$$\begin{aligned} K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=|j|}^{n} e^{ijx} &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=-n}^{n}(n-|j|+1)e^{ijx} \\ &= \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijx}. \end{aligned}$$

□

Comme annoncé, on va montrer que le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité positif. La propriété $(S_1)$ sera couramment utilisée par la suite.

**Proposition 1.3.2.1.** *Le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité positif.*

*Démonstration.* La suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de fonctions $2\pi$-périodiques, continues sur $\mathbb{T}$ et satisfaisant les conditions de la définition 1.3.1 car

$(S_1)$ Grâce au point 2. du lemme précédent 1.3.2.1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\int_0^{2\pi} e^{ijx}dx = 1$$

puisque pour que l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{ijx}dx$ soit non nulle, il faut $j = 0$.

$(S_2)$ Le point 1. du lemme précédent 1.3.2.1 permet d'obtenir que $K_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(S_2)$ découle de $(S_1)$.

$(S_3)$ Soit $0 < \delta < \pi$. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(x)|dx = 0.$$

Comme $K_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en utilisant le point 1. du lemme précédent 1.3.2.1 que

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(x)|dx = \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 dx \leqslant \frac{1}{n+1}\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx.$$

En appliquant la substitution $t = \frac{x}{2}$, il s'ensuit que

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(x)|dx \leqslant \frac{2}{n+1}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{2\pi-\delta}{2}} \frac{1}{\sin^2(t)}dt = \frac{-2}{n+1}\left(\cot\left(\frac{2\pi-\delta}{2}\right) - \cot\left(\frac{\delta}{2}\right)\right).$$

Puisque la fonction cotangente est $\pi$-périodique et impaire, on en tire que

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(x)|dx \leqslant \frac{-2}{n+1}\left(\cot\left(\frac{-\delta}{2}\right) - \cot\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) = \frac{4}{n+1}\cot\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

ce qui permet de conclure par l'étau parce que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ et $4\cot\left(\frac{\delta}{2}\right) < +\infty$.

$\square$

### 1.3.3 Somme de Fejér

Le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de définir une suite dont le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément est appelé la $(n+1)^{\text{ème}}$ somme de Fejér d'une fonction. Sous certaines conditions, la convergence ponctuelle (resp. uniforme) de cette suite implique la convergence ponctuelle (resp. uniforme) de la série de Fourier d'une fonction considérée. Cela nous permettra notamment de prouver le théorème de Dirichlet-Jordan. La définition suivante est tirée de [8] et [2].

**Définition 1.3.3.1.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$. La $(n+1)^{\text{ème}}$ somme de Fejér de $f$ est notée $\sigma_n(f)$ et est définie par

$$\sigma_n(f) = K_n * f$$

où $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne le noyau de Fejér. On pose $\sigma_n(f)(x) = \sigma_n(f,x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$.

Nous allons voir que la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est la moyenne de Cesàro de la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$. Le lemme suivant nous montre également un lien entre les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction et le noyau de Dirichlet. La référence [8] a été consultée pour prouver ce lemme.

**Lemme 1.3.3.1.** *Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$. On a*

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(j) e^{ijx} \quad \text{et} \quad S_n(f) = D_n * f.$$

*En particulier, on a*

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f).$$

*Démonstration.* Nous allons d'abord utiliser des notations générales. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de complexes et si $e_n$ désigne l'application définie par $e_n(x) = e^{inx}$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{T}$ alors par linéarité du produit de convolution, on a

$$\begin{aligned}
\left(\left(\sum_{n=-N}^{N} z_n e_n\right) * f\right)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} z_n((e_n * f)(x)) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} z_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(x-t)} f(t)dt\right) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} z_n e^{inx} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt\right) \\
&= \sum_{n=-N}^{N} z_n \hat{f}(n) e^{inx}. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lemme 1.3.2.1 affirme que

$$K_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijx}.$$

On obtient donc en appliquant (1.1) que

$$\sigma_n(f,x) = (K_n * f)(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(j) e^{ijx}.$$

De même, le lemme 1.3.1.1 implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijx}.$$

Grâce à (1.1), on a donc que

$$(D_n * f)(x) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijx} = S_n(f,x). \tag{1.2}$$

En particulier, en utilisant la définition 1.3.2.1 du noyau de Fejér et la linéarité du produit de convolution, il suit de (1.2) que

$$\sigma_n(f) = K_n * f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (D_k * f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f).$$

□

Pour terminer cette sous-section, nous allons voir un résultat concernant la convergence de la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$. La proposition 1.3.3.1 nous apprend que pour ce procédé de sommation, nous avons la convergence dans $L^1(\mathbb{T})$. Pour montrer cette convergence, nous avons besoin du lemme suivant dont une preuve sera fournie dans un cadre plus général au lemme 3.1.4 dans le troisième chapitre.

**Lemme 1.3.3.2.** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité alors*

$$f = \lim_{n\to+\infty} k_n * f \quad \textit{dans } L^1(\mathbb{T}).$$

**Proposition 1.3.3.1.** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ dans $L^1(\mathbb{T})$.*

*Démonstration.* Puisque $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité et que $\sigma_n(f) = K_n * f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la conclusion s'obtient par le lemme 1.3.3.2.

□

Nous pouvons déduire de cette proposition un résultat concernant la limite d'une série de Fourier qui converge dans $L^1(\mathbb{T})$. Pour démontrer le corollaire suivant, nous avons besoin d'une variante du théorème de Cesàro. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{T})$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$ alors la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$ vers la même limite.

**Corollaire 1.3.3.1.** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et si $S(f)$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$* [2] *alors la limite est nécessairement $f$.*

*Démonstration.* Supposons que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g$ dans $L^1(\mathbb{T})$. En appliquant la variante du théorème de Cesàro à la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f) = g \quad \text{dans } L^1(\mathbb{T}).$$

De plus, on sait par le lemme 1.3.3.1 que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f) = \sigma_n(f)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La proposition 1.3.3.1 implique donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f) = f \quad \text{dans } L^1(\mathbb{T}).$$

Par unicité de la limite, on en tire que $f = g$. D'où la conclusion.

□

### 1.3.4 Noyau de de La Vallée Poussin

Le dernier noyau que nous allons étudier est le noyau de de La Vallée Poussin. Il est construit à partir du noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tout comme ce dernier, nous allons voir que le noyau de de La Vallée Poussin est noyau de sommabilité. Cette section a été rédigée grâce [8].

**Définition 1.3.4.1.** Le noyau de de La Vallée Poussin $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par

$$V_n(x) = 2K_{2n+1}(x) - K_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{T},$$

où $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne le noyau de Fejér.

2. Ce qui revient à dire que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$.

**Proposition 1.3.4.1.** *Le noyau de de La Vallée Poussin $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité.*

*Démonstration.* Comme $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité, il s'ensuit que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de fonctions $2\pi$-périodiques continues sur $\mathbb{T}$. De plus, les conditions de la définition 1.3.1 sont vérifiées :

$(S_1)$ la définition 1.3.4.1 de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_n(x)dx = 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{2n+1}(x)dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = 1$$

parce que le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $(S_1)$.

$(S_2)$ De manière similaire, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |V_n(x)|dx \leqslant 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_{2n+1}(x)|dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(x)|dx = 3$$

puisque le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positif et vérifie $(S_1)$.

$(S_3)$ Pour $0 < \delta < \pi$, on a

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} |V_n(x)|dx \leqslant 2\int_\delta^{2\pi-\delta} |K_{2n+1}(x)|dx + \int_\delta^{2\pi-\delta} |K_n(x)|dx,$$

ce qui permet de conclure car le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $(S_3)$.

$\square$

Pour clore cette sous-section, nous allons voir une propriété des coefficients de Fourier des fonctions $V_n$ constituant le noyau de de La Vallée Poussin.

**Proposition 1.3.4.2.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n$ est un polynôme trigonométrique tel que*

$$\widehat{V_n}(j) = 1 \qquad \text{si } |j| \leqslant n+1.$$

*Démonstration.* Comme $K_n$ est un polynôme trigonométrique pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en est de même pour $V_n$ au vu de la définition 1.3.4.1.

À présent, soit $j \in \mathbb{Z}$ tel que $|j| \leqslant n+1$. Par la définition 1.3.4.1 du noyau de de La Vallée Poussin, du noyau de Fejér 1.3.2.1 et par le lemme 1.3.1.1, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{V_n}(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2K_{2n+1}(t) - K_n(t))e^{-ijt}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} D_k(t) - \sum_{k=0}^{n} D_k(t)\right)e^{-ijt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi}\sum_{k=n+1}^{2n+1} D_k(t)e^{-ijt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n+1}\sum_{m=-k}^{k}\int_0^{2\pi} e^{i(m-j)t}dt.
\end{aligned}$$

Pour que cette dernière intégrale soit non nulle, il faut que $m = j$. On en tire que

$$\widehat{V_n}(j) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n+1} 2\pi = 1.$$

$\square$

# Chapitre 2

# Convergence

Dans ce chapitre, nous allons fournir des résultats de convergence des séries de Fourier. Les principaux sont le test de Dini pour la convergence, le principe de localisation et le théorème de Dirichlet-Jordan. Nous aurons besoin de définir les sommes partielles modifiées de la série de Fourier d'une fonction et le noyau de Dirichlet modifié ainsi que de traiter certaines de leurs propriétés. Nous donnons d'abord un résultat intéressant lié à la convergence des séries de Fourier rencontré dans la référence [13].

Ce résultat signifie que si la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{inx} \tag{2.1}$$

converge pour presque tout $x \in \mathbb{T}$ alors sa limite donne une fonction $f$ définie presque partout. Si la fonction $f$ ainsi définie appartient à $L^1(\mathbb{T})$, on peut déterminer ses coefficients de Fourier et donc sa série de Fourier. Le résultat affirme que (2.1) est la série de Fourier de $f$, autrement dit que les coefficients de Fourier de $f$ sont égaux aux coefficients $c_n$ de (2.1) pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

**Proposition 2.0.1.** *Si (6) (resp. (9)) converge vers $f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{T}$ et si les sommes partielles de (6) (resp. (9)) sont absolument dominées par une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$, alors (6) (resp. (9)) est la série de Fourier de $f$. En particulier, on obtient le même résultat si (6) (resp. (9)) converge uniformément vers $f$.*

*Démonstration.*

1. Par hypothèse, on a pour presque tout $x \in \mathbb{T}$ que

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{inx} = f(x)$$

et il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ telle que

$$\left| \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{inx} \right| \leqslant g(x)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{T}$. Ainsi, le théorème de la convergence dominée implique que $f \in L^1(\mathbb{T})$ et on obtient également pour tout $m \in \mathbb{Z}$ que

$$\begin{aligned}\hat{f}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-imt}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{int}\right)e^{-imt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt \\ &= c_m\end{aligned}$$

puisque pour que l'intégrale soit non nulle, il faut $m = n$ vu (4). Pour tout $x \in \mathbb{T}$, on en tire que

$$S(f,x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m)\, e^{imx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\, e^{imx}.$$

Le cas où on considère (9) au lieu de (6) se traite de manière analogue en utilisant les propriétés du système trigonométrique (7).

2. On se place dans le cas où la convergence est uniforme. Montrons que les hypothèses du premier cas sont vérifiées. On sait que la convergence uniforme implique la convergence presque partout. En outre, prenons $\epsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $N > N_0$ alors

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx} - f(x)\right| < \epsilon$$

pour tout $x \in \mathbb{T}$. En particulier, si $N > N_0$ alors

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}\right| < |f(x)| + \epsilon.$$

pour tout $x \in \mathbb{T}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{T}$, on en tire que

$$\left|\sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}\right| \leqslant \sum_{n=-N_0}^{N_0} |c_n| + |f(x)| + \epsilon.$$

Puisque la fonction $f$ est obtenue comme limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbb{T}$, il s'ensuit que $f$ est continu sur $\mathbb{T}$. Cela implique que $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ainsi, les sommes partielles de (6) sont absolument dominées par une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$. Les hypothèses du premier cas sont donc vérifiées.

Le cas où on considère (9) au lieu de (6) se traite de manière analogue en utilisant les propriétés du système trigonométrique (7).

□

## 2.1 Sommes partielles modifiées et noyau de Dirichlet modifié

Comme annoncé, nous allons définir les sommes partielles modifiées de la série de Fourier d'une fonction et le noyau de Dirichlet modifié ainsi qu'étudier certaines de leurs propriétés. Les références [13] et [14] ont été consultées pour la rédaction de cette section.

**Définition 2.1.1.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$. La $(n+1)^{\text{ème}}$ somme partielle modifiée de $S(f)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{T}$ par

$$S_n^{\circledast}(f,x) = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \hat{f}(j)e^{ijx} + \frac{1}{2}(\hat{f}(n)e^{inx} + \hat{f}(-n)e^{-inx}).$$

On définit le noyau de Dirichlet modifié $(D_n^{\circledast})_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$D_n^{\circledast}(x) = D_n(x) - \cos(nx) \quad \forall x \in \mathbb{T},$$

où $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne le noyau de Dirichlet.

Le lemme suivant permet d'exprimer le noyau de Dirichlet modifié sous une autre forme et d'obtenir la valeur de l'intégrale sur $\mathbb{T}$ des fonctions $D_n^{\circledast}$ constituant le noyau de Dirichlet modifié.

**Lemme 2.1.1.**

1. *Si $n \in \mathbb{N}$ et si $x \in \mathbb{T}$ n'est pas un multiple entier de $\pi$ alors on a*

$$D_n^{\circledast}(x) = \frac{\sin(nx)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n^{\circledast}(t)dt = 2\pi.$$

*Démonstration.*

1. Si $x$ n'est pas un multiple entier de $\pi$ alors en utilisant la définition 1.3.1.1 du noyau de Dirichlet, on obtient

$$\begin{aligned} D_n^{\circledast}(x) &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(\frac{x}{2})} - \cos(nx) \\ &= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}\left(\sin(nx)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(nx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \cos(nx) \\ &= \frac{\sin(nx)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\sin(nx)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

2. Si $k \in \mathbb{Z}$ alors on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)dt = \frac{1}{k}[\sin(kt)]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 1.3.1.1, on obtient que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n^{\circledast}(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos(jt) - \cos(nt)dt = 2\pi,$$

par linéarité de l'intégrale.

$\square$

Dans le lemme 1.3.3.1, nous avons vu que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors $S_n(f) = D_n * f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. À partir de cette égalité, nous allons pouvoir exprimer les sommes partielles modifiées de la série de Fourier d'une fonction à partir de cette fonction et du noyau de Dirichlet modifié.

**Lemme 2.1.2.** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$ alors on a*

$$S_n^{\circledast}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n^{\circledast}(t)dt \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

*Démonstration.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{T}$, la définition 2.1.1 implique

$$\begin{aligned} S_n^{\circledast}(f, x) &= \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \hat{f}(j)e^{ijx} + \frac{1}{2}(\hat{f}(n)e^{inx} + \hat{f}(-n)e^{-inx}) \\ &= S_n(f, x) - \frac{1}{2}(\hat{f}(n)e^{inx} + \hat{f}(-n)e^{-inx}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Or, on sait que $S_n(f) = D_n * f$ par le lemme 1.3.3.1. Autrement dit, on a

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t)dt$$

car le produit de convolution est commutatif. Comme $f$ et $D_n$ sont $2\pi$-périodiques, on en tire que $f(x - \cdot)$ est $2\pi$-périodique et que

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)dt.$$

Puisque $D_n(x) = D_n(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en réalisant la substitution $y = -t$ que

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y)dy. \tag{2.3}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)e^{inx}+\hat{f}(-n)e^{-inx} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{in(x-t)}dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(x-t)}dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n(x-t))dt.\end{aligned}$$

En appliquant la substitution $y=t-x$, on en tire que

$$\begin{aligned}\hat{f}(n)e^{inx}+\hat{f}(-n)e^{-inx} &= \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} f(x+y)\cos(-ny)dy\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos(ny)dy. \end{aligned} \tag{2.4}$$

par parité de la fonction cosinus et par périodicité des fonctions $f(x+\cdot)$ et cosinus. Par conséquent, grâce à (2.3) et à (2.4), l'égalité (2.2) devient

$$\begin{aligned}S_n^{\circledast}(f,x) &= S_n(f,x)-\frac{1}{2}(\hat{f}(n)e^{inx}+\hat{f}(-n)e^{-inx})\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)dy-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos(ny)dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n^{\circledast}(y)dy,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

□

Nous allons voir que la convergence uniforme (resp. ponctuelle) de $(S_n^{\circledast}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $f\in L^1(\mathbb{T})$ implique la convergence uniforme (resp. ponctuelle) de $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ vers la même limite. Cela nous permettra de prouver le test Dini et le principe de localisation.

**Lemme 2.1.3.** *Si* $f\in L^1(\mathbb{T})$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)-S_n^{\circledast}(f)=0$ *uniformément.*

*Démonstration.* L'égalité (2.2) de la preuve précédente permet d'obtenir que

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{T}}|S_n(f,x)-S_n^{\circledast}(f,x)| &= \sup_{x\in\mathbb{T}}\frac{1}{2}|\hat{f}(n)e^{inx}+\hat{f}(-n)e^{-inx}|\\ &\leqslant \frac{1}{2}|\hat{f}(n)|+\frac{1}{2}|\hat{f}(-n)|.\end{aligned}$$

Par Riemann-Lebesgue 1.2.1, on sait que $\lim\limits_{|n|\to+\infty}\hat{f}(n)=0$. D'où la conclusion par l'étau.

□

**Proposition 2.1.1.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si la suite $(S_n^{\circledast}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. ponctuellement) alors la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. ponctuellement) vers la même limite et inversement.*

*Démonstration.* Supposons que la suite $(S_n^{\circledast}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g$. Montrons que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} |S_n(f,x) - g(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{T}} |S_n(f,x) - S_n^{\circledast}(f,x)| + \sup_{x\in\mathbb{T}} |S_n^{\circledast}(f,x) - g(x)|,$$

ce qui suffit par l'étau au vu de l'hypothèse et du lemme précédent 2.1.3.

Si la suite $(S_n^{\circledast}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers $g$ alors en appliquant le même raisonnement sans considérer la borne supérieure, on trouve que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers $g$.

Le cas inverse se traite de manière analogue.

□

## 2.2 Test de Dini

Le premier résultat de convergence que nous allons prouver est le test de Dini pour la convergence. Ce résultat nous permettra notamment d'étudier la convergence de la série de Fourier d'une fonction dérivable sur $\mathbb{T}$. Dans l'énoncé du test de Dini, on considère pour $x \in \mathbb{T}$, une fonction $\phi_x$. Commençons par définir cette fonction. La rédaction de cette section a été réalisée grâce aux références [13] et [14].

**Définition 2.2.1.** Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$. On définit

$$\phi_x(t) = \phi_x(f,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) \quad \forall t \in \mathbb{T}\,.$$

Démontrons à présent le test de Dini pour la convergence de la série de Fourier d'une fonction. Ce théorème fournit un résultat de convergence ponctuelle.

**Théorème 2.2.1.** ***(Test de Dini)*** *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$. Si l'intégrale*

$$\int_0^\pi \frac{|\phi_x(t)|}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

*existe et est finie alors la série de Fourier de $f$ converge au point $x$ vers $f(x)$.*

*Démonstration.* Montrons que si $x \in \mathbb{T}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$S_n^{\circledast}(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\phi_x(t)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \sin(nt) dt.$$

En appliquant le point 2. du lemme 2.1.1 et le lemme 2.1.2, on obtient que

$$\begin{aligned}S_n^{\circledast}(f,x)-f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n^{\circledast}(t)dt-\frac{f(x)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n^{\circledast}(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(x+t)-f(x))D_n^{\circledast}(t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+t)-f(x))D_n^{\circledast}(t)dt.\end{aligned}$$

Remarquons que si $x\in\mathbb{T}$ alors $D_n^{\circledast}(-x)=D_n(-x)-\cos(n(-x))=D_n^{\circledast}(x)$. On obtient donc en réalisant la substitution $y=-t$ que

$$\int_{-\pi}^{0}(f(x+t)-f(x))D_n^{\circledast}(t)dt=\int_{0}^{\pi}(f(x-y)-f(x))D_n^{\circledast}(y)dy.$$

Ainsi, en utilisant le point 1. du lemme 2.1.1, on en déduit que

$$\begin{aligned}S_n^{\circledast}(f,x)-f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_n^{\circledast}(t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x+t)-f(x))D_n^{\circledast}(t)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}2\phi_x(t)D_n^{\circledast}(t)dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\phi_x(t)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\sin(nt)dt.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Définissons la fonction $2\pi$-périodique $g_x$ en posant

$$g_x(t)=\begin{cases}\dfrac{\phi_x(t)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t\in]0,\pi[\\ 0 & \text{si } t\in[-\pi,0] \text{ ou si } t=\pi.\end{cases}$$

Au vu de l'hypothèse, la fonction $g_x$ est intégrable sur $]-\pi,\pi[$. Par conséquent, il suit de (8) et de (2.5) que $S_n^{\circledast}(f,x)-f(x)$ est le $(n+1)^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier en sinus de $g_x$. Le lemme de Riemann-Lebesgue 1.2.1 implique donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n^{\circledast}(f,x)-f(x)=0$. La proposition 2.1.1 permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(f,x)=f(x)$.

□

Il découle du test de Dini le corollaire suivant qui nous permettra de traiter la convergence de la série de Fourier d'une fonction dérivable sur $\mathbb{T}$.

**Corollaire 2.2.1.** *Soient $f\in L^1(\mathbb{T})$, $x\in\mathbb{T}$ et $\alpha>0$. Si la fonction $f$ satisfait*

$$f(x+t)-f(x)=O(|t|^{\alpha}) \quad \textit{si } t\to 0$$

*alors la série de Fourier de $f$ converge au point $x$ vers $f(x)$.*

*Démonstration.* Soit $x \in \mathbb{T}$. Afin d'appliquer le test de Dini 2.2.1, il faut montrer que l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{|\phi_x(t)|}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

existe et est finie. Comme $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$, remarquons que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = 1.$$

Soit $\epsilon$ tel que $0 < \epsilon < 1$. Il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que si $0 < |t| < \delta_1$ alors

$$\left| \frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} - 1 \right| < \epsilon.$$

En particulier, si $0 < |t| < \delta_1$ alors comme $\tan\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ et $\frac{t}{2} > 0$, on a

$$1 - \frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{t}{2} - \tan\left(\frac{t}{2}\right) < \epsilon\frac{t}{2} \Leftrightarrow (1-\epsilon)\frac{t}{2} < \tan\left(\frac{t}{2}\right). \tag{2.6}$$

Par hypothèse, on sait qu'il existe $C > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que si $|t| < \delta_2$ alors

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant C|t|^{\alpha}. \tag{2.7}$$

Posons $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Quitte à diminuer $\delta_0$, on peut supposer que $0 < \delta_0 < \pi$. Par conséquent, en utilisant (2.6) et (2.7), on obtient que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta_0} \frac{|\phi_x(t)|}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} dt &< \int_0^{\delta_0} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{(1-\epsilon)\frac{t}{2}} dt \\
&\leqslant \frac{2}{1-\epsilon}\left(\int_0^{\delta_0} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} dt + \int_0^{\delta_0} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{t} dt\right) \\
&\leqslant \frac{2}{1-\epsilon}\left(\int_0^{\delta_0} \frac{C|t|^{\alpha}}{t} dt + \int_0^{\delta_0} \frac{C|-t|^{\alpha}}{t} dt\right) \\
&= \frac{4C}{1-\epsilon}\int_0^{\delta_0} \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt.
\end{aligned}$$

Puisque $1 - \alpha < 1$, on en tire que l'intégrale

$$\int_0^{\delta_0} \frac{|\phi_x(t)|}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

existe et est finie. Enfin, pour tout $\eta > 0$, l'intégrale

$$\int_{\eta}^{\pi} \frac{|\phi_x(t)|}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} dt \tag{2.8}$$

existe et est finie parce que comme $f \in L^1(\mathbb{T})$, il s'ensuit que $\phi_x \in L^1(\mathbb{T})$ et si $t \in [\eta, \pi[$ alors on a $\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{-1} \leqslant \left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)^{-1}$ par décroissance de la fonction $\left(\tan\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right)^{-1}$ sur $]0, \pi[$. D'où la conclusion.

□

À partir du corollaire précédent 2.2.1, nous pouvons prouver la convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction dérivable sur $\mathbb{T}$.

**Corollaire 2.2.2.** *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$. Si $f$ est dérivable en $x$ alors la série de Fourier de $f$ converge au point $x$ vers $f(x)$. En particulier, si $f$ est dérivable sur $\mathbb{T}$ alors sa série de Fourier converge ponctuellement vers $f$.*

*Démonstration.* Puisque $f$ est dérivable en $x \in \mathbb{T}$, on sait que

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

existe et est fini. Soit $\epsilon > 0$. On en tire qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |t| < \eta$ alors

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x) \right| < \epsilon.$$

Ainsi, on obtient en posant $C = |f'(x)| + \epsilon > 0$ que

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant C|t| \quad \text{si } |t| < \eta.$$

On en déduit que

$$f(x+t) - f(x) = O(|t|) \ \text{ si } t \to 0.$$

La conclusion découle du corollaire précédent 2.2.1. □

## 2.3 Principe de localisation

Le deuxième principal résultat de convergence que nous allons démontrer est le principe de localisation. Pour ce faire, nous avons notamment besoin d'introduire le module continuité dans $L^p(\mathbb{T})$ d'une fonction de $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leqslant p < +\infty$ ainsi que de traiter certaines de ses propriétés. Les références [13] et [14] ont été consultées pour rédiger cette section.

**Définition 2.3.1.** Soient $1 \leqslant p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$. Le module de continuité dans $L^p(\mathbb{T})$ de $f$ est défini par

$$\omega_p(\delta) = \omega_p(\delta, f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $\delta > 0$.

Le lemme suivant sera également utilisé dans le troisième chapitre pour montrer que l'espace $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leqslant p < +\infty$ est un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$.

**Lemme 2.3.1.** *Soit* $1 \leqslant p < +\infty$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *alors*

$$\lim_{t \to 0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que $f$ est continu sur $\mathbb{T}$. Il suffit de montrer que

$$\lim_{t \to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx = 0.$$

Puisque $f$ est continu sur $\mathbb{T}$, on sait que

$$\lim_{t \to 0} |f(x+t) - f(x)|^p = 0$$

et on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\sup_{y \in \mathbb{T}} |f(y)| \leqslant C$. On en tire que si $x, t \in \mathbb{T}$ alors

$$|f(x+t) - f(x)|^p \leqslant (|f(x+t)| + |f(x)|)^p \leqslant \left( 2 \sup_{y \in \mathbb{T}} |f(y)| \right)^p \leqslant (2C)^p.$$

De plus, la fonction $x \mapsto (2C)^p$ appartient à $L^1(\mathbb{T})$. Ainsi, on obtient par le théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{t \to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx = \int_0^{2\pi} \lim_{t \to 0} |f(x+t) - f(x)|^p dx = 0.$$

Montrons à présent le cas général. Soit $\epsilon > 0$. On sait que le sous-espace de $L^p(\mathbb{T})$ déterminé par les fonctions de $C^0(\mathbb{T})$ est dense dans $L^p(\mathbb{T})$. Ainsi, il existe une fonction $\phi \in C^0(\mathbb{T})$ telle que

$$\|f - \phi\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.9}$$

Puisque $\phi$ est continu, il suit du premier cas traité qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|t| < \eta$ alors

$$\|\phi(\cdot + t) - \phi\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.10}$$

De plus, si $t \in \mathbb{T}$ alors on a

$$\begin{aligned}\|f(\cdot + t) - f\|_{L^p} &\leqslant \|f(\cdot + t) - \phi(\cdot + t)\|_{L^p} + \|f - \phi\|_{L^p} + \|\phi(\cdot + t) - \phi\|_{L^p} \\ &= \|f - \phi\|_{L^p} + \|f - \phi\|_{L^p} + \|\phi(\cdot + t) - \phi\|_{L^p}\end{aligned}$$

car en appliquant la substitution $y = x + t$, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x+t) - \phi(x+t)|^p dx = \int_t^{2\pi+t} |f(y) - \phi(y)|^p dy = \int_0^{2\pi} |f(y) - \phi(y)|^p dy$$

par périodicité. Par conséquent, on obtient en utilisant (2.9) et (2.10) que si $|t| < \eta$ alors

$$\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f(\cdot + t) - f\|_{L^p} < \epsilon.$$

On peut donc conclure.

$\square$

Nous allons voir que pour $1 \leqslant p < +\infty$, le module continuité dans $L^p(\mathbb{T})$ d'une fonction de $L^p(\mathbb{T})$ converge vers 0 lorsque $\delta$ tend vers 0.

**Lemme 2.3.2.** *Soit* $1 \leqslant p < +\infty$*. Si* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *alors* $\omega_p(\delta, f)$ *tend vers* 0 *lorsque* $\delta$ *tend vers* 0.

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$. Le lemme précédent 2.3.1 affirme que si $f \in L^p(\mathbb{T})$ alors

$$\lim_{h \to 0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que si $|h| \leqslant \eta$ alors

$$\left| \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| < \epsilon.$$

En particulier, on a

$$\sup_{0 \leqslant h \leqslant \eta} \left| \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| \leqslant \epsilon.$$

Par conséquent, on en tire que si $\delta > 0$ satisfait $\delta < \eta$ alors

$$\begin{aligned} |\omega_p(\delta, f)| &= \left| \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left| \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant h \leqslant \eta} \left| \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\ &\leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

$\square$

Le résultat suivant permet de majorer les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{T}$ par le module de continuité dans $L^1(\mathbb{T})$ de cette fonction. Remarquons que ce résultat combiné au lemme précédent 2.3.2 permet de démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue 1.2.1 rappelé dans le premier chapitre.

**Lemme 2.3.3.** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors*

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2}\, \omega_1 \left( \frac{\pi}{|n|} \right) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

*Démonstration.* Soit $n \neq 0$. On obtient en appliquant la substitution $t = u + \frac{\pi}{n}$ que

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt &= \int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi - \frac{\pi}{n}} f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in\left(u + \frac{\pi}{n}\right)} du \\ &= - \int_0^{2\pi} f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inu} du \end{aligned}$$

par périodicité des fonctions $f$ et $e_n$, où $e_n$ est défini par $e_n(x) = e^{inx}$ si $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{T}$. On en tire que

$$2\pi \hat{f}(n) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-int} dt.$$

On va distinguer deux cas. Si $n > 0$, on a

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - f(t) \right| dt \leqslant \frac{1}{2} \omega_1 \left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} \omega_1 \left( \frac{\pi}{|n|} \right).$$

Si $n < 0$, on pose $n' = -n > 0$. On a

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &\leqslant \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{n'}\right) \right| dt \\ &\leqslant \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{n'}}^{2\pi - \frac{\pi}{n'}} \left| f\left(v + \frac{\pi}{n'}\right) - f(v) \right| dv \\ &\leqslant \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(v + \frac{\pi}{n'}\right) - f(v) \right| dv \end{aligned}$$

grâce à la substitution $v = t - \frac{\pi}{n'}$. Par conséquent,

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2} \omega_1 \left( \frac{\pi}{n'} \right) = \frac{1}{2} \omega_1 \left( \frac{\pi}{|n|} \right).$$

$\square$

Le dernier résultat dont nous avons besoin pour prouver le principe de localisation est le suivant. Ce résultat concerne la convergence des coefficients de Fourier d'une fonction particulière.

**Lemme 2.3.4.** *Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g$ une fonction bornée et $x \in \mathbb{T}$. Les coefficients de Fourier de la fonction $\chi_x$ définie par $\chi_x(t) = f(x+t)g(t)$, pour $t \in \mathbb{T}$, tendent vers 0 uniformément en $x$.*

*Démonstration.* Les hypothèses impliquent que la fonction $\chi_x$ est intégrable. Par le lemme précédent 2.3.3, on sait donc que

$$|\widehat{\chi_x}(n)| \leqslant \frac{1}{2}\,\omega_1\left(\frac{\pi}{|n|}, \chi_x\right) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Ainsi, il suffit de montrer que $\omega_1(\delta, \chi_x)$ converge vers 0 uniformément en $x$ lorsque $\delta$ tend vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Supposons que $0 \leqslant h \leqslant \delta$ pour $\delta > 0$ et que $x \in \mathbb{T}$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\chi_x(t+h) - \chi_x(t)|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t+h) + f(x+t)g(t+h) - f(x+t)g(t)|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)||g(t+h)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t)||g(t+h) - g(t)|dt.
\end{aligned}$$

La fonction $g$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $|g| \leqslant M$. Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{T}$ et $0 \leqslant h \leqslant \delta$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)||g(t+h)|dt \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)|dt.$$

Puisque la fonction $f$ est $2\pi$-périodique, on obtient en appliquant la substitution $u = x+t$ que

$$\begin{aligned}
\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)|dt &= \frac{M}{2\pi}\int_x^{2\pi+x} |f(u+h) - f(u)|du \\
&\leqslant M \sup_{0\leqslant y\leqslant\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(u+y) - f(u)|du\right) \\
&= M\omega_1(\delta, f).
\end{aligned}$$

Étant donné que $\omega_1(\delta, f)$ ne dépend ni de $x$, ni de $h$, on a donc montré que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}}\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)||g(t+h)|dt\right) \leqslant M\omega_1(\delta, f).$$

Par le lemme 2.3.2, on sait que $\omega_1(\delta, f)$ tend vers 0 si $\delta$ tend vers 0. Ainsi, on en tire qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $0 < \delta < \delta_1$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)||g(t+h)|dt \right) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Puisque le sous-espace de $L^1(\mathbb{T})$ déterminé par les fonctions de $C^0(\mathbb{T})$ est dense dans $L^1(\mathbb{T})$, il existe une fonction $f_1 \in C^0(\mathbb{T})$ telle que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - f_1(t)|dt < \frac{\epsilon}{2M}. \tag{2.12}$$

Posons $f_2 = f - f_1$. Comme $f_1 \in C^0(\mathbb{T})$, la fonction $f_1$ est bornée. Disons que $|f_1| \leqslant B$, avec $B > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{T}$ et $0 \leqslant h \leqslant \delta$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t)||g(t+h) - g(t)|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(x+t)||g(t+h) - g(t)|dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_2(x+t)||g(t+h) - g(t)|dt \\
&\leqslant \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t+h) - g(t)|dt + \frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} |f_2(x+t)|dt \\
&\leqslant B\,\omega_1(\delta, g) + \epsilon,
\end{aligned}$$

grâce à (2.12). Comme précédemment, vu que $\omega_1(\delta, g)$ ne dépend ni de $x$, ni de $h$, on a donc montré que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t)||g(t+h) - g(t)|dt \right) \leqslant B\,\omega_1(\delta, g) + \epsilon.$$

Par le lemme 2.3.2, on sait que $\omega_1(\delta, g)$ converge vers 0 si $\delta$ tend vers 0. Ainsi, il existe $\delta_2 > 0$ tel que si $0 < \delta < \delta_2$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t)||g(t+h) - g(t)|dt \right) < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.13}$$

Posons $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Par conséquent, si $0 < \delta < \delta_0$ alors (2.11) et (2.13) impliquent que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{T}} \omega_1(\delta, \chi_x) &= \sup_{x\in\mathbb{T}} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\chi_x(t+h) - \chi_x(t)|\, dt \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{T}} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)||g(t+h)|dt \right) \\
&\qquad + \sup_{x\in\mathbb{T}} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t)||g(t+h) - g(t)|dt \right) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Cela implique que $\omega_1(\delta, \chi_x)$ converge vers 0 uniformément en $x$ lorsque $\delta$ tend vers 0.

□

Nous pouvons à présent démontrer le principe de localisation qui est un résultat de convergence uniforme. Nous verrons ensuite un corollaire de ce théorème ainsi qu'une propriété surprenante des séries de Fourier.

**Théorème 2.3.1.** ***(Principe de localisation)*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si $f$ s'annule sur un intervalle $I$ de $\mathbb{T}$ alors la série de Fourier de $f$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $I'$ intérieur à $I$.*

*Démonstration.* Soit $x \in I'$. Comme $I'$ est un intervalle intérieur à $I$, il existe $\eta$ satisfaisant $0 < \eta < \pi$ [1] tel que $]x-\eta, x+\eta[ \subset I$. Il s'ensuit que

$$f(x+t) = 0 \quad \text{si } |t| < \eta. \tag{2.14}$$

Considérons la fonction $2\pi$-périodique $\lambda$ définie par

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| < \eta \text{ ou si } t = -\pi \text{ ou si } t = \pi, \\ 1 & \text{si } t \in \left]-\pi, -\eta\right] \cup \left[\eta, \pi\right[. \end{cases}$$

Ainsi, grâce au lemme 2.1.2, au point 1. du lemme 2.1.1 et grâce à (2.14), on obtient que

$$S_n^{\circledast}(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n^{\circledast}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\lambda(t)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\sin(nt)dt. \tag{2.15}$$

Considérons également la fonction $2\pi$-périodique $g$ définie par

$$g(t) = \frac{\lambda(t)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \forall\, t \in \mathbb{T}\,.$$

On sait que $g$ est borné car

- si $t \in \left[\eta, \pi\right[$ alors $g(t) = \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{-1}$ et on a $\tan\left(\frac{\eta}{2}\right) \leqslant \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ par croissance de la fonction $\tan\left(\frac{\cdot}{2}\right)$ sur $\left[0, \pi\right[$. On en tire que

$$\left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)^{-1} \geqslant \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{-1} \geqslant 0$$

  car puisque $\frac{t}{2} \in \left[\frac{\eta}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$.
- De manière analogue, si $t \in \left]-\pi, -\eta\right]$ alors on a $g(t) = \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{-1}$ et on a

$$\left(\tan\left(\frac{-\eta}{2}\right)\right)^{-1} \leqslant \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{-1} \leqslant 0.$$

1. Quitte à diminuer $\eta > 0$, on peut supposer que $\eta < \pi$.

· Si $t \in \,]-\eta, \eta[\, \cup \{-\pi, \pi\}$ alors $g(t) = 0$.

Puisque la fonction $g$ est $2\pi$-périodique et puisque $\left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)^{-1}$ et $\left(\tan\left(\frac{-\eta}{2}\right)\right)^{-1}$ sont des constantes, on obtient donc que $g$ est borné.

En outre, les égalités (8) et (2.15) montrent que $2S_n^{\circledast}(f,x)$ est le $(n+1)^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier en sinus de la fonction $f(x+\cdot\,)\,g$. On peut donc appliquer le lemme 2.3.4 et on en tire que $S_n^{\circledast}(f)$ converge vers 0 uniformément sur $I'$ si $n$ tend vers l'infini. Par le proposition 2.1.1, il en est de même pour la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$. On peut donc conclure que la série de Fourier de $f$ converge uniformément vers 0 sur $I'$.

□

Nous pouvons déduire du théorème précédent un corollaire qui permettra notamment de comprendre le nom donné à ce théorème, à savoir *principe de localisation.* Notons que ce corollaire est également nommé *principe de localisation.* Celui-ci fait appel à la notion de séries uniformément équiconvergentes.

**Définition 2.3.2.** Soient $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j$ et $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j$ deux séries qui ne sont pas nécessairement convergentes. Ces séries sont dites uniformément équiconvergentes si la série

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (u_j - v_j)$$

converge uniformément vers 0.

**Corollaire 2.3.1.** ***(Principe de localisation)*** *Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions égales sur un intervalle $I$ de $\mathbb{T}$ et telles que $f_1 - f_2 \in L^1(\mathbb{T})$. Alors, la série de Fourier de $f_1$ et la série de Fourier de $f_2$ sont uniformément équiconvergentes sur tout intervalle $I'$ intérieur à $I$.*

*Démonstration.* Posons $f = f_1 - f_2$. Par hypothèse, on sait que $f = 0$ sur $I$. Le théorème 2.3.1 implique que la série de Fourier de $f$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $I'$ intérieur à $I$. Or, on sait par la proposition 1.2.1 que si $x \in \mathbb{T}$ alors

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(j)e^{ijx} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\hat{f}_1(j)e^{ijx} - \hat{f}_2(j)e^{ijx}\right).$$

La conclusion découle de la définition 2.3.2.

□

Plaçons-nous dans les hypothèses de ce corollaire. Puisque $f_1 = f_2$ sur $I$, on n'a pas forcément $f_1 = f_2$ presque partout. On sait que les coefficients de Fourier d'une fonction dépendent des valeurs de cette fonction sur un intervalle de longueur $2\pi$. Ainsi, les coefficients de Fourier de $f_1$ et de $f_2$ ne sont pas forcément égaux. Cela implique que la série de Fourier de $f_1$ et la série de Fourier de $f_2$ ne sont pas forcément égales. Pourtant, on se rend compte qu'elles ont le même comportement (convergence ou divergence) sur tout intervalle $I'$ intérieur à $I$.

Par conséquent, ce corollaire nous apprend que la convergence ou la divergence de la série de Fourier d'une fonction $f$ en un point $x \in \mathbb{T}$ dépend uniquement du comportement de $f$ sur un voisinage ouvert arbitrairement petit de $x$. Pour cette raison, on nomme *principe de localisation* le théorème 2.3.1 et son corollaire 2.3.1.

## 2.4 Théorème de Dirichlet-Jordan

En 1829, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) prouve un théorème concernant la convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction définie sur $\mathbb{T}$ ayant un nombre fini de points de discontinuités et un nombre fini d'extrema. Afin d'englober d'autres cas, Camille Jordan (1838-1922) généralise ce théorème en 1881 aux fonctions localement à variation bornée. Afin de prouver ce théorème, nous avons besoin de nombreux résultats et notamment le théorème de Fejér. Nous devrons également étudier les fonctions à variation bornée sur un intervalle.

### 2.4.1 Théorème de Fejér

La preuve du théorème de Fejér est basée sur le fait que le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité positif qui a les propriétés suivantes. La référence [8] a été utilisée pour rédiger cette sous-section.

**Lemme 2.4.1.1.**

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathbb{T}$, *on a* $K_n(x) = K_n(-x)$.
2. *Si* $0 < \theta < \pi$ *alors on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left( \sup\limits_{\theta<x<2\pi-\theta} K_n(x) \right) = 0$.

*Démonstration.*

1. En appliquant le point 2. du lemme 1.3.2.1, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{T}$ que

$$K_n(-x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ij(-x)}.$$

En effectuant le changement d'indice $j' = -j$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} K_n(-x) &= \sum_{j'=-n}^{n} \left(1 - \frac{|-j'|}{n+1}\right) e^{ij'x} \\ &= \sum_{j'=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j'|}{n+1}\right) e^{ij'x} \\ &= K_n(x). \end{aligned}$$

2. Soient $x \in \mathbb{T}$, $0 < \theta < \pi$ et $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors
$$\left| \sup_{\theta < x < 2\pi - \theta} K_n(x) \right| < \epsilon.$$
Le point 1. du lemme 1.3.2.1 implique que
$$\begin{aligned} \left| \sup_{\theta < x < 2\pi - \theta} K_n(x) \right| &= \sup_{\theta < x < 2\pi - \theta} \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 \\ &\leqslant \sup_{\theta < x < 2\pi - \theta} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$
Or, on a
$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
car
   - · si $\frac{\theta}{2} < \frac{x}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors on a $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ par croissance de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
   - · si $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi - \frac{\theta}{2}$ alors on a $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) < \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ par décroissance de la fonction sinus sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

   Par conséquent, on obtient que
$$\left| \sup_{\theta < x < 2\pi - \theta} K_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$
Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $\frac{1}{n+1} < \epsilon \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. D'où la conclusion.

□

Nous pouvons prouver le théorème de Fejér qui donne des conditions pour que la suite $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement ou uniformément. Ce théorème nous aidera pour démontrer le théorème de Dirichlet-Jordan.

**Théorème 2.4.1.1.** ***(Fejér)*** *Soit $f$ une fonction à valeurs réelles appartenant à $L^1(\mathbb{T})$.*

1. *Soit $x_0 \in \mathbb{T}$ et supposons que*
$$\lim_{h \to 0^+} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h))$$
*existe (on autorise $\pm\infty$ comme valeur pour la limite) alors*
$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n(f, x_0) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0^+} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h)).$$
*En particulier, si $x_0$ est un point de continuité de $f$ alors*
$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n(f, x_0) = f(x_0).$$

2. *Si $f$ est continu sur un intervalle fermé $I$ de $\mathbb{T}$ alors $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ uniformément sur $I$.*

*Démonstration.*

1. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{T}$ et supposons que

$$\widetilde{f}(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} < +\infty.$$

Étant donné que le produit de convolution est commutatif et que le noyau de Fejér $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la condition $(S_1)$ de la définition 1.3.1, on obtient par la définition 1.3.3.1 de la somme de Fejér que

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x_0) - \widetilde{f}(x_0) &= (K_n * f)(x_0) - \widetilde{f}(x_0)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)f(x_0-x)dx - \widetilde{f}(x_0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)(f(x_0-x)-\widetilde{f}(x_0))dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} K_n(x)(f(x_0-x)-\widetilde{f}(x_0))dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(x)(f(x_0-x)-\widetilde{f}(x_0))dx.\end{aligned}$$

La dernière égalité se justifie par périodicité des fonctions $K_n$ et $f$ et donc de la fonction $f(x_0 - \cdot\,)$. En effectuant la substitution $t = -x$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{0} K_n(x)(f(x_0-x)-\widetilde{f}(x_0))dx &= \int_0^{\pi} K_n(-t)(f(x_0+t)-\widetilde{f}(x_0))dt\\ &= \int_0^{\pi} K_n(t)(f(x_0+t)-\widetilde{f}(x_0))dt\end{aligned}$$

où la dernière égalité a lieu par le point 1. du lemme 2.4.1.1. On en tire que

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x_0) - \widetilde{f}(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(x)(f(x_0+x)-\widetilde{f}(x_0))dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(x)(f(x_0-x)-\widetilde{f}(x_0))dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(x)(f(x_0+x)+f(x_0-x)-2\widetilde{f}(x_0))dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(x)\left(\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right)dx.\end{aligned}$$

On en déduit que si $0 < \theta < \pi$ alors

$$\begin{aligned}\left|\sigma_n(f,x_0) - \widetilde{f}(x_0)\right| \leqslant{}& \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta} K_n(x)\left(\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right)dx\right|\\ &+ \left|\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi} K_n(x)\left(\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right)dx\right|.\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Au vu du choix de la notation $\widetilde{f}(x_0)$, il existe $\theta$ satisfaisant $0 < \theta < \pi$ et tel que si $0 \leqslant x \leqslant \theta$ alors

$$\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{2.16}$$

Considérons un tel $\theta$. Comme $K_n(x) \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{T}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\theta K_n(x)\left(\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right)dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\theta |K_n(x)|\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right|dx \\
&< \frac{\epsilon}{4\pi}\int_0^\theta K_n(x)dx \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

la dernière égalité ayant lieu car $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la condition $(S_1)$ de la définition 1.3.1.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi K_n(x)\left(\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right)dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi \sup_{\theta<y<2\pi-\theta} K_n(y)\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right|dx
\end{aligned}$$

car $K_n(x) \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{T}$ et parce que $2\pi - \theta > \pi$. Le point 2. du lemme 2.4.1.1 implique qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$ alors [2]

$$\sup_{\theta<y<2\pi-\theta} K_n(y) < \frac{\epsilon}{4\|f-\widetilde{f}(x_0)\|_{L^1}}. \tag{2.17}$$

On en tire que si $n \geqslant N_0$ alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi \sup_{\theta<x<2\pi-\theta} K_n(x)\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right|dx \\
&< \frac{\epsilon}{4\pi\|f-\widetilde{f}(x_0)\|_{L^1}}\int_\theta^\pi \left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} - \widetilde{f}(x_0)\right|dx \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{8\pi\|f-\widetilde{f}(x_0)\|_{L^1}}\int_\theta^\pi |(f-\widetilde{f}(x_0))(x_0+x)| + |(f-\widetilde{f}(x_0))(x_0-x)|dx \\
&= \frac{\epsilon}{8\pi\|f-\widetilde{f}(x_0)\|_{L^1}}\left(\int_0^{2\pi} |(f-\widetilde{f}(x_0))(x_0+x)|dx + \int_0^{2\pi} |(f-\widetilde{f}(x_0))(x_0-x)|dx\right).
\end{aligned}$$

2. Puisqu'on suppose que $\widetilde{f}(x_0)$ est fini, $\widetilde{f}(x_0)$ est une constante. Donc, $f-\widetilde{f}(x_0) \in L^1(\mathbb{T})$ car $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Or, en appliquant la substitution $t = x_0 + x$, on a

$$\int_0^{2\pi} |(f - \widetilde{f}(x_0))(x_0 + x)|dx = \int_{x_0}^{2\pi + x_0} |(f - \widetilde{f}(x_0))(t)|dt = \int_0^{2\pi} |(f - \widetilde{f}(x_0))(t)|dt$$

car la fonction $f$ est $2\pi$-périodique. De plus, en effectuant la substitution $t = x_0 - x$, on a

$$\int_0^{2\pi} |(f - \widetilde{f}(x_0))(x_0 - x)|dx = \int_{x_0 - 2\pi}^{x_0} |(f - \widetilde{f}(x_0))(t)|dt \ = \int_0^{2\pi} |(f - \widetilde{f}(x_0))(t)|dt$$

par périodicité. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\pi} \int_\theta^\pi K_n(x) \left( \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x)}{2} - \widetilde{f}(x_0) \right) dx \right| \\
&< \frac{\epsilon}{8\pi \|f - \widetilde{f}(x_0)\|_{L^1}} \left( \int_0^{2\pi} |(f - \widetilde{f}(x_0))(t)|dt + \int_0^{2\pi} |(f - \widetilde{f}(x_0))(t)|dt \right) \\
&= \frac{\epsilon}{2\|f - \widetilde{f}(x_0)\|_{L^1}} \|f - \widetilde{f}(x_0)\|_{L^1} = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $n \geqslant N_0$ alors on obtient que

$$|\sigma_n(f, x_0) - \widetilde{f}(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ce qui donne la conclusion.

(b) Soit $x_0 \in \mathbb{T}$ et supposons à présent que

$$\lim_{h \to 0^+} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h)) = +\infty.$$

En particulier, il en découle que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} = +\infty.$$

En réalisant un raisonnement similaire à celui appliqué au point (a), on a

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f, x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) f(x_0 - x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 K_n(x) f(x_0 - x)dx + \int_0^\pi K_n(x) f(x_0 - x)dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi K_n(x) f(x_0 + x)dx + \int_0^\pi K_n(x) f(x_0 - x)dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_n(x) \frac{f(x_0 + x) + f(x_0 - x)}{2} dx.
\end{aligned}$$

Soit $M > 0$. Puisqu'on suppose que $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} = +\infty$, il existe $\theta$ satisfaisant $0 < \theta < \pi$ et tel que $0 \leqslant x \leqslant \theta$ implique que

$$\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} > M. \tag{2.18}$$

Considérons un tel $\theta$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(f,x_0)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta K_n(x)\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}dx + \frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi K_n(x)\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}dx\\
&\geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\theta K_n(x)\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}dx - \frac{1}{\pi}\left|\int_\theta^\pi K_n(x)\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}dx\right|\\
&> \frac{M}{\pi}\int_0^\theta K_n(x)dx - \frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi K_n(x)\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}\right|dx
\end{aligned}$$

en utilisant (2.18) et parce que $K_n(x) \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{T}$. En outre, si $x \in ]\theta,\pi]$ alors comme $2\pi - \theta > \pi$, on a

$$K_n(x) \leqslant \sup_{\theta<y<2\pi-\theta} K_n(y).$$

Grâce au point 2. du lemme 2.4.1.1, on sait qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$ alors

$$\sup_{\theta<y<2\pi-\theta} K_n(y) < \frac{M}{6\|f\|_{L^1}}.$$

Il s'ensuit que si $n \geqslant N_0$ alors

$$\int_\theta^\pi K_n(x)\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}\right|dx < \frac{M}{6\|f\|_{L^1}}\left(\int_{-\pi}^\pi \left|\frac{f(x_0+x)}{2}\right|dx + \int_{-\pi}^\pi \left|\frac{f(x_0-x)}{2}\right|dx\right).$$

Or, en effectuant la substitution $t = x_0 + x$, on a

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{|f(x_0+x)|}{2}dx = \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi}\frac{|f(t)|}{2}dt = \int_{-\pi}^\pi \frac{|f(t)|}{2}dt$$

par périodicité. On procède de manière similaire pour $\int_{-\pi}^\pi \frac{|f(x_0-x)|}{2}dx$. On en tire que si $n \geqslant N_0$ alors

$$\int_\theta^\pi K_n(x)\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}\right|dx < \frac{M}{6\|f\|_{L^1}}\int_{-\pi}^\pi |f(t)|dt = 2\pi\frac{M}{6\|f\|_{L^1}}\|f\|_{L^1} = \frac{M\pi}{3}.$$

Par conséquent, si $n \geqslant N_0$ alors

$$\sigma_n(f,x_0) > \frac{M}{\pi}\int_0^\theta K_n(x)dx - \frac{M}{3}.$$

Comme $0 < \theta < \pi$, remarquons que

$$\int_0^\theta K_n(x)dx = \int_0^{2\pi-\theta} K_n(x)dx - \int_\theta^{2\pi-\theta} K_n(x)dx \geqslant \int_0^\pi K_n(x)dx - \int_\theta^{2\pi-\theta} K_n(x)dx.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $K_n$ satisfait la propriété $(S_1)$ de la définition 1.3.1. Ainsi, la périodicité de $K_n$ et le point 1. du lemme 2.4.1.1 impliquent

$$2\pi = \int_0^{2\pi} K_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 2\int_0^\pi K_n(x)dx.$$

Il suit que $\int_0^\pi K_n(x)dx = \pi$. De plus, puisque le noyau $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positif et vérifie la propriété $(S_3)$ de la définition 1.3.1, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$ alors

$$\int_\theta^{2\pi-\theta} K_n(x)dx < \frac{\pi}{3}.$$

Dans ce cas,

$$\int_0^\theta K_n(x)dx \geqslant \int_0^\pi K_n(x)dx - \int_\theta^{2\pi-\theta} K_n(x)dx > \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Posons $N = \max\{N_0, N_1\}$. On a donc obtenu que si $n \geqslant N$ alors

$$\sigma_n(f,x_0) > \frac{M}{\pi}\int_0^\theta K_n(x)dx - \frac{M}{3} > \frac{2M}{3} - \frac{M}{3} = \frac{M}{3}.$$

On peut donc conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(f,x_0) = +\infty.$$

(c) Soit $x_0 \in \mathbb{T}$. On traite de manière similaire le cas

$$\lim_{h\to 0^+} (f(x_0+h) + f(x_0-h)) = -\infty$$

en considérant $M > 0$ et $0 < \theta < \pi$ pour que $0 \leqslant x \leqslant \theta$ implique que

$$\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2} < -M.$$

Par un raisonnement analogue à celui du point (b), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$ alors

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(f,x_0)\\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\theta K_n(x)\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}dx + \frac{1}{\pi}\left|\int_\theta^\pi K_n(x)\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}dx\right|\\
&< \frac{-M}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx + \frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi K_n(x)\left|\frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}\right|dx\\
&< \frac{-M}{\pi}2\pi + \frac{M}{3} = \frac{-5M}{6}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(f, x_0) = -\infty.$$

2. Pour tout $x_0 \in I$, on a vu au point 1. que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(f, x_0) = f(x_0).$$

De plus, on peut rendre le choix de $N_0$ pour satisfaire (2.17) dans le point 1. indépendant de $x_0 \in I$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|f - \widetilde{f}(x_0)\|_{L^1} = \|f - f(x_0)\|_{L^1} &\leqslant \|f\|_{L^1} + \|f(x_0)\|_{L^1} \\ &\leqslant \|f\|_{L^1} + |f(x_0)| \\ &\leqslant \|f\|_{L^1} + \sup_{x\in I} |f(x)| \\ &\leqslant C \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante parce que $f \in L^1(\mathbb{T})$ et parce que $f$ est continu sur l'intervalle compact $I$. Il suffit donc de prendre $N_0 \in \mathbb{N}$ pour que $n \geqslant N_0$ implique

$$\sup_{\theta<y<2\pi-\theta} K_n(y) < \frac{\epsilon}{4C}.$$

On en déduit que sur $I$, le choix de $N_0$ dépend uniquement de $\theta$ et de $\epsilon$. De plus, puisque toute fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact, on en tire que $f$ est uniformément continu sur $I$. Ainsi, on peut choisir $\theta$ de sorte que (2.16) soit vérifié pour tout $x_0 \in I$. Donc le choix de $\theta$ est indépendant de $x_0$. Par conséquent, le choix de $N_0$ est également indépendant de $x_0$ et il s'ensuit que $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $I$.

$\square$

Pour clore cette sous-section, nous allons également montrer que sous certaines conditions, la convergence ponctuelle (resp. uniforme) de la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ implique la convergence ponctuelle (resp. uniforme) de la série de Fourier de $f$. Pour démontrer ce résultat, le lemme suivant nous sera utile.

**Lemme 2.4.1.2.** *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de complexes telle que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ si $n \to \infty$ alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\lambda > 1$ tel que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{n<|j|\leqslant\lambda n} |a_j| < \epsilon.$$

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $C_0 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$|a_n| \leqslant \frac{C_0}{|n|} \quad \forall\, |n| \geqslant N.$$

De plus, si on pose $C_1 = N \max_{|m|<N} |a_m|$ alors pour tout $0 < |n| < N$, on a

$$|a_n| \leqslant \max_{|m|<N} |a_m| < \frac{C_1}{|n|}.$$

Posons $C = \max\{C_0, C_1\}$, on en déduit que

$$|a_n| \leqslant \frac{C}{|n|} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2.19}$$

Soit $\lambda$ un réel satisfaisant [3]

$$1 < \lambda < e^{\frac{\epsilon}{2C}}$$

et soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que si $n \geqslant N$ alors [4] $n < \lfloor \lambda n \rfloor$. Pour tout $n \geqslant N$, la majoration (2.19) permet d'obtenir que [5]

$$\sum_{n<|j|\leqslant \lambda n} |a_j| \leqslant C \sum_{n<|j|\leqslant \lambda n} \frac{1}{|j|} = 2C \sum_{n<j\leqslant \lambda n} \frac{1}{j}.$$

Si $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et si $x \in [j-1, j]$ alors on a $\frac{1}{j} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{j-1}$. Il s'ensuit donc que

$$\frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{j-1}.$$

Par conséquent, on en tire que [6] si $n \geqslant N$ alors

$$\begin{aligned} 2C \sum_{n<j\leqslant \lambda n} \frac{1}{j} \leqslant 2C \sum_{n<j\leqslant \lambda n} \int_{j-1}^{j} \frac{1}{x}\, dx &= 2C \int_{n}^{\lambda n} \frac{1}{x}\, dx \\ &= 2C(\ln(\lambda n) - \ln(n)) \\ &= 2C \ln\left(\frac{\lambda n}{n}\right) \\ &= 2C \ln(\lambda) < 2C \ln(e^{\frac{\epsilon}{2C}}) = \epsilon \end{aligned}$$

au vu du choix de $\lambda$ et parce que la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On obtient donc la conclusion.

□

Nous allons voir que sous certaines conditions, la convergence ponctuelle (resp. uniforme) de la suite $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ sur un certain ensemble pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ implique la convergence ponctuelle (resp. uniforme) de la série de Fourier de $f$ sur ce même ensemble et vers la même limite.

3. Il est possible de trouver un tel réel car $\frac{\epsilon}{2C} > 0$.
4. La partie entière de $\lambda n$ est notée $\lfloor \lambda n \rfloor$.
5. L'indice $j$ de sommation est non nul vu que $|j| > n \geqslant 1$.
6. Étant donné que $j > n \geqslant 1$, on a $j \notin \{0, 1\}$.

**Proposition 2.4.1.1.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et supposons que $\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ si $n \to \infty$. Si la suite $(\sigma_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $x \in \mathbb{T}$ alors la suite $(S_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite. De plus, si $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur un ensemble alors il en est de même pour $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.*

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$. Le lemme 2.4.1.2 implique qu'il existe $\lambda > 1$ tel que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{n<|j|\leqslant\lambda n} |\hat{f}(j)| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{2.20}$$

Considérons un tel $\lambda$. Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que si $n \geqslant N_1$ alors $n < \lfloor\lambda n\rfloor$ et

$$\sum_{n<|j|\leqslant\lambda n} |\hat{f}(j)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Pour tout $n \geqslant N_1$ et pour tout $x \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned}
&S_n(f,x)\\
&= \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijx}\\
&= \frac{1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\left(\lfloor\lambda n\rfloor \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijx} - n\sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijx}\right)\\
&= \frac{1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\left(\sum_{j=-n}^{n} (\lfloor\lambda n\rfloor + 1 - |j|)\hat{f}(j)e^{ijx} - \left(\sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|)\hat{f}(j)e^{ijx}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\left((\lfloor\lambda n\rfloor + 1)\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx} - (n+1)\left(\sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\lfloor\lambda n\rfloor - n}\left((\lfloor\lambda n\rfloor + 1)\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx} - (n+1)\sigma_n(f,x)\right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

La dernière égalité provient du lemme 1.3.3.1. En appliquant à nouveau ce lemme, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx}\\
&= \sum_{j=-\lfloor\lambda n\rfloor}^{\lfloor\lambda n\rfloor}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx} - \left(\sum_{n<|j|\leqslant\lfloor\lambda n\rfloor}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx}\right)\\
&= \sigma_{\lfloor\lambda n\rfloor}(f,x) - \left(\sum_{n<|j|\leqslant\lfloor\lambda n\rfloor}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx}\right).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Par conséquent, en rassemblant (2.21) et (2.22), il s'ensuit que

$$S_n(f,x) = \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\sigma_n(f,x) - \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\left(\sum_{n<|j|\leqslant \lfloor \lambda n \rfloor}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx}\right). \tag{2.23}$$

Supposons à présent que $(\sigma_n(f,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sigma(f,x_0)$ pour $x_0 \in \mathbb{T}$. L'égalité (2.23) permet d'obtenir que si $n \geqslant N_1$ alors

$$\begin{aligned}
&|S_n(f,x_0) - \sigma(f,x_0)| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}((\lfloor \lambda n \rfloor + 1)\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x_0) - (n+1)\sigma_n(f,x_0)) - \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1 - (n+1)}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\sigma(f,x_0)\right| \\
&\qquad + \left|\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\right|\left|\sum_{n<|j|\leqslant \lfloor \lambda n \rfloor}\left(1 - \frac{|j|}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}\right)\hat{f}(j)e^{ijx_0}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\left[(\lfloor \lambda n \rfloor + 1)(\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x_0) - \sigma(f,x_0)) - (n+1)(\sigma_n(f,x_0) - \sigma(f,x_0))\right]\right| \\
&\qquad + \left|\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\right|\sum_{n<|j|\leqslant \lfloor \lambda n \rfloor}\left|1 - \frac{|j|}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}\right||\hat{f}(j)|\left|e^{ijx_0}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\right|\left|\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f,x_0) - \sigma(f,x_0)\right| + \left|\frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\right||\sigma_n(f,x_0) - \sigma(f,x_0)| \\
&\qquad + \left|\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n}\right|\left|1 - \frac{n}{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}\right|\sum_{n<|j|\leqslant \lfloor \lambda n \rfloor}|\hat{f}(j)|.
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor \lambda n \rfloor}{\lambda n} = 1$$

car

- $\lfloor \lambda n \rfloor \leqslant \lambda n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lfloor \lambda n \rfloor}{\lambda n} \leqslant 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor \lambda n \rfloor = \lambda n - \{\lambda n\}$ où $\{\lambda n\}$ désigne la partie fractionnaire de $\lambda n$ et satisfait $0 \leqslant \{\lambda n\} < 1$. On en tire que

$$\frac{\lfloor \lambda n \rfloor}{\lambda n} = \frac{\lambda n - \{\lambda n\}}{\lambda n} = 1 - \frac{\{\lambda n\}}{\lambda n} \geqslant 1 - \frac{1}{\lambda n}$$

  et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lfloor \lambda n \rfloor}{\lambda n} \geqslant 1$.

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor\lambda n\rfloor+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda n+1}{\lambda n-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)}{n(\lambda-1)}=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Posons $C_1=\frac{\lambda}{\lambda-1}+\epsilon>0$. On en déduit qu'il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant n_1$ alors

$$\left|\frac{\lfloor\lambda n\rfloor+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}\right|<C_1.$$

De même, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\lambda n-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n(\lambda-1)}=\frac{1}{\lambda-1}.$$

Posons $C_2=\frac{1}{\lambda-1}+\epsilon>0$. Il existe donc $n_2\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant n_2$ alors

$$\left|\frac{n+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}\right|<C_2.$$

Posons $C=\max\{C_1,C_2\}$ et $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. On obtient que si $n\geqslant n_0$ alors

$$\left|\frac{\lfloor\lambda n\rfloor+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}\right|<C\quad\text{et}\quad\left|\frac{n+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}\right|<C.$$

En outre, on a aussi

$$\frac{\lfloor\lambda n\rfloor+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}\left(1-\frac{n}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)=\frac{\lfloor\lambda n\rfloor+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}-\frac{n}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}=1+\frac{1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}.$$

On en tire que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor\lambda n\rfloor+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}\left(1-\frac{n}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right)=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\lambda n-n}=1+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(\lambda-1)}=1.$$

Ainsi, il existe $n_3\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant n_3$ alors

$$\left|\frac{\lfloor\lambda n\rfloor+1}{\lfloor\lambda n\rfloor-n}\right|\left|1-\frac{n}{\lfloor\lambda n\rfloor+1}\right|\leqslant 2.$$

Puisqu'on suppose que $(\sigma_n(f,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sigma(f,x_0)$, on sait qu'il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_2$ alors

$$\left|\sigma_{\lfloor\lambda n\rfloor}(f,x_0)-\sigma(f,x_0)\right|<\frac{\epsilon}{4C}\quad\text{et}\quad\left|\sigma_n(f,x_0)-\sigma(f,x_0)\right|<\frac{\epsilon}{4C}.$$

Posons $N_0=\max\{n_0,n_3,N_1\}$. Si $n\geqslant N_0$ alors

$$|S_n(f,x_0)-\sigma(f,x_0)|<C\left|\sigma_{\lfloor\lambda n\rfloor}(f,x_0)-\sigma(f,x_0)\right|+C\left|\sigma_n(f,x_0)-\sigma(f,x_0)\right|+\frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $N = \max\{N_0, N_2\}$. Si $n \geqslant N$ alors

$$|S_n(f, x_0) - \sigma(f, x_0)| < \epsilon.$$

Par conséquent, on a montré que $\lim_{n\to+\infty} S_n(f, x_0) = \sigma(f, x_0)$. Étant donné que le choix de $N_0$ ne dépend pas de $x_0$, le choix de $N$ dépend uniquement de la vitesse de convergence de $(\sigma_n(f, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sigma(f, x_0)$. Par conséquent, si la convergence de $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sigma(f)$ est uniforme sur un certain ensemble, il en est de même pour la convergence de $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sigma(f)$.

□

### 2.4.2 Fonctions à variation bornée sur un intervalle

Dans l'introduction, il a été dit qu'une fonction est dite continue, dérivable, intégrable, à variation bornée, ... sur $\mathbb{T}$ si la fonction $2\pi$-périodique définie sur $\mathbb{R}$ qui lui correspond satisfait ces propriétés sur un intervalle de longueur $2\pi$. Dans les hypothèses du théorème de Dirichlet-Jordan, on considère une fonction à variation bornée sur $\mathbb{T}$. Rappelons donc la définition d'une fonction à variation bornée sur un intervalle $[a, b]$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Celle-ci provient de la référence [3].

**Définition 2.4.1.** La variation d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) = \sup_{\pi_{[a,b]}} \sum_{k=1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\}$ de $[a, b]$. On pose $\mathcal{V}_{c,c}(f) = 0$ pour tout $c \in [a, b]$.

On dit que $f$ est à variation bornée (sur $[a, b]$) si $\mathcal{V}_{a,b}(f) < +\infty$.

Pour toute partition $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\}$ de $[a, b]$, on pose

$$|\pi_{[a,b]}| = \max_{1\leqslant k\leqslant p} (t_k - t_{k-1})$$

et

$$\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) = \sum_{k=1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Si $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\}$ et $\pi'_{[a,b]} = \{a = t'_0 < t'_1 < ... < t'_q = b\}$ sont deux partitions de $[a, b]$, on dit qu'elles sont égales si $p = q$ et si $t_j = t'_j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, p\}$.

Donnons des exemples de fonctions à variation bornée sur un intervalle. Ceux-ci proviennent de la référence [5].

**Exemples 2.4.2.1.**

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante alors $f$ est à variation bornée sur $[a, b]$. En effet, pour toute partition $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\}$ de $[a, b]$, on a

$$\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) = \sum_{k=1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = f(t_p) - f(t_0) = f(b) - f(a).$$

Ainsi, on a

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) = f(b) - f(a) < +\infty.$$

On obtient de manière similaire que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante alors $f$ est à variation bornée sur $[a, b]$ et on a $\mathcal{V}_{a,b}(f) = f(a) - f(b)$.

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction $L$-Lipschitzienne alors $f$ est à variation bornée sur $[a, b]$. En effet, pour toute partition $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\}$ de $[a, b]$, on a

$$\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) = \sum_{k=1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leqslant L \sum_{k=1}^{p} |t_k - t_{k-1}| = L(b - a).$$

On en tire que

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) \leqslant L(b - a) < +\infty.$$

Nous allons étudier certaines propriétés des fonctions à variation bornée sur un intervalle. La première propriété que nous allons voir semble naturelle : toute fonction à variation bornée est bornée.

**Lemme 2.4.2.1.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction à variation bornée sur $[a, b]$ alors cette fonction est bornée.*

*Démonstration.* Soit $x \in ]a, b[$. Considérons la partition $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < x < t_2 = b\}$ et remarquons que

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) \geqslant |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \geqslant |f(x) - f(a)| \geqslant |f(x)| - |f(a)|.$$

Étant donné que $f$ est à variation bornée sur $[a, b]$, il existe $C' > 0$ tel que $\mathcal{V}_{a,b}(f) \leqslant C'$. Il s'ensuit que $|f(x)| \leqslant |f(a)| + C'$ pour tout $x \in ]a, b[$.
En considérant la partition $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 = b\}$ et en procédant de manière similaire, on obtient que

$$|f(b)| \leqslant |f(a)| + C'$$

De plus, on a $|f(a)| \leqslant |f(a)| + C'$. En posant $C = |f(a)| + C'$, on en tire que $|f(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in [a, b]$. D'où la conclusion.

□

Nous aimerions montrer que toute fonction réelle à variation bornée peut s'écrire comme la différence de deux fonctions réelles, croissantes et bornées. Pour cela, nous avons besoin de deux lemmes. Les trois lemmes suivants se basent sur les références [5] et [10].

**Lemme 2.4.2.2.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction à variation bornée sur $[a,b]$ alors $f$ est à variation bornée sur $[a,x]$ et sur $[x,b]$ pour tout $x \in [a,b]$.*

*Démonstration.* Si $x = a$ ou si $x = b$ alors comme $\mathcal{V}_{c,c}(f) = 0$ pour tout $c \in [a,b]$, on obtient le résultat annoncé. Supposons donc que $x \in \,]a,b[$. Il suffit de montrer que

$$\mathcal{V}_{a,x}(f) \leqslant \mathcal{V}_{a,b}(f) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{x,b}(f) \leqslant \mathcal{V}_{a,b}(f).$$

Soit $\pi_{[a,x]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_r = x\}$ une partition de $[a,x]$. Afin d'obtenir $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\}$ une partition de $[a,b]$, on ajoute à $\pi_{[a,x]}$ des réels [7] $t_{r+1}, ..., t_p$ satisfaisant $t_r < t_{r+1} < ... < t_p = b$. On obtient que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(f, \pi_{[a,x]}) &= \sum_{k=1}^{r} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{r} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=r+1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\
&= \mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) \leqslant \mathcal{V}_{a,b}(f).
\end{aligned}$$

On en tire que $\mathcal{V}_{a,x}(f) \leqslant \mathcal{V}_{a,b}(f)$. On traite de manière similaire l'autre cas.

□

**Lemme 2.4.2.3.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction à variation bornée sur $[a,b]$ alors*

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) = \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f) \qquad \textit{pour tout } x \in [a,b]\,.$$

*Démonstration.* Si $x = a$ ou si $x = b$ alors comme $\mathcal{V}_{c,c}(f) = 0$ pour tout $c \in [a,b]$, on obtient le résultat annoncé. Supposons donc que $x \in \,]a,b[$. Montrons d'abord que

$$\mathcal{V}_{a,b}(f) \leqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f). \tag{2.24}$$

Soit $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b\}$ une partition de $[a,b]$. Posons

$$\pi'_{[a,b]} = \{a = t'_0 < t'_1 < ... < t'_q = b\},$$

une partition de $[a,b]$ construite à partir de $\pi_{[a,b]}$ en ajoutant $x$ si $x$ n'appartient pas à la partition $\pi_{[a,b]}$. Soit $r \in \mathbb{N} \backslash \{0, q\}$ tel que $x = t'_r$. Posons

$$\pi_{[a,x]} = \{a = t'_0 < ... < t'_r = x\} \quad \text{et} \quad \pi_{[x,b]} = \{x = t'_r < ... < t'_q = b\},$$

7. Comme $x \in \,]a,b[$, on a que $r < p$.

des partitions de $[a, x]$ et de $[x, b]$ respectivement. Comme $x \in ]a, b[$, on a que $r > 0$. Les éléments $t'_0, t'_1, ..., t'_{r-1}$ de la partition $\pi'_{[a,b]}$ sont donc égaux aux éléments $t_0, t_1, ..., t_{r-1}$ de la partition $\pi_{[a,b]}$. Ainsi, $\pi'_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{r-1} < t'_r < ... < t'_q = b\}$.

Si $x$ appartient à la partition $\pi_{[a,b]}$ alors il existe $s \in \mathbb{N} \setminus \{0, p\}$ tel que $x = t_s$ et comme $\pi_{[a,b]} = \pi'_{[a,b]}$, on a [8]

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) = \sum_{k=1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{s} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=s+1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= \mathcal{V}(f, \pi_{[a,x]}) + \mathcal{V}(f, \pi_{[x,b]}) \\ &\leqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f).\end{aligned}$$

Sinon, il existe $u \in \mathbb{N} \setminus \{0, p\}$ tel que $t_u < x < t_{u+1}$. Si $u < p - 1$ alors

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) &= \sum_{k=1}^{u} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t_{u+1}) - f(t_u)| + \sum_{k=u+2}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{u} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t'_r) - f(t_u)| + |f(t_{u+1}) - f(t'_r)| + \sum_{k=u+2}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t'_r) - f(t_{r-1})| + |f(t'_{r+1}) - f(t'_r)| + \sum_{k=r+2}^{q} |f(t'_k) - f(t'_{k-1})| \\ &= \mathcal{V}(f, \pi_{[a,x]}) + \mathcal{V}(f, \pi_{[x,b]}) \\ &\leqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f).\end{aligned}$$

Si $u = p - 1$ alors

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) &= \sum_{k=1}^{u} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t_{u+1}) - f(t_u)| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{u} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t'_r) - f(t_u)| + |f(t_{u+1}) - f(t'_r)| \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t'_r) - f(t_{r-1})| + |f(t'_q) - f(t'_r)| \\ &= \mathcal{V}(f, \pi_{[a,x]}) + \mathcal{V}(f, \pi_{[x,b]}) \\ &\leqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a obtenu que si $x \in ]a, b[$ et si $\pi_{[a,b]}$ est une partition de $[a, b]$ alors

$$\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) \leqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f).$$

8. Comme $s < p$, la somme $\sum_{k=s+1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$ contient au moins un élément.

La majoration (2.24) en découle.

À présent, soit $\epsilon > 0$. Par le lemme 2.4.2.2, on sait que $f$ est à variation bornée sur $[a, x]$ et sur $[x, b]$ pour tout $x \in ]a, b[$. Il existe donc une partition $\pi_{[a,x]} = \{a = t_0 < ... < t_v = x\}$ de $[a, x]$ et une partition $\pi_{[x,b]} = \{x = t_v < ... < t_w = b\}$ de $[x, b]$ satisfaisant

$$\mathcal{V}(f, \pi_{[a,x]}) \geqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(f, \pi_{[x,b]}) \geqslant \mathcal{V}_{x,b}(f) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Considérons la partition $\pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < ... < t_v < ... < t_w = b\}$ de $[a, b]$. On obtient que [9]

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(f, \pi_{[a,b]}) &= \sum_{k=1}^{v} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=v+1}^{w} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \\ &= \mathcal{V}(f, \pi_{[a,x]}) + \mathcal{V}(f, \pi_{[x,b]}) \\ &\geqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f) - \epsilon.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{V}_{a,b}(f) = \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f)$ par caractérisation du supremum d'un ensemble. □

Comme annoncé, nous allons montrer que toute fonction réelle à variation bornée peut s'écrire comme la différence de deux fonctions réelles, croissantes et bornées.

**Lemme 2.4.2.4.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction à variation bornée sur $[a, b]$ alors il existe deux fonctions réelles $f_1$ et $f_2$ définies sur $[a, b]$, croissantes et bornées telles que $f = f_1 - f_2$.*

*Démonstration.* Posons

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_{a,x}(f) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

On peut donc écrire

$$f(x) = \mathcal{V}(x) - (\mathcal{V}(x) - f(x)) \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Montrons d'abord que la fonction $\mathcal{V}$ est croissante. Soient $x, y \in [a, b]$ tels que $x \leqslant y$. Comme $\mathcal{V}_{x,y}(f) \geqslant 0$, il suit du lemme 2.4.2.3 que [10]

$$\mathcal{V}(y) = \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,y}(f) \geqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) = \mathcal{V}(x).$$

De plus, étant donné que la fonction $f$ est à variation bornée sur $[a, b]$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathcal{V}_{a,b}(f) \leqslant C$. Ainsi, on obtient par le lemme 2.4.2.3 que si $x \in [a, b]$ alors

$$\mathcal{V}(x) \leqslant \mathcal{V}_{a,x}(f) + \mathcal{V}_{x,b}(f) = \mathcal{V}_{a,b}(f) \leqslant C,$$

9. Comme $x \in ]a, b[$, on a $v < w$.

10. Pour appliquer le lemme, il suffit de considérer que $b = y$. De plus, si $x = y$ alors $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y)$. On peut donc supposer que $x < y$.

ce qui implique que la fonction $\mathcal{V}$ est bornée.

Considérons à présent la fonction $\mathcal{V} - f$. Elle est croissante car si on considère $x, y \in [a, b]$ de sorte que $x \leqslant y$ alors on a en appliquant le lemme 2.4.2.3 que

$$\mathcal{V}(x) - f(x) \leqslant \mathcal{V}(y) - f(y) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leqslant \mathcal{V}(y) - \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_{x,y}(f),$$

ce qui est vérifié puisque si on prend la partition $\pi'_{[x,y]} = \{x = t_0 < t_1 = y\}$ alors

$$\mathcal{V}_{x,y}(f) = \sup_{\pi_{[x,y]}} \sum_{k=1}^{p} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \geqslant |f(y) - f(x)| \geqslant f(y) - f(x).$$

Enfin, le lemme 2.4.2.1 implique qu'il existe $C' > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant C'$ pour tout $x \in [a, b]$. On a déjà vu précédemment que $\mathcal{V}(x) \leqslant \mathcal{V}_{a,b}(f)$ si $x \in [a, b]$. On en tire que si $x \in [a, b]$ alors

$$\mathcal{V}(x) - f(x) \leqslant \mathcal{V}(x) + |f(x)| \leqslant \mathcal{V}_{a,b}(f) + |f(x)| \leqslant C + C',$$

ce qui permet d'affirmer que la fonction $\mathcal{V} - f$ est bornée.

□

Grâce au lemme précédent, on va pouvoir montrer que toute fonction à variation bornée sur $\mathbb{T}$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$.

**Proposition 2.4.2.1.** *Si $f$ est une fonction à variation bornée sur $\mathbb{T}$ alors $f$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$.*

*Démonstration.* Considérons d'abord la partie réelle de $f$. Puisque $f$ est à variation bornée sur $\mathbb{T}$, il en est de même pour sa partie réelle car $|\Re f| \leqslant |f|$. Le lemme 2.4.2.4 implique donc qu'il existe deux fonctions réelles $f_1$ et $f_2$ définies[11] sur $\mathbb{T}$, croissantes et bornées telles que $\Re f = f_1 - f_2$. Étant donné que la fonction $f_1$ est croissante, l'ensemble de ses points de discontinuité est dénombrable. Ainsi, $f_1$ est continu presque partout et est borné. On en tire que la fonction $f_1$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$. De même, la fonction $f_2$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$. Cela entraîne que $\Re f = f_1 - f_2$ est également Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$. De manière analogue, on peut montrer que $\Im f$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$. D'où la conclusion.

□

Afin de prouver le théorème de Dirichlet-Jordan, nous avons besoin d'un dernier résultat. Le lemme suivant nous permet de majorer les coefficients de Fourier d'une fonction à variation bornée sur $\mathbb{T}$. La démonstration de ce résultat fait intervenir des intégrales de Riemann-Stieltjes. Les références [6], [8] et [9] ont été consultées pour la preuve. Plus précisément, la référence [9] affirme que si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continu et si $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ est

11. Le théorème affirme que les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont définies sur $[0, 2\pi]$. Or, comme la fonction $f$ est $2\pi$-périodique, il en est de même pour $\Re f$ et donc pour $f_1$ et $f_2$. On peut donc considérer que les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont définies sur $\mathbb{T}$.

à variation bornée alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dg(x)$ existe. Cette référence affirme également que si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable et si $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ est de classe $C^1$ alors

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{2.25}$$

De plus, la référence [6] nous apprend que si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ et si une des deux intégrales $\int_a^b f(x)dg(x)$ ou $\int_a^b g(x)df(x)$ existe alors l'autre intégrale existe et on a

$$\int_a^b f(x)dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b g(x)df(x). \tag{2.26}$$

**Lemme 2.4.2.5.** *Si $f$ est une fonction à variation bornée sur $\mathbb{T}$ alors*

$$|\hat{f}(n)| \leqslant \frac{\mathcal{V}_{0,2\pi}(f)}{2\pi|n|} \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Si on définit une fonction $g$ par $g(x) = \frac{1}{-in}e^{-inx}$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ alors $g$ est de classe $C^1$ et $g'(x) = e^{-inx}$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Par la proposition 2.4.2.1, on sait que $f$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$. Ainsi, on obtient en utilisant (2.25) que

$$|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dg(t)\right|.$$

En appliquant (2.26), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\left([f(x)g(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} g(t)df(t)\right)\right| \\ &= \frac{1}{2\pi|n|}\left|\int_0^{2\pi} e^{-int}df(t)\right| \end{aligned}$$

car $[f(x)g(x)]_0^{2\pi} = 0$ puisque les fonctions $f$ et $g$ sont $2\pi$-périodiques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons

$$\pi_{[0,2\pi]}^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{p_n}^{(n)} = 2\pi\}$$

une partition de $[0,2\pi]$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\pi_{[0,2\pi]}^{(n)}\right| = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1,\ldots,p_n\}$, soit

$$\xi_i^{(n)} \in \left[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{2\pi} e^{-int}df(t)\right| &= \left|\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p_n} e^{-in\xi_i^{(n)}}\left(f(t_i^{(n)}) - f(t_{i-1}^{(n)})\right)\right| \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p_n}\left|\left(f(t_i^{(n)}) - f(t_{i-1}^{(n)})\right)\right| \leqslant \mathcal{V}_{0,2\pi}(f). \end{aligned}$$

□

Nous avons développé les outils nécessaires pour pouvoir prouver le théorème de Dirichlet-Jordan. Celui-ci fournit pour la série de Fourier d'une fonction à variation bornée sur $\mathbb{T}$, un résultat de convergence ponctuelle sur $\mathbb{T}$ et de convergence uniforme sur les intervalles fermés de continuité de la fonction considérée. La preuve suivante provient de [8].

**Théorème 2.4.1.** ***(Dirichlet-Jordan)*** *Si $f$ est une fonction à variation bornée sur $\mathbb{T}$ et si $x \in \mathbb{T}$ alors $(S_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2}(f(x+h)+f(x-h)).$$

*En particulier, $(S_n(f,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$ en tout point $x_0$ de continuité de $f$. La convergence est uniforme sur les intervalles fermés de continuité de $f$.*

*Démonstration.* Nous allons appliquer le théorème de Fejér 2.4.1.1 à $\Re f$ et $\Im f$. Considérons d'abord la partie réelle de $f$. Nous avons vu dans le preuve de la proposition 2.4.2.1 que $\Re f$ est Riemann-intégrable sur $\mathbb{T}$. On obtient donc que $\Re f \in L^1(\mathbb{T})$. Montrons que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2}(\Re f(x+h)+\Re f(x-h)) \tag{2.27}$$

existe pour tout $x \in \mathbb{T}$. Dans la preuve de la proposition 2.4.2.1, on a également vu que $\Re f = f_1 - f_2$ où $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{T}$, croissantes et bornées. Comme $f_1$ est une fonction réelle croissante, bornée et $2\pi$-périodique, le théorème de la limite monotone implique que les limites

$$\lim_{h\to 0^+} f_1(x+h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} f_1(x-h)$$

existent et sont finies pour tout $x \in \mathbb{T}$. On obtient la même conclusion pour $f_2$ et donc pour $\Re f$. Cela entraîne que la limite (2.27) existe et est finie pour tout $x \in \mathbb{T}$. Le théorème de Fejér 2.4.1.1 implique donc pour tout $x \in \mathbb{T}$ que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(\Re f, x) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}(\Re f(x+h)+\Re f(x-h)) \tag{2.28}$$

et que $(\sigma_n(\Re f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\Re f$ sur les intervalles fermés de continuité de $\Re f$. En procédant de manière analogue avec $\Im f$, le théorème de Fejér 2.4.1.1 implique également pour tout $x \in \mathbb{T}$ que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(\Im f, x) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}(\Im f(x+h)+\Im f(x-h)) \tag{2.29}$$

et que $(\sigma_n(\Im f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\Im f$ sur les intervalles fermés de continuité de $\Im f$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{T}$, on a

$$\sigma_n(\Re f, x) = \Re(\sigma_n(f,x)) \quad \text{et} \quad \sigma_n(\Im f, x) = \Im(\sigma_n(f,x)).$$

Puisque les limites (2.28) et (2.29) sont finies, on obtient pour tout $x \in \mathbb{T}$ que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(f,x) = \frac{1}{2} \lim_{h\to 0^+} (f(x+h) + f(x-h))$$

et que $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur les intervalles fermés de continuité de $f$. En outre, le lemme 2.4.2.5 implique que $\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ si $n \to \infty$. La proposition 2.4.1.1 permet donc de conclure.

□

# Chapitre 3

# Divergence

Dans ce chapitre, nous allons considérer des espaces de Banach homogènes sur $\mathbb{T}$ et des ensembles de divergence pour ces espaces. Après avoir donné les définitions nécessaires, nous étudierons les ensembles de divergence et plus particulièrement, les ensembles de divergence pour l'espace $C^0(\mathbb{T})$. Nous prouverons ensuite un résultat qui implique une certaine dichotomie pour la convergence et la divergence des séries de Fourier de fonctions appartenant à un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Pour clore le chapitre, nous fournirons une preuve du théorème de Kolmogorov.

## 3.1 Espaces de Banach homogènes sur $\mathbb{T}$ et ensembles de divergence

Nous allons commencer cette section en définissant un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ et nous donnerons ensuite des exemples. La rédaction de cette section a été réalisée en utilisant la référence [8].

**Définition 3.1.1.** Un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ est un sous-espace linéaire $B$ de $L^1(\mathbb{T})$ qui possède une norme satisfaisant $\|\cdot\|_B \geqslant \|\cdot\|_{L^1}$ et telle que $(B, \|\cdot\|_B)$ est un espace de Banach. Les conditions suivantes doivent également être satisfaites :

$(H_1)$ Si $f \in B$ et $t \in \mathbb{T}$ alors $f_t = f(\cdot - t) \in B$ et $\|f_t\|_B = \|f\|_B$.

$(H_2)$ Pour tous $f \in B$ et $t_0 \in \mathbb{T}$, on a

$$\lim_{t \to t_0} \|f_t - f_{t_0}\|_B = 0.$$

Montrons d'abord que l'espace $C^0(\mathbb{T})$ est un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$.

**Exemple 3.1.1.** Remarquons que toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ est intégrable sur $\mathbb{T}$. De plus, on a

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|dt = \|f\|_\infty.$$

En outre, on sait que l'espace $(C^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

$(H_1)$ Si $f \in C^0(\mathbb{T})$ et si $t \in \mathbb{T}$ alors l'application $f_t = f(\,\cdot - t) \in C^0(\mathbb{T})$ par composition de fonctions continues sur $\mathbb{T}$. De plus, on a

$$\|f_t\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x-t)| = \sup_{y\in\mathbb{T}} |f(y)| = \|f\|_\infty.$$

$(H_2)$ Soient $f \in C^0(\mathbb{T})$, $t_0 \in \mathbb{T}$ et $\epsilon > 0$. Au lieu de montrer que

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{x\in\mathbb{T}} |f_t(x) - f_{t_0}(x)| = 0.$$

Puisque toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que si $y_1, y_2 \in \mathbb{T}$ et si $|y_1 - y_2| < \delta$ alors $|f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon$. Prenons $y_2 = t_0$. On obtient que si $t \in \mathbb{T}$ satisfait $|t - t_0| < \delta$ alors pour tout $x \in \mathbb{T}$,

$$|x - t - (x - t_0)| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x-t) - f(x-t_0)| < \epsilon.$$

Par conséquent, si $|t - t_0| < \delta$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} |f_t(x) - f_{t_0}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x-t) - f(x-t_0)| \leqslant \epsilon.$$

À présent, montrons que pour $1 \leqslant p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{T})$ est un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$.

**Exemple 3.1.2.** On sait que $L^p(\mathbb{T})$ est un sous-espace linéaire de $L^1(\mathbb{T})$ dont la norme satisfait $\|\cdot\|_{L^1} \leqslant \|\cdot\|_{L^p}$ car la mesure de $\mathbb{T}$ vaut 1. On sait également que l'espace $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach.

$(H_1)$ Soient $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $t \in \mathbb{T}$. Comme $f \in L^p(\mathbb{T})$, on sait que $f_t \in L^p(\mathbb{T})$ par périodicité. En appliquant la substitution $y = x - t$, on a

$$\|f_t\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x-t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{2\pi - t} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}$$

par périodicité.

$(H_2)$ Soient $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{T}$. Remarquons qu'en appliquant la substitution $y = x - t_0$, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x-t) - f(x-t_0)|^p dx = \int_0^{2\pi} |f(y - (t-t_0)) - f(y)|^p dy$$

par périodicité. Ainsi,

$$\|f_t - f_{t_0}\|_{L^p} = \|f_{t-t_0} - f\|_{L^p}.$$

Pour satisfaire $(H_2)$, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{t\to 0} \|f_t - f\|_{L^p} = 0.$$

Cela découle du lemme 2.3.1 car en appliquant la substitution $y = x + t$, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx = \int_0^{2\pi} |f(y) - f(y-t)|^p dx$$

par périodicité.

Définissons un ensemble de divergence pour un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$.

**Définition 3.1.2.** Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Un ensemble $E$ inclus dans $\mathbb{T}$ est un ensemble de divergence pour $B$ s'il existe $f \in B$ dont la série de Fourier diverge en tout point de $E$.

Tout au long de ce chapitre, nous allons utiliser la notation suivante. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on pose

$$S^*(f,x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f,x)|\,. \tag{3.1}$$

Dans ce qui suit, nous travaillons avec des intégrales à valeurs dans un espace de Banach. La théorie liée à cette notion d'intégrale ne sera pas détaillée dans ce mémoire. Le lecteur intéressé peut consulter la référence [8] pour davantage d'informations.
Nous aurons besoin de la propriété suivante. Si $B$ est un espace de Banach et si $F$ est une fonction à valeurs dans $B$, définie et continue sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ alors

$$\left\| \int_a^b F(x)\,dx \right\|_B \leqslant \int_a^b \|F(x)\|_B\,dx. \tag{3.2}$$

Nous aimerions que toute fonction appartenant à un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ puisse s'écrire comme la limite dans cet espace du produit de convolution de cette fonction avec le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément d'un noyau de sommabilité. Pour cela, nous avons besoin de trois résultats préliminaires.

**Lemme 3.1.1.** *Soit $B$ un espace de Banach. Si $\phi$ est une fonction continue sur $\mathbb{T}$ et à valeurs dans $B$ alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \|\phi(t) - \phi(0)\|_B < C.$$

*Démonstration.* Soit $x \in \mathbb{T}$. Comme $\phi$ est continu en $x$, il existe $\delta_x > 0$ tel que si $t \in \mathbb{T}$ vérifie $|t - x| < \delta_x$ alors

$$\|\phi(t) - \phi(x)\|_B < \epsilon.$$

Comme $\|\phi(t)\|_B - \|\phi(x)\|_B \leqslant \|\phi(t) - \phi(x)\|_B$, cela implique que

$$\|\phi(t)\|_B < \|\phi(x)\|_B + \epsilon.$$

Posons $C_x = \|\phi(x)\|_B + \epsilon$. Ainsi, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{T}$, il existe $B(x, \delta_x)$ une boule centrée en $x$ et de rayon $\delta_x$ telle que $\phi$ est borné par $C_x$ sur $B(x, \delta_x)$. De plus, on a

$$\mathbb{T} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{T}} B(x, \delta_x).$$

Comme $\mathbb{T}$ est compact, il existe $x_1, \ldots, x_n$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathbb{T} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x, \delta_x).$$

Posons $C' = \max\{C_{x_1}, \ldots, C_{x_n}\}$. On a obtenu que si $t \in \mathbb{T}$ alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $t \in B(x_i, \delta_{x_i})$ et

$$\|\phi(t)\|_B < C_{x_i} < C'.$$

Par conséquent,

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} \|\phi(t) - \phi(0)\|_B \leqslant \sup_{t \in \mathbb{T}} (\|\phi(t)\|_B + \|\phi(0)\|_B) < 2C'.$$

On conclut en posant $C = 2C'$. □

**Lemme 3.1.2.** *Soit $B$ un espace de Banach. Si $\phi$ est une fonction continue sur $\mathbb{T}$ et à valeurs dans $B$ et si $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)\phi(t)\, dt = \phi(0) \quad \textit{dans } B.$$

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$. Étant donné que le noyau $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la propriété $(S_1)$ de la définition 1.3.1, on a pour $0 < \delta < \pi$ que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)\phi(t)\, dt - \phi(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(t)(\phi(t) - \phi(0))\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} k_n(t)(\phi(t) - \phi(0))\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(t)(\phi(t) - \phi(0))\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} k_n(t)(\phi(t) - \phi(0))\, dt
\end{aligned}$$

par périodicité. Or, en utilisant la propriété (3.2), on obtient que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(t)(\phi(t) - \phi(0))\, dt \right\|_B &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)|\, \|\phi(t) - \phi(0)\|_B\, dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)| \sup_{|t| \leqslant \delta} \|\phi(t) - \phi(0)\|_B\, dt \\
&\leqslant \sup_{|t| \leqslant \delta} \|\phi(t) - \phi(0)\|_B \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)|\, dt \\
&\leqslant C \sup_{|t| \leqslant \delta} \|\phi(t) - \phi(0)\|_B
\end{aligned}$$

avec $C > 0$, car $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété $(S_2)$ de la définition 1.3.1. Comme $\phi$ est continu en 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $|t| \leqslant \delta_0$ alors

$$\|\phi(t) - \phi(0)\|_B < \frac{\epsilon}{2C}.$$

En particulier, on a

$$\sup_{|t|\leqslant\delta_0} \|\phi(t) - \phi(0)\|_B \leqslant \frac{\epsilon}{2C}.$$

Considérons ce $\delta_0$ pour la suite de la preuve. De manière analogue, en appliquant la propriété (3.2), on a également que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} k_n(t)(\phi(t)-\phi(0))\,dt\right\|_B &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} |k_n(t)|\,\|\phi(t)-\phi(0)\|_B\,dt\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} |k_n(t)|\sup_{t\in\mathbb{T}}\|\phi(t)-\phi(0)\|_B\,dt\\ &= \sup_{t\in\mathbb{T}}\|\phi(t)-\phi(0)\|_B\,\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0}|k_n(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Le lemme 3.1.1 fournit l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \|\phi(t) - \phi(0)\|_B < C'.$$

La condition $(S_3)$ de la définition 1.3.1 implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors

$$\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} |k_n(t)|\,dt < \frac{\epsilon\,\pi}{C'}.$$

Par conséquent, on peut conclure car on a obtenu que si $n \geqslant N$ alors

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\phi(t)\,dt - \phi(0)\right\|_B\\ &\leqslant \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_0}^{\delta_0} k_n(t)(\phi(t)-\phi(0))\,dt\right\|_B + \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} k_n(t)(\phi(t)-\phi(0))\,dt\right\|_B\\ &< C\frac{\epsilon}{2C} + \frac{C'}{2\pi}\frac{\epsilon\,\pi}{C'} = \epsilon.\end{aligned}$$

□

Nous admettrons le lemme suivant. La preuve se trouve dans la référence [8].

**Lemme 3.1.3.** *Si $k$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{T}$ et si $f \in L^1(\mathbb{T})$ alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(t) f_t\,dt = k * f.$$

Nous pouvons à présent démontrer le résultat annoncé.

**Lemme 3.1.4.** *Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Si $f \in B$ et si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - k_n * f\|_B = 0.$$

*Démonstration.* Considérons la fonction $\phi$ définie sur $\mathbb{T}$ par $\phi(t) = f_t = f(\cdot - t)$. Cette fonction est à valeurs dans $B$ et est continue par la condition $(H_2)$ de la définition 3.1.1 d'un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Par le lemme 3.1.2, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\phi(t)\,dt = \phi(0) \text{ dans } B.$$

Comme $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$, on a que $f \in L^1(\mathbb{T})$. Étant donné que $k_n$ est continu sur $\mathbb{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lemme 3.1.3 implique que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_n(t)\phi(t)\,dt = k_n * f \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\phi(0) = f$, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} k_n * f = f \text{ dans } B.$$

D'où la conclusion.

□

Nous voudrions caractériser les ensembles de divergence pour un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Le lemme suivant va nous permettre d'obtenir une première caractérisation.

**Lemme 3.1.5.** *Soient $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ et $g \in B$. Il existe une fonction $f \in B$ et une suite paire*[1] *$(\Omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de nombres positifs satisfaisant*

$$\hat{f}(j) = \Omega_j \hat{g}(j) \quad \textit{pour } j \in \mathbb{Z}.$$

*De plus, la suite $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante et telle que $\lim_{j\to+\infty} \Omega_j = +\infty$.*

*Démonstration.* Le lemme 3.1.4 fournit l'existence d'une suite de naturels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|g - \sigma_{\lambda_n}(g)\|_B < 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Posons

$$f = g + \sum_{n=0}^{+\infty} (g - \sigma_{\lambda_n}(g)).$$

1. Cela signifie que $\Omega_j = \Omega_{-j}$, pour $j \in \mathbb{N}$.

Montrons que la série définissant $f$ converge dans $B$ en montrant qu'elle est de Cauchy dans $B$. Soit $\epsilon > 0$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ satisfont $q \geqslant p \geqslant 0$ alors en utilisant (3.3), on a

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} g - \sigma_{\lambda_n}(g) \right\|_B \leqslant \sum_{n=p}^{q} \|g - \sigma_{\lambda_n}(g)\|_B < \sum_{n=p}^{q} 2^{-n}.$$

Puisque la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge, elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geqslant p \geqslant N$ alors

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} g - \sigma_{\lambda_n}(g) \right\|_B < \sum_{n=p}^{q} 2^{-n} < \epsilon.$$

Cette série appartient donc à $B$ et comme $g \in B$, il s'ensuit que $f \in B$. De plus, la définition 3.1.1 d'un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ assure que la série converge également dans $L^1$. On en tire que pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(j) &= \hat{g}(j) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (g(t) - \sigma_{\lambda_n}(g,t)) e^{-ijt} dt \\
&= \hat{g}(j) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(t) - \sigma_{\lambda_n}(g,t)) e^{-ijt} dt \\
&= \hat{g}(j) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \hat{g}(j) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{\lambda_n}(g,t) e^{-ijt} dt \right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.3.3.1, on obtient que si $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$ alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{\lambda_n}(g,t) e^{-ijt} dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\lambda_n}^{\lambda_n} \left(1 - \frac{|k|}{\lambda_n + 1}\right) \hat{g}(k) \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)t} dt \\
&= \begin{cases} \left(1 - \frac{|j|}{\lambda_n+1}\right) \hat{g}(j) & \text{si } j \in \{-\lambda_n, \dots, \lambda_n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il en découle que si $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$ alors

$$\hat{g}(j) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{\lambda_n}(g,t) e^{-ijt} dt = \begin{cases} \frac{|j|}{\lambda_n+1} \hat{g}(j) & \text{si } j \in \{-\lambda_n, \dots, \lambda_n\}, \\ \hat{g}(j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, on a l'égalité suivante

$$\min\left\{1, \frac{|j|}{\lambda_n + 1}\right\} = \begin{cases} \frac{|j|}{\lambda_n+1} & \text{si } j \in \{-\lambda_n, \dots, \lambda_n\}, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

parce que comme $\lambda_n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{|j|}{\lambda_n + 1} < 1 \Leftrightarrow |j| < \lambda_n + 1 \Leftrightarrow j \in \{-\lambda_n, \ldots, \lambda_n\}.$$

On en tire que si $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$ alors

$$\hat{g}(j) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_{\lambda_n}(g,t)e^{-ijt}dt = \hat{g}(j)\min\left\{1, \frac{|j|}{\lambda_n+1}\right\}$$

Par conséquent, on a obtenu que si $j \in \mathbb{Z}$ alors

$$\begin{aligned}\hat{f}(j) &= \hat{g}(j) + \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{g}(j)\min\left\{1, \frac{|j|}{\lambda_n+1}\right\} \\ &= \hat{g}(j)\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \min\left\{1, \frac{|j|}{\lambda_n+1}\right\}\right).\end{aligned}$$

Posons

$$\Omega_j = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \min\left\{1, \frac{|j|}{\lambda_n+1}\right\} \quad \forall j \in \mathbb{Z}\,.$$

Il reste à montrer que la suite $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante et satisfait $\lim_{j\to+\infty}\Omega_j = +\infty$.

Montrons d'abord que celle-ci est croissante. Comme les termes constituant la série sont positifs, si on montre pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ que

$$\min\left\{1, \frac{j}{\lambda_n+1}\right\} \leqslant \min\left\{1, \frac{j+1}{\lambda_n+1}\right\} \tag{3.4}$$

alors on aura $\Omega_j \leqslant \Omega_{j+1}$. Si $\min\left\{1, \frac{j}{\lambda_n+1}\right\} = 1$ alors on a

$$1 \leqslant \frac{j}{\lambda_n+1} \leqslant \frac{j+1}{\lambda_n+1}.$$

Ainsi, l'inégalité (3.4) est satisfaite. Si $\min\left\{1, \frac{j}{\lambda_n+1}\right\} = \frac{j}{\lambda_n+1}$ alors on a $\frac{j}{\lambda_n+1} \leqslant 1$. L'inégalité (3.4) est donc également vérifiée.

Montrons que $\lim_{j\to+\infty}\Omega_j = +\infty$. Si $M \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et si $j \in \mathbb{N}$ alors on a

$$\Omega_j > M \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \min\left\{1, \frac{j}{\lambda_n+1}\right\} > M - 1,$$

ce qui est notamment vérifié si les $M$ premiers termes de la série sont égaux à 1, donc si $\lambda_n + 1 \leqslant j$ pour tout $n \in \{0, \ldots, M-1\}$. Posons

$$J = 1 + \sup_{0\leqslant n\leqslant M-1} \lambda_n.$$

On a donc montré qu'il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que si $j \geqslant J$ alors $\Omega_j > M$. D'où la conclusion.

$\square$

Nous pouvons prouver une première caractérisation des ensembles de divergence pour un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Celle-ci fait intervenir la notation (3.1) introduite précédemment.

**Proposition 3.1.1.** *Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Un ensemble $E$ inclus dans $\mathbb{T}$ est un ensemble de divergence pour $B$ si et seulement s'il existe une fonction $f \in B$ telle que*

$$S^*(f, x) = +\infty \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

*Démonstration.* Montrons que la condition est suffisante. Par hypothèse, si $x \in E$ alors $S^*(f, x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f, x)| = +\infty$. Soit $x \in E$. On obtient donc que pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe $n_K \in \mathbb{N}$ tel que

$$|S_{n_K}(f, x)| > K. \tag{3.5}$$

On a donc construit une suite $(n_K)_{K\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{K\to+\infty} |S_{n_K}(f, x)| = +\infty.$$

En effet, soit $M \in \mathbb{N}$ et posons $K_0 = M$. Il s'ensuit que si $K \geqslant K_0$ alors en utilisant (3.5), on a

$$|S_{n_K}(f, x)| > K \geqslant K_0 = M.$$

À présent, montrons que la série de Fourier de $f$ en $x$ diverge. Procédons par l'absurde et supposons que $(S_n(f, x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, toute sous-suite de $(S_n(f, x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers $l$. Or, on a vu qu'il existait une sous-suite $(S_{n_K}(f, x))_{K\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini. On obtient donc une contradiction et on peut conclure que la série de Fourier de $f$ en $x$ diverge. Ainsi, $E$ est un ensemble de divergence pour $B$.

La condition est nécessaire. Étant donné que $E$ est un ensemble de divergence pour $B$, il existe une fonction $g \in B$ dont la série de Fourier diverge en tout point de $E$. Soient $f \in B$ et $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ la fonction et la suite fournies par le lemme 3.1.5 et correspondant à $g$. Montrons que

$$S^*(f, x) = +\infty \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

On sait que $\hat{f}(j) = \Omega_j \hat{g}(j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Donc, si $n > m$ et $x \in \mathbb{T}$ alors on a

$$\begin{aligned}
S_n(g,x) - S_m(g,x) &= \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)\Omega_j^{-1}e^{ijx} - \sum_{j=-m}^{m} \hat{f}(j)\Omega_j^{-1}e^{ijx} \\
&= \sum_{j=m+1}^{n} \hat{f}(j)\Omega_j^{-1}e^{ijx} + \sum_{j=-n}^{-(m+1)} \hat{f}(j)\Omega_j^{-1}e^{ijx} \\
&= \sum_{j=m+1}^{n} \hat{f}(j)\Omega_j^{-1}e^{ijx} + \sum_{j=m+1}^{n} \hat{f}(-j)\Omega_{-j}^{-1}e^{-ijx} \\
&= \sum_{j=m+1}^{n} (\hat{f}(j)e^{ijx} + \hat{f}(-j)e^{-ijx})\Omega_j^{-1}
\end{aligned}$$

car la suite $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est paire. En outre, on a

$$\hat{f}(j)e^{ijx} + \hat{f}(-j)e^{-ijx} = \sum_{k=-j}^{j} \hat{f}(k)e^{ikx} - \sum_{k=-(j-1)}^{j-1} \hat{f}(k)e^{ikx} = S_j(f,x) - S_{j-1}(f,x).$$

Par conséquent, il s'ensuit que

$$S_n(g,x) - S_m(g,x) = \sum_{j=m+1}^{n} (S_j(f,x) - S_{j-1}(f,x))\Omega_j^{-1}.$$

Puisque la suite $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(\Omega_j^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Cette suite est également positive, on obtient donc que

$$\begin{aligned}
|S_n(g,x) - S_m(g,x)| &\leqslant \Omega_{m+1}^{-1} \left| \sum_{j=m+1}^{n} S_j(f,x) - S_{j-1}(f,x) \right| \\
&\leqslant \Omega_{m+1}^{-1} \left| S_n(f,x) - S_m(f,x) \right| \\
&\leqslant 2\,\Omega_{m+1}^{-1} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| S_k(f,x) \right|.
\end{aligned}$$

A présent, supposons que $x \in \mathbb{T}$ est tel que $S^*(f,x) < +\infty$. Posons $C = 2S^*(f,x)$. Fixons $\epsilon > 0$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant M$ alors

$$\Omega_{m+1}^{-1} < \frac{\epsilon}{C}$$

parce que $\lim_{j\to+\infty} \Omega_j^{-1} = 0$. Par conséquent, si $n > m$ et si $m \geqslant M$ alors

$$|S_n(g,x) - S_m(g,x)| < \epsilon,$$

ce qui permet d'affirmer que la suite $(S_n(g,x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ et donc qu'elle converge. Ainsi, la série de Fourier de $g$ converge. Étant donné que la série de Fourier de $g$ diverge sur $E$, on en tire que $x$ n'appartient pas à $E$. On a donc obtenu que si $x \in \mathbb{T}$ est tel que $S^*(f,x) < +\infty$ alors $x \notin E$. Par contraposée, si $x \in E$ alors $S^*(f,x) = +\infty$. D'où la conclusion.

□

Nous pouvons déduire de cette proposition 3.1.1 un corollaire qui nous sera utile pour montrer la prochaine caractérisation des ensembles de divergence pour un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$.

**Corollaire 3.1.1.** *Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ et $E$ un ensemble de divergence pour $B$. Il existe une suite croissante $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs, qui tend vers l'infini et une fonction $f \in B$ telles que $S_j(f,x) \neq o(\omega_j)$ si $j \to +\infty$, pour tout $x \in E$.*

*Démonstration.* Reprenons les notations de la condition nécessaire de la preuve précédente. Pour rappel, on a considéré une fonction $g \in B$ dont la série de Fourier diverge en tout point de $E$, ainsi que $f \in B$ et $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ la fonction et la suite fournie par le lemme 3.1.5 et correspondant à $g$. Nous avons établi que si $x \in \mathbb{T}$ et si $n > m$ alors

$$S_n(g,x) - S_m(g,x) = \sum_{j=m+1}^{n} (S_j(f,x) - S_{j-1}(f,x))\Omega_j^{-1}.$$

Or, si $n > m+1$ alors on peut écrire

$$\sum_{j=m+1}^{n} (S_j(f,x) - S_{j-1}(f,x))\Omega_j^{-1}$$

$$= (S_{m+1}(f,x) - S_m(f,x))\Omega_{m+1}^{-1} + (S_n(f,x) - S_{n-1}(f,x))\Omega_n^{-1} + \sum_{j=m+2}^{n-1} (S_j(f,x) - S_{j-1}(f,x))\Omega_j^{-1}.$$

On a également que

$$\begin{aligned} &S_{m+1}(f,x)\Omega_{m+1}^{-1} - S_{n-1}(f,x)\Omega_n^{-1} + \sum_{j=m+2}^{n-1} (S_j(f,x) - S_{j-1}(f,x))\Omega_j^{-1} \\ &= \sum_{j=m+1}^{n-1} S_j(f,x)\Omega_j^{-1} - \sum_{j=m+2}^{n} S_{j-1}(f,x)\Omega_j^{-1} \\ &= \sum_{j=m+1}^{n-1} S_j(f,x)(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1}). \end{aligned}$$

Ainsi, on en tire que

$$S_n(g,x) - S_m(g,x) = S_n(f,x)\Omega_n^{-1} - S_m(f,x)\Omega_{m+1}^{-1} + \sum_{j=m+1}^{n-1} S_j(f,x)(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1}).$$

Le résultat 3.4.1 fourni en annexe va être utilisé pour construire une suite $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les propriétés de l'énoncé. Pour cela, remarquons que la série $\sum_{j=0}^{+\infty}(\Omega_j^{-1}-\Omega_{j+1}^{-1})$ converge car pour tout $J \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\sum_{j=0}^{J}(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1}) - \Omega_0^{-1}\right| = |\Omega_{J+1}^{-1}|$$

et on sait que $\lim_{j\to+\infty}\Omega_j^{-1} = 0$. Étant donné que la suite $(\Omega_j^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a

$$\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1} \geqslant 0$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Grâce à 3.4.1, il existe une suite croissante $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs qui tend vers l'infini telle que

$$\sum_{j=0}^{+\infty}(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j < +\infty. \tag{3.6}$$

On peut supposer que $\omega_j = O(\Omega_j)$ si $j \to +\infty$, quitte à remplacer la suite $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ par la suite $(\omega_j')_{j\in\mathbb{N}}$ où $\omega_j' = \min(\omega_j, \Omega_j)$. Il faut montrer que la suite $(\omega_j')_{j\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$. La suite $(\omega_j')_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\min(\omega_j, \Omega_j) \leqslant \min(\omega_{j+1}, \Omega_{j+1}) \tag{3.7}$$

car si $\min(\omega_j, \Omega_j) = \omega_j$ alors

$$\omega_j \leqslant \Omega_j \leqslant \Omega_{j+1} \quad \text{et} \quad \omega_j \leqslant \omega_{j+1}$$

puisque les suites $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont croissantes. Donc, (3.7) est satisfait. On procède de même si $\min(\omega_j, \Omega_j) = \Omega_j$ pour montrer que (3.7) est vérifié. De plus, on a toujours $\lim_{j\to+\infty}\omega_j' = +\infty$ et

$$\sum_{j=0}^{+\infty}(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j' \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j < +\infty.$$

À présent, soit $x \in E$ et supposons que $S_j(f,x) = o(\omega_j)$ si $j \to +\infty$. Comme la série de Fourier de $g$ diverge sur $E$, il s'ensuit que la suite $(S_n(g,x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Ainsi, il existe $L > 0$ tel que pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant M$ et $n > m$ qui satisfont

$$|S_n(g,x) - S_m(g,x)| > L. \tag{3.8}$$

Or, on a vu que si $n > m+1$ alors

$$|S_n(g,x) - S_m(g,x)| = \left|S_n(f,x)\Omega_n^{-1} - S_m(f,x)\Omega_{m+1}^{-1} + \sum_{j=m+1}^{n-1} S_j(f,x)(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\right|.$$

Puisque $\omega_j = O(\Omega_j)$ si $j \to +\infty$, il existe $C_1 > 0$ et $M_1 \in \mathbb{N}$ tels que si $m \geqslant M_1$ alors

$$\frac{\omega_m}{\Omega_{m+1}} \leqslant \frac{\omega_m}{\Omega_m} \leqslant C_1,$$

où la première inégalité a lieu car la suite $(\Omega_j^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Étant donné qu'on suppose que $S_j(f,x) = o(\omega_j)$ si $j \to +\infty$, il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant M_2$ alors

$$\left|\frac{S_m(f,x)}{\omega_m}\right| < \frac{L}{3C_1}.$$

Donc, si $k \geqslant \max\{M_1, M_2\}$ alors on a

$$\left|S_k(f,x)\Omega_k^{-1}\right| = \left|\frac{S_k(f,x)}{\omega_k}\frac{\omega_k}{\Omega_k}\right| < \frac{L}{3}. \tag{3.9}$$

Vu que la série (3.6) converge, il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n > m+1$,

$$\sum_{j=m+1}^{n-1}(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty}(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j < C_2$$

et la première majoration a lieu car $(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j \geqslant 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Puisqu'on suppose que $S_j(f,x) = o(\omega_j)$ si $j \to +\infty$, il existe $M_3 \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant M_3$ alors

$$\left|\frac{S_m(f,x)}{\omega_m}\right| < \frac{L}{3C_2}.$$

Il s'ensuit que si $m \geqslant M_3$ et si $n > m+1$ alors on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=m+1}^{n-1} S_j(f,x)(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\right| &\leqslant \sum_{j=m+1}^{n-1}\left|\frac{S_j(f,x)}{\omega_j}\right|(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j \\
&< \sum_{j=m+1}^{n-1}\frac{L}{3C_2}(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\omega_j \\
&< \frac{L}{3}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Par conséquent, si $m \geqslant \max\{M_1, M_2, M_3\}$ et si $n > m+1$ alors

$$\begin{aligned}
&\left|S_n(f,x)\Omega_n^{-1} - S_m(f,x)\Omega_{m+1}^{-1} + \sum_{j=m+1}^{n-1} S_j(f,x)(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\right| \\
&\leqslant |S_n(f,x)\Omega_n^{-1}| + |S_m(f,x)\Omega_{m+1}^{-1}| + \left|\sum_{j=m+1}^{n-1} S_j(f,x)(\Omega_j^{-1} - \Omega_{j+1}^{-1})\right| < L,
\end{aligned}$$

vu (3.9)et (3.10). On obtient donc une contradiction avec (3.8). Ainsi, $S_j(f,x) \neq o(\omega_j)$ si $j \to +\infty$, pour tout $x \in E$. $\square$

Le lemme suivant sera utilisé pour démontrer une deuxième caractérisation des ensembles de divergence pour un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Ce résultat est tiré de la référence [8].

**Lemme 3.1.6.** *Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Si $g \in L^1(\mathbb{T})$ et $f \in B$ alors $g * f \in B$ et*

$$\|g * f\|_B \leqslant \|g\|_{L^1} \|f\|_B.$$

Nous pouvons à présent prouver une deuxième caractérisation qui fait intervenir une suite de polynômes trigonométriques satisfaisant certaines conditions.

**Proposition 3.1.2.** *Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ satisfaisant la condition : si $f \in B$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors $e_n f \in B$ et*

$$\|e_n f\|_B = \|f\|_B.$$

*Alors, l'ensemble $E$ est un ensemble de divergence pour $B$ si et seulement si il existe une suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques telle que $P_j \in B$,*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|P_j\|_B < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{j \in \mathbb{N}} S^*(P_j, x) = +\infty \quad \forall x \in E.$$

*Démonstration.* La condition est suffisante. Supposons qu'il existe une suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, notons $m_j$ le degré de $P_j$. Soit $(\nu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de naturels telle que $\nu_0 > m_0$ et satisfaisant

$$\nu_j > \nu_{j-1} + m_{j-1} + m_j \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{3.11}$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}$, posons

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{i\nu_j x} P_j(x).$$

Fixons $j \in \mathbb{N}$. Si $n \leqslant m_j$ et si $x \in \mathbb{T}$ alors montrons que

$$S_{\nu_j+n}(f, x) - S_{\nu_j-n-1}(f, x) = e^{i\nu_j x} S_n(P_j, x). \tag{3.12}$$

D'abord, remarquons qu'on a

$$\begin{aligned} e^{i\nu_j x} S_n(P_j, x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{P}_j(k) e^{i(\nu_j+k)x} &= \sum_{k=\nu_j-n}^{\nu_j+n} \widehat{P}_j(k-\nu_j) e^{ikx} \\ &= \sum_{k=\nu_j-n}^{\nu_j+n} \frac{e^{ikx}}{2\pi} \sum_{l=-m_j}^{m_j} a_l \int_0^{2\pi} e^{ilt} e^{i(n_j-k)t} dt \end{aligned} \tag{3.13}$$

car $P_j(x) = \sum_{l=-m_j}^{m_j} a_l e^{ilx}$, où $a_l \in \mathbb{C}$ pour tout $l \in \{-m_j, \dots, m_j\}$. D'autre part, on a

$$S_{\nu_j+n}(f,x) - S_{\nu_j-n-1}(f,x) = \sum_{|k|=\nu_j-n}^{\nu_j+n} \hat{f}(k)e^{ikx} \tag{3.14}$$

Or, on a

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} P_p(t)e^{i(\nu_p-k)t}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} P_p(t)e^{i(\nu_p-k)t}dt \tag{3.15}$$

car la série converge en norme $L^1$. En effet, soit $\epsilon > 0$. Si $r, s \in \mathbb{N}$ vérifient $s \geqslant r \geqslant 0$ alors la définition 3.1.1 d'un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ implique que

$$\left\|\sum_{p=r}^{s} P_p\, e_{\nu_p}\right\|_{L^1} \leqslant \left\|\sum_{p=r}^{s} P_p\, e_{\nu_p}\right\|_{B} \leqslant \sum_{p=r}^{s} \|P_p\|_B.$$

Puisque par hypothèse la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \|P_p\|_B$ converge, elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $P \in \mathbb{N}$ tel que si $s \geqslant r \geqslant P$ alors on a

$$\left\|\sum_{p=r}^{s} P_p\, e_{\nu_p}\right\|_{L^1} < \epsilon.$$

De plus, on a

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{l=-m_p}^{m_p} a_l \int_0^{2\pi} e^{i(l+\nu_p-k)t}dt. \tag{3.16}$$

Montrons que si $k \in \{-(\nu_j+n), \dots, -(\nu_j-n)\}$ ou si $p \neq j$ alors $k \neq l + \nu_p$, ce qui impliquera que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(l+\nu_p-k)t}dt = 0.$$

Cela suffira pour obtenir une égalité entre (3.13) et (3.14) en utilisant (3.16).

- Si $k \in \{-\nu_j - n, \dots, -\nu_j + n\}$ alors $k \leqslant -\nu_j + n < 0$ car $\nu_j > \nu_{j-1} + m_{j-1} + m_j \geqslant n$ par (3.11) et puisque $n \leqslant m_j$. Tandis que $l + \nu_p \geqslant -m_p + \nu_p > \nu_{p-1} + m_{p-1} \geqslant 0$. On en tire que $k \neq l + \nu_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- Si $j > p$ alors en utilisant (3.11) et que $n \leqslant m_j$, on a

  $$k - l \geqslant \nu_j - n - m_p > \nu_{j-1} + m_{j-1} + m_j - n - m_p \geqslant \nu_{j-1} + m_{j-1} - m_p.$$

  Si $p = j-1$ alors $k - l > \nu_p$. Sinon $j - 1 > p$ donc $j - 1 \geqslant p + 1$ et comme la suite $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante, on obtient que

  $$k - l > \nu_{j-1} + m_{j-1} - m_p \geqslant \nu_{p+1} + m_{j-1} - m_p > \nu_p + m_p + m_{p+1} + m_{j-1} - m_p \geqslant \nu_p.$$

  Par conséquent, $k - l > \nu_p$.

· Si $j < p$ alors on procède de manière similaire et on a

$$k - l \leqslant \nu_j + n + m_p \leqslant \nu_j + m_j + m_p < \nu_{j+1} - m_{j+1} + m_p.$$

Si $p = j+1$ alors $k - l < \nu_p$. Sinon $j + 1 < p$ donc $j + 1 \leqslant p - 1$ et on a

$$k - l < \nu_{j+1} - m_{j+1} + m_p \leqslant \nu_{p-1} + m_p < \nu_p - m_{p-1} < \nu_p.$$

On en tire que $k - l < \nu_p$.

L'égalité (3.12) est ainsi vérifiée. Montrons que la suite $(S_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{C}$ si $x \in E$, cela impliquera que la série de Fourier de $f$ diverge sur $E$. Remarquons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{T}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(P_j, x)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=-n}^{n} \widehat{P_j}(k) e^{ikx} \right| = \sup_{n\leqslant m_j} |S_n(P_j, x)|$$

puisque si $|k| > m_j$ alors $\widehat{P_j}(k) = 0$. En effet, si $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\widehat{P_j}(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-m_j}^{m_j} a_l \int_0^{2\pi} e^{i(-k+l)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ \sum_{l=-m_j}^{m_j} a_l & \text{si } k = l. \end{cases}$$

Soit $x \in E$. Procédons par l'absurde et supposons que la suite $(S_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Soit $0 < \epsilon < 1$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q \geqslant N_\epsilon$ alors

$$|S_p(f,x) - S_q(f,x)| < \epsilon. \tag{3.17}$$

De plus, vu ce qui précède, on a

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{n\leqslant m_j} |S_{\nu_j+n}(f,x) - S_{\nu_j-n-1}(f,x)| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{n\leqslant m_j} |S_n(P_j,x)| = +\infty.$$

Ainsi, il existe une suite $(j_K)_{K\in\mathbb{N}}$ et une suite $(n_K)_{K\in\mathbb{N}}$ telles que $n_K \leqslant m_{j_K}$ et

$$|S_{\nu_{j_K}+n_K}(f,x) - S_{\nu_{j_K}-n_K-1}(f,x)| > K. \tag{3.18}$$

On voudrait avoir $\nu_{j_K} - n_K - 1 \geqslant N_\epsilon$ pour un certain $K \in \mathbb{N}$. Comme $n_K \leqslant m_{j_K}$, la condition (3.11) implique que

$$\nu_{j_K} - n_K - 1 \geqslant \nu_{j_K} - m_{j_K} - 1 > \nu_{j_K-1} + m_{j_K-1} - 1 \geqslant \nu_{j_K-1} - 1. \tag{3.19}$$

Étant donné que la suite $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel si $j \geqslant J$ alors

$$\nu_{j-1} - 1 \geqslant N_\epsilon.$$

De plus, il existe $K_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ [2] tel que l'élément $j_{K_0}$ de la suite $(j_K)_{K\in\mathbb{N}}$ satisfait $j_{K_0} \geqslant J$. Il s'ensuit que $\nu_{j_{K_0}-1} - 1 \geqslant N_\epsilon$. Par conséquent, (3.19) appliqué à $j_{K_0}$, implique que

$$\nu_{j_{K_0}} + n_{K_0} > \nu_{j_{K_0}} - n_{K_0} - 1 \geqslant N_\epsilon$$

et on en tire que

$$|S_{\nu_{j_{K_0}}+n_{K_0}}(f,x) - S_{\nu_{j_{K_0}}-n_{K_0}-1}(f,x)| < \epsilon,$$

vu (3.17). Enfin, en appliquant (3.18) à $K_0$, on a [3]

$$|S_{\nu_{j_{K_0}}+n_{K_0}}(f,x) - S_{\nu_{j_{K_0}}-n_{K_0}-1}(f,x)| > K_0 > \epsilon.$$

D'où une contradiction, ce qui permet de conclure que $E$ est un ensemble de divergence pour $B$.

La condition est nécessaire. Supposons que $E$ est un ensemble de divergence pour $B$. Le corollaire 3.1.1 donne l'existence d'une suite croissante $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs, qui tend vers l'infini et d'une fonction $f \in B$ telles que $S_n(f,x) \neq o(\omega_n)$ si $n \to +\infty$, $\forall x \in E$. Grâce au lemme 3.1.4, on sait qu'il existe une suite de naturels $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|f - \sigma_{\lambda_j}(f)\|_B < 2^{-j}. \tag{3.20}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\omega_n = +\infty$, il existe une suite strictement croissante de naturels $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini telle que

$$\omega_{\mu_j} > j \sup_{x\in\mathbb{T}} S^*(\sigma_{\lambda_j}(f), x). \tag{3.21}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons

$$P_j = V_{\mu_{j+1}} * (f - \sigma_{\lambda_j}(f))$$

où $(V_{\mu_{j+1}})_{j\in\mathbb{N}}$ désigne le noyau de de la Vallée Poussin. Remarquons que comme $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un noyau de sommabilité, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \in L^1(\mathbb{T})$ et on en déduit que $V_n = 2K_{2n+1} - K_n \in L^1(\mathbb{T})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant le lemme 3.1.6, on en tire que $\sigma_{\lambda_j}(f) = K_{\lambda_j} * f \in B$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'affirmer que $f - \sigma_{\lambda_j}(f) \in B$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Ainsi, le lemme 3.1.6 permet également d'obtenir que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P_j \in B$ et

$$\|P_j\|_B \leqslant \|V_{\mu_{j+1}}\|_{L^1}\|f - \sigma_{\lambda_j}(f)\|_B.$$

De plus, on a vu dans la preuve de la proposition 1.3.4.1 que $\|V_n\|_{L^1} \leqslant 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on obtient en utilisant (3.20) que

$$\|P_j\|_B < 3.2^{-j} \quad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

2. On veut que $K_0$ soit non nul pour obtenir une contradiction.
3. Comme $K_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\epsilon < 1$, on a bien $K_0 > \epsilon$.

Montrons que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} \|P_j\|_B$ converge en montrant qu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Soit $\eta > 0$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ satisfont $q \geqslant p \geqslant 0$ alors on a

$$\sum_{j=p}^{q} \|P_j\|_B < 3 \sum_{j=p}^{q} 2^{-j}.$$

Étant donné que la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ converge, elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $J \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geqslant p \geqslant J$ alors

$$\sum_{j=p}^{q} \|P_j\|_B < \eta.$$

Pour conclure, il reste à montrer que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} S^*(P_j, x) = +\infty \quad \forall x \in E.$$

Soit $x \in E$. On sait donc que $S_n(f, x) \neq o(\omega_n)$ si $n \to +\infty$. Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ vérifiant

$$|S_n(f, x)| > \epsilon\, \omega_n. \tag{3.22}$$

Puisque $\lim\limits_{j \to +\infty} \frac{1}{j} = 0$, il existe $J \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tel que si $j \geqslant J$ alors $\frac{1}{j} < \epsilon$. Considérons $n > \mu_J$ tel que

$$|S_n(f, x)| > \epsilon\, \omega_n. \tag{3.23}$$

Comme la suite $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, il existe $j \geqslant J$ tel que $\mu_j < n \leqslant \mu_{j+1}$. En appliquant[4] la proposition 1.2.1, on a

$$S_n(P_j, x) = \sum_{k=-n}^{n} (V_{\mu_{j+1}} * \widehat{(f - \sigma_{\lambda_j}(f))})(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{V_{\mu_{j+1}}}(k) \left( \widehat{f}(k) - \widehat{\sigma_{\lambda_j}(f)}(k) \right) e^{ikx}.$$

En outre, on sait par la proposition 1.3.4.2 que $\widehat{V_{\mu_{j+1}}}(k) = 1$ si $|k| \leqslant \mu_{j+1} + 1$, ce qui est vérifié parce que $|k| \leqslant n \leqslant \mu_{j+1}$. On en déduit que

$$S_n(P_j, x) = \sum_{k=-n}^{n} \left( \widehat{f}(k) - \widehat{\sigma_{\lambda_j}(f)}(k) \right) e^{ikx} = S_n(f, x) - S_n(\sigma_{\lambda_j}(f), x).$$

Ainsi, en utilisant (3.23), on obtient

$$|S_n(P_j, x)| \geqslant |S_n(f, x)| - |S_n(\sigma_{\lambda_j}(f), x)| > \epsilon\, \omega_n - |S_n(\sigma_{\lambda_j}(f), x)|.$$

4. Il est possible d'appliquer cette proposition car $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$.

De plus, (3.21) implique que

$$|S_n(\sigma_{\lambda_j}(f),x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{T}}\sup_{m\in\mathbb{N}}|S_m(\sigma_{\lambda_j}(f),x)| < \frac{1}{j}\omega_{\mu_j} \leqslant \frac{1}{j}\omega_n,$$

où la dernière majoration a lieu parce que la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par conséquent, on a obtenu que

$$|S_n(P_j,x)| > \epsilon\,\omega_n - \frac{1}{j}\omega_n \geqslant \epsilon\,\omega_n - \frac{1}{J}\,\omega_n = \left(\epsilon - \frac{1}{J}\right)\omega_n.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\omega_n = +\infty$, on sait que pour tout $M\in\mathbb{N}$, il existe $L\in\mathbb{N}$ tel que si $l\geqslant L$ alors

$$\left(\epsilon - \frac{1}{J}\right)\omega_l > M.$$

Vu ce qu'on a dit précédemment avec l'existence de $\epsilon$, il existe $n_L \geqslant \max\{\mu_J, L\}$ tel que

$$|S_{n_L}(f,x)| > \omega_{n_L}.$$

En particulier, on a $\left(\epsilon - \frac{1}{J}\right)\omega_{n_L} > M$. En appliquant le raisonnement précédent à $n_L$, il s'ensuit qu'il existe $j_{N_L}\geqslant J$ tel que

$$|S_{n_L}(P_{j_{N_L}},x)| > \left(\epsilon - \frac{1}{J}\right)\omega_{n_L} > M.$$

Par conséquent, pour tout $M\in\mathbb{N}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $j\in\mathbb{N}$ tels que

$$|S_n(P_j,x)| > M$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} S^*(P_j,x) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{n\in\mathbb{N}}|S_n(P_j,x)| = +\infty.$$

$\square$

Pour terminer cette section, nous allons voir un résultat qui nous apprend que toute union dénombrable d'ensembles de divergence pour un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ est un ensemble de divergence pour cet espace.

**Proposition 3.1.3.** *Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ satisfaisant la condition : si $f\in B$ et $n\in\mathbb{Z}$ alors $e_nf\in B$ et*

$$\|e_nf\|_B = \|f\|_B.$$

*Si $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensemble de divergence pour $B$ alors*

$$E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$$

*est un ensemble de divergence pour $B$.*

*Démonstration.* Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la proposition 3.1.2 donne l'existence d'une suite $(P_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques correspondant à $E_j$ et telle que $P_n^j \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|P_n^j\|_B < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} S^*(P_n^j, x) = +\infty \quad \text{sur } E_j.$$

Puisque la série converge, sa queue tend vers 0 et pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $N_j > 0$ tel que

$$\sum_{n\geqslant N_j}^{+\infty} \|P_n^j\|_B < 2^{-j}. \tag{3.24}$$

Omettre un nombre fini de termes, dans ce cas-ci les $N_j$ premiers termes, à la suite $(P_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de garder

$$\sup_{n\geqslant N_j} S^*(P_n^j, x) = +\infty \quad \forall x \in E_j. \tag{3.25}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, retirons les $N_j$ premiers termes à la suite $(P_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ et considérons la suite $(P_n^j)_{n\geqslant N_j}$. Ainsi, on obtient en utilisant (3.24) que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n\geqslant N_j}^{+\infty} \|P_n^j\|_B \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} < +\infty$$

puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$. En outre, si $x \in E$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_k$ et on a

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant N_j} S^*(P_n^j, x) \geqslant \sup_{n\geqslant N_k} S^*(P_n^k, x) = +\infty$$

vu (3.25). On a donc construit une suite[5] $((P_n^j)_{n\geqslant N_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques qui satisfait les conditions de la proposition 3.1.2. Par conséquent, $E$ est un ensemble de divergence pour $B$.

□

## 3.2 Ensembles de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$

Dans cette section, nous allons étudier une partie des ensembles de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$. Nous montrerons que tout ensemble de mesure nulle est un ensemble de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$. Pour cela, nous avons besoin d'un résultat préliminaire. La référence [8] a été consultée pour rédiger cette section.

5. Il est possible de réindexer la suite $((P_n^j)_{n\geqslant N_j})_{j\in\mathbb{N}}$ en une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

**Lemme 3.2.1.** *Soit $E$ une union d'un nombre fini d'intervalles de $\mathbb{T}$. Notons $\delta$ la mesure de $E$. Il existe un polynôme trigonométrique $\varphi$ tel que $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ et*

$$S^*(\varphi, x) > \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{5\delta}\right) \quad \forall x \in E.$$

*Démonstration.* Identifions[6] $\mathbb{T}$ à $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Soit $\epsilon > 0$. Considérons un intervalle $I$ de $\mathbb{T}$ de la forme[7]

$$I = \{e^{ix} : |x - x_0| \leqslant \epsilon\} \quad \text{avec } x_0 \in [0, 2\pi].$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $1 + \epsilon - ze^{-ix_0} \neq 0$, posons

$$\psi_I(z) = (1 + \epsilon - ze^{-ix_0})^{-1}.$$

Cette fonction satisfait $\psi_I(0) = \frac{1}{1+\epsilon}$ et a une partie réelle positive sur $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ car si $z \in D$ alors[8]

$$\begin{aligned}\Re(\psi_I(z)) = \frac{\Re(1+\epsilon - ze^{-ix_0})}{|1+\epsilon - ze^{-ix_0}|^2} &= \frac{1 + \epsilon - \Re(\Re z\cos(x_0) - i\Re z\sin(x_0) + i\Im z\cos(x_0) + \Im z\sin(x_0))}{|1+\epsilon - ze^{-ix_0}|^2} \\ &= \frac{1+\epsilon - (\Re z\cos(x_0) + \Im z\sin(x_0))}{|1+\epsilon - ze^{-ix_0}|^2}. \qquad (3.26)\end{aligned}$$

Or, puisque $z \in D$, il s'ensuit que $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $0 \leqslant r \leqslant 1$ et $\theta \in \,]-\pi, \pi]$. Ainsi, (3.26) devient

$$\frac{1+\epsilon - r(\cos(\theta)\cos(x_0) + \sin(\theta)\sin(x_0))}{|1+\epsilon - ze^{-ix_0}|^2} \geqslant \frac{1+\epsilon - \cos(\theta - x_0)}{|1+\epsilon - ze^{-ix_0}|^2} > 0.$$

De plus, la fonction $\psi_I$ a une partie réelle plus grande que $\frac{1}{5\epsilon}$ sur $I$[9]. En effet, si $z \in I$ alors $z = e^{ix}$ avec $|x - x_0| \leqslant \epsilon$ et

$$\Re(\psi_I(e^{ix})) = \Re\left((1+\epsilon - e^{i(x-x_0)})^{-1}\right) = \frac{1+\epsilon - \cos(x - x_0)}{|1+\epsilon - e^{i(x-x_0)}|^2}.$$

Or, on a

$$1 + \epsilon - \cos(x - x_0) \geqslant \epsilon$$

6. Il est possible d'identifier $\mathbb{T}$ à $]-\pi, \pi]$ et l'application $]-\pi, \pi] \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ $x \mapsto e^{ix}$ est une bijection.

7. Vu l'identification de $\mathbb{T}$ à $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

8. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ alors $\Re\left(\frac{1}{a+ib}\right) = \Re\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{\Re(z)}{|z|^2}$

9. On sait déjà que $\Re(\psi_I(z)) > 0$ si $z \in I$ car $I \subset D$.

car $e^{ix} \in I$ donc $|x - x_0| \leqslant \epsilon$ et $\cos(x - x_0) \in [0, 1]$ si $\epsilon$ est suffisamment petit. En outre, on a

$$\begin{aligned}
|1 + \epsilon - e^{i(x-x_0)}| &\leqslant \epsilon + |1 - e^{i(x-x_0)}| \\
&\leqslant \epsilon + \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(i(x - x_0))^j}{j!} \right| \\
&\leqslant \epsilon + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|x - x_0|^j}{j!} \\
&\leqslant \epsilon + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} = \epsilon + e^{\epsilon} - 1.
\end{aligned}$$

On en tire que

$$\Re(\psi_I(e^{ix})) \geqslant \frac{\epsilon}{(\epsilon + e^{\epsilon} - 1)^2}$$

et que

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{(\epsilon + e^{\epsilon} - 1)^2} \geqslant \frac{1}{5\epsilon} &\Leftrightarrow 5\epsilon^2 \geqslant (\epsilon + e^{\epsilon} - 1)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{5} \geqslant \left(1 + \frac{e^{\epsilon} - 1}{\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, il suit que $\Re(\psi_I(e^{ix})) \geqslant \frac{1}{5\epsilon}$ si $\epsilon$ est suffisamment petit.

Par hypothèse, $E$ est une union finie d'intervalles de $\mathbb{T}$. Il existe donc des intervalles $I'_1, \ldots, I'_J$ de $\mathbb{T}$ tels que $E = \bigcup_{j=1}^{J} I'_j$, avec $J \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si on décompose ces intervalles $I'_1, \ldots, I'_J$ alors quitte à diminuer $\epsilon > 0$, il existe des intervalles $I_1, \ldots, I_N$ de $\mathbb{T}$, pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de longueur égale à $2\epsilon$ tels que $N\epsilon < \delta$ et

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j.$$

Ainsi, $I_j$ est un ensemble de la forme [10]

$$I_j = \{e^{ix} : |x - x_j| \leqslant \epsilon\} \quad \text{avec } x_j \in [0, 2\pi].$$

À présent, considérons la fonction $\psi$ définie par

$$\psi = \frac{1 + \epsilon}{N} \sum_{j=1}^{N} \psi_{I_j}.$$

10. Vu l'identification de $\mathbb{T}$ à $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Cette fonction est holomorphe sur un voisinage ouvert de $D$. En effet, on a pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ que

$$1 + \epsilon - ze^{-ix_j} = 0 \Leftrightarrow z = (1 + \epsilon)e^{ix_j}.$$

Or, $|(1+\epsilon)e^{ix_j}| > 1$ et si $z \in D$ alors $|z| \leqslant 1$. Il existe donc $D_j$ un voisinage ouvert de $D$ sur lequel la fonction $\psi_{I_j}$ est holomorphe. Il s'ensuit que $\psi$ est holomorphe sur $D' = \bigcap_{j=1}^{N} D_j$, un voisinage ouvert de $D$. De plus, la fonction $\psi$ a les propriétés suivantes :

$$\psi(0) = \frac{1+\epsilon}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{1+\epsilon} = 1.$$

Si $z \in D$ alors

$$\Re(\psi(z)) = \frac{1+\epsilon}{N} \sum_{j=1}^{N} \Re(\psi_{I_j}(z)) > 0.$$

En particulier, si $z \in E$ alors $z \in I_{j'}$ pour $j' \in \{1, \ldots, N\}$ et

$$|\psi(z)| \geqslant |\Re(\psi(z))| = \Re(\psi(z)) = \frac{1+\epsilon}{N} \sum_{j=1}^{N} \Re(\psi_{I_j}(z)) \geqslant \frac{1+\epsilon}{N} \Re(\psi_{I_{j'}}(z)) \geqslant \frac{(1+\epsilon)}{5\epsilon N} > \frac{1}{5\epsilon N} > \frac{1}{5\delta}$$

parce que comme $z \in D$, $\Re(\psi_{I_j}(z)) > 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ ; parce que si $z \in I_{j'}$ alors $\Re(\psi_{I_{j'}}(z)) \geqslant \frac{1}{5\epsilon}$ et parce qu'on a vu que $N\epsilon < \delta$.

Par conséquent, la fonction $\ln \psi$ satisfait $\ln(\psi(0)) = 0$ et est holomorphe sur un voisinage de $D$. En effet, on a montré que $\psi$ est holomorphe sur $D'$. De plus, on a vu que $\Re(\psi(z)) > 0$ si $z \in D$. Quitte à restreindre $D'$, on peut supposer que si $z \in D'$ alors $\Re(\psi(z)) > 0$. Ainsi, $\psi(z) \notin ]-\infty, 0]$ si $z \in D'$. Comme la fonction ln est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$, on obtient que $\ln \psi$ est holomorphe sur $D'$. En outre, le fonction $\ln \psi$ a les propriétés suivantes : si $z \in \mathbb{T}$ alors

$$|\Im[\ln(\psi(z))]| = |\Im[\ln(|\psi(z)|) + i \arg(\psi(z))]| = |\arg(\psi(z))| < \pi$$

car $\arg(\psi(z)) \neq \pi$ [11] étant donné que $\Re(\psi(\cdot)) > 0$ sur $D$. Si $z \in E$ alors

$$|\ln(\psi(z))| = |\ln(|\psi(z)|) + i \arg(\psi(z))| \geqslant |\ln(|\psi(z)|)| \geqslant \ln(|\psi(z)|) > \ln\left(\frac{1}{5\delta}\right)$$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et parce qu'on a vu que si $z \in E$ alors $|\psi(z)| > \frac{1}{5\delta}$.

11. On considère l'argument principal, c'est-à-dire, si $z \in \mathbb{C}$ alors $\arg(z) \in ]-\pi, \pi]$.

Puisque la fonction $\ln\psi$ est holomorphe sur $D'$, sa série de Taylor converge uniformément sur $\mathbb{T}$. On peut donc considérer une somme partielle

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{M} a_n z^n$$

de la série telle que

$$|\Im(\Phi(z))| < \pi \quad \text{si } z \in \mathbb{T} \qquad \text{et} \qquad |\Phi(z)| > \ln\left(\frac{1}{5\delta}\right) \quad \text{si } z \in E.$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}$, considérons le polynôme trigonométrique suivant

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \frac{1}{\pi} e^{-iMx}\,\Im(\Phi(e^{ix})) &= \frac{1}{2i\pi} e^{-iMx}\left(\sum_{n=1}^{M} a_n e^{inx} - \sum_{n=1}^{M} \bar{a}_n e^{-inx}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(\sum_{n=1}^{M} a_n e^{i(n-M)x} - \sum_{n=1}^{M} \bar{a}_n e^{-i(n+M)x}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\left(\sum_{m=1-M}^{0} a_{m+M} e^{imx} - \sum_{m=M+1}^{2M} \bar{a}_{m-M} e^{-imx}\right).
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}$, montrons que

$$|S_M(\varphi, x)| = \frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{ix})|.$$

Pour tout $k \in \{-M, \dots, M\}$, on a

$$\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{m=1-M}^{0} \frac{a_{m+M}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-k)t}dt - \frac{1}{2i\pi}\sum_{l=M+1}^{2M}\frac{\bar{a}_{l-M}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(l+k)t}dt.$$

Comme $k \in \{-M, \dots, M\}$ et $l \in \{M+1, \dots, 2M\}$, on a $l \neq -k$ et on a donc

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(l+k)t}dt = 0.$$

Puisque $k \in \{-M, \dots, M\}$ et $m \in \{1-M, \dots, 0\}$, pour que l'intégrale suivante

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-k)t}dt$$

soit non nulle, il faut $m = k$ et il faut donc que $k \in \{1-M, \dots, 0\}$. Par conséquent,

$$\widehat{\varphi}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} a_{k+M} & \text{si } k \in \{1-M, \dots, 0\}, \\ 0 & \text{si } k = -M \text{ ou si } k \in \{1, \dots, M\}. \end{cases}$$

On en tire que si $x \in \mathbb{T}$ alors

$$\begin{aligned}
|S_M(\varphi, x)| = \left|\sum_{k=-M}^{M} \widehat{\varphi}(k)e^{ikx}\right| &= \left|\sum_{k=1-M}^{0} \frac{1}{2i\pi} a_{k+M} e^{ikx}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|e^{-iMx}\sum_{n=1}^{M} a_n e^{inx}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{n=1}^{M} a_n e^{inx}\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{ix})|.
\end{aligned}$$

Cela permet d'obtenir que si $x \in E$ alors

$$S^*(\varphi, x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(\varphi, x)| \geqslant |S_M(\varphi, x)| = \frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{ix})| > \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{5\delta}\right)$$

car $|\Phi(z)| > \ln\left(\frac{1}{5\delta}\right)$ si $z \in E$. Enfin, si $x \in \mathbb{T}$ alors

$$|\varphi(x)| = \left|\frac{1}{\pi}e^{-iMx}\,\Im(\Phi(e^{ix}))\right| = \frac{1}{\pi}\left|\Im(\Phi(e^{ix}))\right| < 1$$

vu que $|\Im(\Phi(z))| < \pi$ si $z \in \mathbb{T}$. Donc, il s'ensuit que

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{T}} |\varphi(x)| \leqslant 1.$$

□

Nous pouvons à présent montrer que les ensembles de mesure nulle sont des ensembles de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$. Autrement dit, si $E$ est un ensemble inclus dans $\mathbb{T}$ de mesure nulle alors il existe une fonction $f \in C^0(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge en tout point de $E$.

**Théorème 3.2.1.** *Tout ensemble de mesure nulle est un ensemble de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$.*

*Démonstration.* Soit $E$ un ensemble de mesure nulle. Puisque la mesure de Lebesgue est régulière, on a $\mathcal{L}(E) = \inf\{\mathcal{L}(U) : U \text{ ouvert}, E \subset U\}$. Ainsi, pour tout $j \geqslant 2$, il existe un ouvert $U_j$ contenant $E$ tel que

$$\mathcal{L}(U_j) < \mathcal{L}(E) + 2^{-j} = 2^{-j}.$$

Comme $U_j$ est un ensemble ouvert, $U_j$ est une union dénombrable d'intervalles dyadiques semi-ouverts deux à deux disjoints, ce qu'on écrit

$$U_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{j,k}.$$

En particulier, si $x \in E$ alors pour tout $j \geqslant 2$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_{j,k}$. Donc, si $x \in E$ alors $x$ appartient à une infinité d'intervalles $I_{j,k}$, pour $j \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $j \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}\left(I_{j,k}\right) = \mathcal{L}(U_j) < 2^{-j} \tag{3.27}$$

car les intervalles de la suite $(I_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. En réindexant la suite $((I_{j,k})_{k\in\mathbb{N}})_{j\geqslant 2}$, on peut l'écrire $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$. On obtient que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{L}(I_m) = \sum_{j=2}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{L}(I_{j,k}) < \sum_{j=2}^{+\infty} 2^{-j} = \frac{1}{2} < 1$$

en utilisant la majoration (3.27). On a donc construit une suite d'intervalles $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{L}(I_m) < 1$ et telle que si $x \in E$ alors $x$ appartient à une infinité d'intervalles $I_m$. Ainsi, on a

$$E \subseteq \limsup_{m\to+\infty} I_m = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geqslant l} I_m.$$

En particulier, on peut conserver cette inclusion en retirant les premiers termes de la suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire, pour tout $M_0 \in \mathbb{N}$,

$$E \subseteq \bigcap_{l\geqslant M_0} \bigcup_{m\geqslant l} I_m.$$

Choisissons $M_0 \in \mathbb{N}$. Puisque $\sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{L}(I_m) < 1$, la série converge et la queue de la série tend donc vers 0. On en tire qu'il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{m=M_0}^{+\infty} \mathcal{L}(I_m) < e^{-2^0}.$$

De même, il existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tel que $M_1 > M_0$ et

$$\sum_{m=M_1}^{+\infty} \mathcal{L}(I_m) < e^{-2^1}.$$

Ainsi, on construit de proche en proche une suite strictement croissante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\sum_{m=M_n}^{+\infty} \mathcal{L}(I_m) < e^{-2^n}. \tag{3.28}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$E_n = \bigcup_{m=M_n}^{M_{n+1}-1} I_m.$$

On obtient donc une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\mathcal{L}(E_n) \leqslant \sum_{m=M_n}^{M_{n+1}-1} \mathcal{L}(I_m) \leqslant \sum_{m=M_n}^{+\infty} \mathcal{L}(I_m) < e^{-2^n}$$

par (3.28) et telle que si $x \in E$ alors $x$ appartient à une infinité d'ensembles $E_n$, $n \in \mathbb{N}$ parce que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et parce que si $x \in E$ alors $x$ appartient à une infinité d'intervalles $I_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\delta_n$ la mesure de $E_n$. Par le lemme 3.2.1 appliqué à l'intervalle $E_n$, il existe un polynôme trigonométrique $\varphi_n$ tel que $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1$ et

$$S^*(\varphi_n, x) > \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{5\delta_n}\right) \quad \forall x \in E_n. \tag{3.29}$$

Posons

$$P_n = \frac{1}{(n+1)^2}\varphi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Montrons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|P_n\|_\infty$ converge en montrant qu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ vérifient $q \geqslant p \geqslant 0$ alors on a

$$\sum_{n=p}^{q} \|P_n\|_\infty = \sum_{n=p}^{q} \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| \|\varphi_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=p}^{p} \frac{1}{(n+1)^2}$$

parce que $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque la série de Riemann d'ordre 2 converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geqslant p \geqslant N$ alors on a

$$\sum_{n=p}^{q} \|P_n\|_\infty < \epsilon.$$

Soit $x \in E_n$. On a

$$S_k\left(P_n, x\right) = \frac{1}{(n+1)^2} S_k(\varphi_n, x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

parce qu'on sait par la proposition 1.2.1 que $\widehat{P}_n(j) = \frac{1}{(n+1)^2}\widehat{\varphi}_n(j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On en tire en utilisant (3.29) que

$$\begin{aligned} S^*(P_n, x) = \frac{1}{(n+1)^2} S^*(\varphi_n, x) &> \frac{1}{2\pi(n+1)^2} \ln\left(\frac{1}{5\delta_n}\right) \\ &> \frac{1}{2\pi(n+1)^2} \ln\left(\frac{e^{2^n}}{5}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi(n+1)^2} \left(\ln\left(\frac{1}{5}\right) + 2^n\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

où (3.30) est obtenu parce que $\delta_n = \mathcal{L}(E_n) < e^{-2^n}$ et parce que la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, on a

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) + 2^n > 2^{n-1} \Leftrightarrow \ln(5) < 2^{n-1},$$

ce qui est vérifié dès que $n \geqslant 2$. Par conséquent, si $n \geqslant 2$ et si $x \in E_n$ alors

$$S^*(P_n, x) > \frac{2^{n-1}}{2\pi(n+1)^2}. \tag{3.31}$$

On a donc construit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques telle que $P_n \in C^0(\mathbb{T})$ car $P_n$ est un polynôme trigonométrique et telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|P_n\|_\infty < +\infty.$$

Enfin, on a vu précédemment que si $x \in E$ alors $x$ appartient à une infinité d'ensembles $E_n$. Notons $A_x = \{n \geqslant 2 : x \in E_n\}$ pour tout $x \in E$. En utilisant (3.31), on en tire que si $x \in E$ alors

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} S^*(P_n, x) &\geqslant \sup_{n\in A_x} S^*(P_n, x)\\ &\geqslant \sup_{n\in A_x} \frac{2^{n-1}}{2\pi(n+1)^2} = +\infty.\end{aligned}$$

La proposition 3.1.2 permet de conclure que $E$ est un ensemble de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$. □

## 3.3 Dichotomie

Nous avons vu que tout ensemble de mesure nulle est un ensemble de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$. Nous allons utiliser ce résultat pour obtenir une certaine dichotomie concernant la convergence et la divergence des séries de Fourier de fonctions appartenant à un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Cette section a été rédigée en consultant [8].

**Théorème 3.3.1.** *Soit $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ satisfaisant la condition : si $f \in B$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors $e_n f \in B$ et*

$$\|e_n f\|_B = \|f\|_B.$$

*Supposons que $C^0(\mathbb{T}) \subseteq B$. Alors, soit $\mathbb{T}$ est un ensemble de divergence pour $B$, soit les ensembles de divergence pour $B$ sont précisément les ensembles de mesure nulle.*

*Démonstration.* Par le théorème 3.2.1, tout ensemble de mesure nulle est un ensemble de divergence pour $C^0(\mathbb{T})$ et donc pour $B$ puisque $C^0(\mathbb{T}) \subseteq B$. Il reste à montrer que si un ensemble de mesure strictement positive est un ensemble de divergence pour $B$ alors $\mathbb{T}$ est un ensemble de divergence pour $B$. Soit $E$ un ensemble de divergence de mesure strictement positive. Pour $\alpha \in \mathbb{T}$, posons [12]

$$E_\alpha = \{x + \alpha : x \in E\}.$$

Étant donné que $E$ est un ensemble de divergence pour $B$, il existe $f \in B$ dont la série de Fourier diverge sur $E$. Considérons $f_\alpha = f(\,\cdot\, - \alpha)$. La définition 3.1.1 d'un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ implique que $f_\alpha \in B$. Comme $f_\alpha(\,\cdot\, + \alpha) = f$, la série de Fourier de $f_\alpha$ diverge sur $E_\alpha$ et on obtient que $E_\alpha$ est un ensemble de divergence pour $B$.
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de tous les multiples rationnels de $2\pi$ appartenant à $\mathbb{T}$ et posons

$$\tilde{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{\alpha_n}.$$

Par la proposition 3.1.3, on sait que $\tilde{E}$ est un ensemble de divergence pour $B$. Montrons que $\mathbb{T}\backslash\tilde{E}$ est un ensemble de mesure nulle. Soit $\chi_{\tilde{E}}$ la fonction caractéristique sur $\tilde{E}$. Remarquons que $\chi_{\tilde{E}}(x - \alpha_n) = \chi_{\tilde{E}}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ car

$$\begin{aligned} x - \alpha_n \in \tilde{E} &\Leftrightarrow x - \alpha_n = x' + \alpha_{n'} && \text{avec } x' \in E \text{ et } n' \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x = x' + \alpha_{n''} && \text{avec } x' \in E \text{ et } n'' \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x \in \tilde{E} \end{aligned}$$

puisque $\alpha_n + \alpha_{n'}$ est un multiple rationnel de $2\pi$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_{\tilde{E}}(j) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{\tilde{E}}(t)e^{-ijt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{\tilde{E}}(t-\alpha_n)e^{-ijt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_n}^{2\pi-\alpha_n} \chi_{\tilde{E}}(u)e^{-ij(u+\alpha_n)}du \\ &= e^{-ij\alpha_n}\widehat{\chi}_{\tilde{E}}(j), \end{aligned}$$

en appliquant la substitution $u = t - \alpha_n$ et par périodicité de la fonction $\chi_{\tilde{E}}$. Il s'ensuit que pour $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\chi}_{\tilde{E}}(j)(1 - e^{-ij\alpha_n}) = 0.$$

L'égalité étant vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver pour chaque $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, un élément $\alpha_{n'}$ de la suite $(\alpha_n)_n$ tel que $j\alpha_{n'} \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$ de sorte que $(1 - e^{-ij\alpha_{n'}}) \neq 0$. On en tire

12. Rappelons que l'on travaille avec la relation d'équivalence modulo $2\pi$, il est donc sous-entendu que $E_\alpha = \{x + \alpha \bmod 2\pi : x \in E\}$.

que si $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ alors $\hat{\chi}_{\tilde{E}}(j) = 0$. On obtient donc que $\chi_{\tilde{E}}$ est constant presque partout. Puisque $\chi_{\tilde{E}}$ est une fonction caractéristique, la mesure de $\tilde{E}$ vaut donc 0 ou 1. Comme $E$ est inclus dans $\tilde{E}$ et comme la mesure de $E$ est strictement positive, il s'ensuit que la mesure de $\tilde{E}$ vaut 1 et que $\mathbb{T}\backslash\tilde{E}$ est un ensemble de mesure nulle. Comme vu au début de la preuve, cela entraîne que $\mathbb{T}\backslash\tilde{E}$ est un ensemble de divergence pour $B$. Puisque $\tilde{E}$ est un ensemble de divergence pour $B$, on en tire que $\mathbb{T} = \tilde{E} \cup \mathbb{T}\backslash\tilde{E}$ est un ensemble de divergence pour $B$ en utilisant la proposition 3.1.3.

□

Considérons $B$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$ satisfaisant les hypothèses du théorème 3.3.1. Au vu de la définition 3.1.2 d'un ensemble de divergence, ce théorème nous apprend que soit il existe une fonction appartenant à $B$ dont la série de Fourier diverge partout, soit la série de Fourier de toute fonction appartenant à $B$ converge presque partout.

On peut notamment considérer l'espace $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leqslant p < +\infty$ puisque celui-ci vérifie les hypothèses du théorème 3.3.1.

En ce qui concerne l'espace $L^1(\mathbb{T})$, Andreï Kolmogorov (1903-1987) a donné en 1926 un exemple de fonction intégrable dont la série de Fourier diverge partout. Une preuve de ce résultat sera fournie dans la prochaine section.

En 1966, Lennart Carleson (1928-) prouve [13] que si $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors sa série de Fourier converge vers $f$ presque partout. En 1967, Richard Hunt (1937-2009) étend ce résultat aux fonctions appartenant à $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < +\infty$. Étant donné que $C^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, on obtient également que la série de Fourier de toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ converge presque partout.

## 3.4 Théorème de Kolmogorov

Dans cette section, nous allons montrer qu'il existe une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge partout. Pour cela, nous avons besoin de considérer des réels qui satisfont une propriété particulière. Une preuve de l'existence de ces réels nécessite le théorème de Kronecker fourni dans la référence [8]. Ce théorème ne sera pas démontré dans ce mémoire. La rédaction de cette section a été réalisée en consultant la référence [8].

**Théorème 3.4.1.** ***(Kronecker)*** *Soient $x_1, \ldots, x_N$ des réels tels que $x_1, \ldots, x_N, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Soient $\epsilon > 0$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ des réels. Alors, il existe un entier $n$ tel que*

$$|e^{inx_j} - e^{i\alpha_j}| < \epsilon \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\}.$$

**Lemme 3.4.1.** *Soit $K > 0$. Il existe des réels $t_1, \ldots, t_M$ avec $M \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que pour presque tout $x \in \mathbb{T}$, on a*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{2\pi M} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=1}^{M} e^{ik(x-t_j)} \right| > K.$$

13. Ce résultat a été prouvé au cours d'introduction à l'analyse harmonique [1].

*Démonstration.* Soient $K > 0$ et $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soient $t_1, \ldots, t_M$ des réels tels que $t_1, \ldots, t_M, \pi$ sont linéairement indépendants [14] sur $\mathbb{Q}$ et tels que

$$\left| t_j - \frac{2\pi j}{M} \right| < \frac{1}{M^2} \quad \text{pour } j \in \{1, \ldots, M\}. \tag{3.32}$$

Cela est possible parce que si $t_1, \ldots, t_M$ sont des réels tels que $t_1, \ldots, t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et si on pose $t'_j = r_j t_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, M\}$ où $r_j \in \mathbb{Q}$ satisfait [15]

$$\begin{cases} \frac{1}{t_j}\left(\frac{2\pi j}{M} - \frac{1}{M^2}\right) < r_j < \frac{1}{t_j}\left(\frac{2\pi j}{M} + \frac{1}{M^2}\right) & \text{si } t_j > 0, \\ \frac{1}{t_j}\left(\frac{2\pi j}{M} - \frac{1}{M^2}\right) > r_j > \frac{1}{t_j}\left(\frac{2\pi j}{M} + \frac{1}{M^2}\right) & \text{si } t_j < 0 \end{cases}$$

alors, on a

$$t'_j \in \left] \frac{2\pi j}{M} - \frac{1}{M^2}, \frac{2\pi j}{M} + \frac{1}{M^2} \right[ \quad \forall j \in \{1, \ldots, M\}$$

c'est-à-dire

$$\left| t'_j - \frac{2\pi j}{M} \right| < \frac{1}{M^2} \quad \forall j \in \{1, \ldots, M\}.$$

Étant donné que $t_1, \ldots, t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, il s'ensuit que $t'_1, \ldots, t'_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ car $r_j \in \mathbb{Q}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, M\}$.

À présent, si $x \in \mathbb{T}$ alors on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi M} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=1}^{M} e^{ik(x-t_j)} &= \frac{1}{2\pi M} \sum_{j=1}^{M} D_n(x - t_j) \\ &= \frac{1}{2\pi M} \sum_{j=1}^{M} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(x - t_j)\right)}{\sin\left(\frac{(x-t_j)}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

La dernière égalité a lieu si $x - t_j$ n'est pas un multiple entier de $2\pi$. Or, pour presque tout $x \in \mathbb{T}$, les réels $x - t_1, \ldots, x - t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En effet, si $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_M$ sont des rationnels alors on a

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j (x - t_j) + \beta\pi = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{M} \beta_j x - \sum_{j=1}^{M} \beta_j t_j + \beta\pi = 0.$$

Ainsi, les réels $x - t_1, \ldots, x - t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ si $x, t_1, \ldots, t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Comme $t_1, \ldots, t_M, \pi$ sont linéairement indépendants

14. L'existence de ces réels $t_1, \ldots, t_M$ est fournie en considérant des éléments d'une base de Hamel de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-vectoriel) qui contient $\pi$.

15. Les réels $t_1, \ldots, t_M$ sont non nuls car $t_1, \ldots, t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur les rationnels.

sur $\mathbb{Q}$, il suffit que $x$ ne soit pas une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $t_1, \dots, t_M, \pi$. Or,

$$E = \left\{ x \in \mathbb{T} : x = \sum_{j=1}^{M} \beta_j t_j + \beta\pi \, ; \, \beta, \beta_1, \dots, \beta_M \in \mathbb{Q} \right\}$$

est un ensemble dénombrable. Ainsi, la mesure de Lebesgue de $E$ est nulle et pour presque tout $x \in \mathbb{T}$, $x$ n'est pas une combinaison linéaire sur $\mathbb{Q}$ de $t_1, \dots, t_M, \pi$. Par conséquent, pour presque tout $x \in \mathbb{T}$, les réels $x - t_1, \dots, x - t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En particulier, pour ces réels $x$ et pour tout $j \in \{1, \dots, M\}$, $x - t_j$ n'est pas un multiple entier de $2\pi$ et l'égalité (3.33) est vérifiée. [16]
On peut donc appliquer le théorème de Kronecker 3.4.1. Pour presque tout $x \in \mathbb{T}$ et pour $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ des réels, il existe un entier $n_x$ tel que

$$|e^{in_x(x-t_j)} - e^{i\alpha_j}| < \frac{1}{2} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}.$$

Or, pour tout $j \in \{1, \dots, M\}$, on a

$$|e^{in_x(x-t_j)} - e^{i\alpha_j}| = |e^{-i\frac{1}{2}(x-t_j)}(e^{i\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)} - e^{i\alpha_j} e^{i\frac{1}{2}(x-t_j)})| \quad = |e^{i\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)} - e^{i\alpha_j} e^{i\frac{1}{2}(x-t_j)}|$$

et on veut avoir l'égalité [17]

$$e^{i\alpha_j} e^{i\frac{1}{2}(x-t_j)} = i \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) \Leftrightarrow e^{i\alpha_j} = ie^{-i\frac{1}{2}(x-t_j)} \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right).$$

Comme

$$\left| ie^{-i\frac{1}{2}(x-t_j)} \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) \right| = 1,$$

il existe un réel $\alpha_j$ tel que

$$e^{i\alpha_j} e^{i\frac{1}{2}(x-t_j)} = i \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right). \tag{3.34}$$

En considérant les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ pour que (3.34) soit satisfait, on obtient que pour presque tout $x \in \mathbb{T}$, il existe un entier $n_x$ tel que

$$\left| e^{i\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)} - i \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) \right| < \frac{1}{2} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}.$$

16. Jusqu'à la fin de la preuve, lorsque "pour presque tout $x \in \mathbb{T}$" est mentionné, cela sous-entend qu'on considère $x \in \mathbb{T}$ tel que $x - t_1, \dots, x - t_M, \pi$ sont linéairement indépendants sur les rationnels.

17. Remarquons que $\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) \neq 0$ car on considère presque tout $x \in \mathbb{T}$ et la note de bas de page n°16 implique que pour ces $x \in \mathbb{T}$ et pour $j \in \{1, \dots, M\}$, $x - t_j$ n'est pas un multiple entier de $2\pi$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, M\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| e^{i\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)} - i\,\mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right)\right| < \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos^2\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) + \left[\sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) - \mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right)\right]^2 < \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) = 1$ alors on a

$$\begin{aligned}
&\cos^2\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) + \left[\sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) - 1\right]^2 < \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow 2 - 2\sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) < \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow 1 - \sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) < \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) = -1$ alors on obtient par un raisonnement similaire que

$$\begin{aligned}
&\cos^2\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) + \left[\sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) + 1\right]^2 < \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow \sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) < -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
&\left| e^{i\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)} - i\,\mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right)\right| < \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) > \frac{1}{2} & \text{si } \mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) = 1, \\ \sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right) < -\frac{1}{2} & \text{si } \mathrm{sign}\left(\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right) = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $j \in \{1, \ldots, M\}$, on a

$$\frac{\sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right)}{\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)} > \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1}. \tag{3.35}$$

Pour presque tout $x \in \mathbb{T}$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, M\}$, on déduit de l'égalité (3.33) et de la minoration (3.35) que

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{2\pi M}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=1}^{M}e^{ik(x-t_j)}\right| &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{2\pi M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right)}{\sin\left(\frac{(x-t_j)}{2}\right)}\right|\\ &\geqslant \frac{1}{2\pi M}\sum_{j=1}^{M}\frac{\sin\left(\left(n_x+\frac{1}{2}\right)(x-t_j)\right)}{\sin\left(\frac{(x-t_j)}{2}\right)}\\ &> \frac{1}{2\pi M}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1}.\end{aligned}$$

À présent, fixons $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $M_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que si $M \geqslant M_0$ alors

$$\frac{1}{2\pi M}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{12\pi^2}\int_{\frac{3\pi}{M}}^{\pi}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du - \epsilon. \tag{3.36}$$

Posons $t_0 = t_M$. Considérons $j_1 \in \{1,\dots,M\}$ satisfaisant $x - t_{j_1} < \pi$ et $x - t_{j_1-1} > \pi$ et $j_2 \in \{1,\dots,M\}$ tel que $0 < x - t_{j_2} < \frac{3\pi}{M}$. Étant donné que l'on travaille avec la relation d'équivalence modulo $2\pi$ et vu le choix des réels $t_1,\dots,t_M$ ; il est toujours possible de trouver $j_1$. L'existence de $j_2$ découle de

$$\begin{aligned}x - t_{j-1} - (x-t_j) = t_j - t_{j-1} &\leqslant \frac{2\pi j}{M} + \frac{1}{M^2} - \left(\frac{2\pi(j-1)}{M} - \frac{1}{M^2}\right)\\ &= \frac{2\pi}{M} + \frac{2}{M^2} \leqslant \frac{2\pi}{M} + \frac{2}{M} < \frac{3\pi}{M},\end{aligned}$$

pour tout $j \in \{1,\dots,M\}$. Afin d'au moins avoir $x - t_{j_1}, x - t_{j_1+1}, x - t_{j_2} \in ]0,\pi[$, nous allons supposer jusqu'à la fin de la preuve que $M \geqslant 9$ sans le mentionner à chaque reprise.

Pour prouver (3.36), nous allons traiter deux cas :

(a) $x - t_1 \notin ]0,\pi[$ ou $x - t_M \notin ]0,\pi[$ (b) $x - t_1 \in ]0,\pi[$ et $x - t_M \in ]0,\pi[$.

(a) Supposons que $x - t_1 \notin ]0,\pi[$ ou $x - t_M \notin ]0,\pi[$. Notons que $x - t_j \in \left]\frac{3\pi}{M},\pi\right[$ pour tout $j \in \{j_1,\dots,j_2-1\}$. On peut écrire la minoration suivante

$$\frac{1}{4\pi M}\sum_{j=1}^{M}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{4\pi M}\sum_{j=j_1+1}^{j_2}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1}.$$

Puisque on a vu que $x - t_{j-1} - (x - t_j) < \frac{3\pi}{M}$ pour $j \in \{1,\dots,M\}$, il s'ensuit que

$$\frac{1}{4\pi M} > \frac{1}{12\pi^2}(x - t_{j-1} - (x - t_j)).$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{4\pi M}\sum_{j=j_1+1}^{j_2}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} > \frac{1}{12\pi^2}\sum_{j=j_1+1}^{j_2}\int_{x-t_j}^{x-t_{j-1}}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1}du.$$

Notons que si $j\in\{j_1+1,\dots,j_2\}$ alors $\frac{x-t_j}{2}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On en tire que si $u\in[x-t_j,x-t_{j-1}]$ alors

$$\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right| = \sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right) \leqslant \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

par croissance de la fonction sinus sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On obtient donc que

$$\begin{aligned}\frac{1}{12\pi^2}\sum_{j=j_1+1}^{j_2}\int_{x-t_j}^{x-t_{j-1}}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1}du &\geqslant \frac{1}{12\pi^2}\sum_{j=j_1+1}^{j_2}\int_{x-t_j}^{x-t_{j-1}}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du\\ &= \frac{1}{12\pi^2}\int_{x-t_{j_2}}^{x-t_{j_1}}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du.\end{aligned}$$

Comme on suppose que $x-t_{j_2}<\frac{3\pi}{M}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{12\pi^2}\int_{x-t_{j_2}}^{x-t_{j_1}}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du &\geqslant \frac{1}{12\pi^2}\int_{\frac{3\pi}{M}}^{x-t_{j_1}}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du\\ &= \frac{1}{12\pi^2}\int_{\frac{3\pi}{M}}^{\pi}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du - \frac{1}{12\pi^2}\int_{x-t_{j_1}}^{\pi}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du.\end{aligned}$$

Au vu de (3.32), les éléments $t_j$ dépendent de $M$, on aurait pu écrire[18] $t_{j,M}$ à la place de $t_j$. Il est donc possible de considérer $\lim\limits_{M\to+\infty} x-t_{j_1,M}$. Montrons que cette limite existe et vaut $\pi$. On a pour tout $j\in\{1,\dots,M\}$,

$$\begin{aligned}x-t_{j-1}-(x-t_j)=t_j-t_{j-1} &\geqslant \frac{2\pi j}{M}-\frac{1}{M^2}-\left(\frac{2\pi(j-1)}{M}+\frac{1}{M^2}\right)\\ &= \frac{2\pi}{M}-\frac{2}{M^2}\geqslant\frac{2\pi}{M}-\frac{2}{M}>\frac{\pi}{M}\end{aligned}$$

et on a déjà vu que $x-t_{j-1}-(x-t_j)<\frac{3\pi}{M}$. On en tire que

$$\frac{\pi}{M}<x-t_{j_1-1}-(x-t_{j_1})<\frac{3\pi}{M},$$

18. Pour éviter d'alourdir les notations, nous n'écrirons pas toujours "$t_{j,M}$" dans la suite de la preuve. On s'autorise d'écrire $t_j$ ou $t_{j,M}$ pour désigner le même élément.

ce qui permet d'obtenir que $\lim\limits_{M\to+\infty} x - t_{j_1,M} = \pi$ car on a choisi $j_1 \in \{1,\ldots,M\}$ de sorte que $x - t_{j_1} < \pi$ et $x - t_{j_1-1} > \pi$. Ainsi, il existe $M_1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que si $M \geqslant M_1$ alors $x - t_{j_1} > \frac{\pi}{6}$. On en tire que

$$\int_{x-t_{j_1}}^{\pi} \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1} du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \chi_{]x-t_{j_1},\pi]}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1} du.$$

Il découle également de $\lim\limits_{M\to+\infty} x - t_{j_1,M} = \pi$ que si $u \in \left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$ alors

$$\lim_{M\to+\infty} \chi_{]x-t_{j_1},\pi]}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1} = 0.$$

De plus, si $u \in \left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$ alors

$$\left|\chi_{]x-t_{j_1},\pi]}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}\right| \leqslant \left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right|^{-1}.$$

Or, la fonction $u \mapsto \left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right|^{-1}$ est continue sur le compact $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$ et y est donc intégrable. Le théorème de la convergence dominée implique que

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \chi_{]x-t_{j_1},\pi]}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1} du = 0.$$

Ainsi, il existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $M \geqslant \max\{M_1, M_2\}$ alors

$$\frac{1}{12\pi^2} \int_{x-t_{j_1}}^{\pi} \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1} du = \frac{1}{12\pi^2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \chi_{]x-t_{j_1},\pi]}(u) \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1} du < \epsilon,$$

ce qui prouve (3.36) en posant $M_0 = \max\{M_1, M_2\}$.

(b) Supposons que $x - t_1 \in ]0,\pi[$ et $x - t_M \in ]0,\pi[$. Notons que $x - t_j \in \left]\frac{3\pi}{M},\pi\right[$ pour tout $j \in \{j_1,\ldots,M\} \cup \{1,\ldots,j_2-1\}$ si $j_2 \neq 1$. On a la minoration suivante

$$\frac{1}{4\pi M} \sum_{j=1}^{M} \left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{4\pi M} \sum_{j=1}^{j_2} \left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1}$$

si $j_1 = M$ et

$$\frac{1}{4\pi M} \sum_{j=1}^{M} \left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{4\pi M} \sum_{j=j_1+1}^{M} \left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} + \frac{1}{4\pi M} \sum_{j=1}^{j_2} \left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1}$$

sinon. En réalisant un développement similaire à celui du point (a), on obtient que

$$\frac{1}{4\pi M} \sum_{j=j_1+1}^{M} \left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{12\pi^2} \int_{x-t_M}^{x-t_{j_1}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1} du$$

et que

$$\frac{1}{4\pi M}\sum_{j=1}^{j_2}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{12\pi^2}\int_{x-t_{j_2}}^{x-t_M}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi M}\sum_{j=1}^{M}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} &\geqslant \frac{1}{12\pi^2}\int_{x-t_M}^{x-t_{j_1}}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du + \frac{1}{12\pi^2}\int_{x-t_{j_2}}^{x-t_M}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du\\ &= \frac{1}{12\pi^2}\int_{x-t_{j_2}}^{x-t_{j_1}}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du.\end{aligned}$$

On conclut comme dans le cas (a) pour obtenir (3.36).

En outre, en appliquant la substitution $v = \frac{u}{2}$, on a

$$\int_{\frac{3\pi}{M}}^{\pi}\sin\left(\frac{u}{2}\right)^{-1}du = 2\int_{\frac{3\pi}{2M}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin(v)}dv \geqslant 2\int_{\frac{3\pi}{2M}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{v}dv$$

parce que $\sin(x) \leqslant x$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Étant donné que $\left[\frac{1}{M}, 1\right] \subset \left[\frac{3\pi}{2M}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en tire que

$$2\int_{\frac{3\pi}{2M}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{v}dv \geqslant 2\int_{\frac{1}{M}}^{1}\frac{1}{v}dv = 2\left(\ln(1) - \ln\left(\frac{1}{M}\right)\right) = 2\ln(M).$$

Par conséquent, si $M \geqslant M_0$ alors (3.36) devient

$$\frac{1}{2\pi M}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{x-t_j}{2}\right)\right|^{-1} \geqslant \frac{1}{6\pi^2}\ln(M) - \epsilon.$$

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, il existe $M_3 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que si $M \geqslant M_3$ alors

$$\frac{1}{6\pi^2}\ln(M) - \epsilon > K.$$

Finalement, on obtient que si $M \geqslant \max\{M_0, M_3\}$ alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{2\pi M}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=1}^{M}e^{ik(x-t_j)}\right| > K,$$

ce qui prouve le résultat.

$\square$

Nous pouvons à présent prouver le théorème de Kolmogorov.

**Théorème 3.4.2.** ***(Kolmogorov)*** *Il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier diverge partout.*

*Démonstration.* Soit $K > 0$. Par le lemme 3.4.1, il existe des réels $t_1, \dots, t_M$ avec $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que pour presque tout $x \in \mathbb{T}$, on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2\pi M} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=1}^{M} e^{ik(x-t_j)} \right| > K.$$

Posons $f_{n,K}(x) = \frac{1}{2\pi M} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=1}^{M} e^{ik(x-t_j)}$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Désignons par $\mu$ la mesure de Lebesgue normalisée. On a

$$\begin{aligned} 1 = \mu\left(\left\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_{n,K}(x)| > K\right\}\right) &= \mu\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n < N} |f_{n,K}(x)| > K\right\}\right) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n < N} |f_{n,K}(x)| > K\right\}\right) \end{aligned}$$

où la dernière égalité a lieu car il s'agit d'une suite croissante d'ensembles. Ainsi, il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \mu\left(\left\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n < N_K} |f_{n,K}(x)| > K\right\}\right) - 1 \right| < \frac{1}{K}.$$

En particulier,

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n < N_K} |f_{n,K}(x)| > K\right\}\right) > 1 - \frac{1}{K}. \tag{3.37}$$

Posons

$$E_K = \left\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n < N_K} |f_{n,K}(x)| > K\right\} \quad \text{et} \quad \varphi_K(x) = \frac{1}{2\pi M} \sum_{j=1}^{M} V_{N_K}(x - t_j) \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

où $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne le noyau de la Vallée Poussin. Ainsi, $\varphi_K$ est un polynôme trigonométrique tel que $\|\varphi_K\|_{L^1} \leqslant 3$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|V_{N_K}(\cdot - t_j)\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |2K_{2N_K+1}(x - t_j) - K_{N_K}(x - t_j)| dx \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_{2N_K+1}(x - t_j)| dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_{N_K}(x - t_j)| dx \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-t_j}^{2\pi - t_j} |K_{2N_K+1}(y)| dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-t_j}^{2\pi - t_j} |K_{N_K}(y)| dy \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_{2N_K+1}(y)| dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_{N_K}(y)| dy = 3 \end{aligned}$$

puisque le noyau de Fejér est un noyau de sommabilité positif. Ainsi,

$$\|\varphi_K\|_{L^1} \leqslant \frac{1}{2\pi M}\sum_{j=1}^{M}\|V_{N_K}(\cdot - t_j)\|_{L^1} \leqslant 3.$$

Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, remarquons que

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_K(l) &= \frac{1}{4\pi^2 M}\sum_{j=1}^{M}\int_0^{2\pi}(2K_{2N_K+1}(x-t_j) - K_{N_K}(x-t_j))e^{-ilx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi^2 M}\sum_{j=1}^{M}\int_{-t_j}^{2\pi-t_j}(2K_{2N_K+1}(y) - K_{N_K}(y))e^{-il(y+t_j)}dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2 M}\sum_{j=1}^{M}e^{-ilt_j}\left[2\int_0^{2\pi}K_{2N_K+1}(y)e^{-ily}dy - \int_0^{2\pi}K_{N_K}(y)e^{-ily}dy\right]
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{2\pi}K_{N_K}(y)e^{-ily}dy = \sum_{m=-N_K}^{N_K}\left(1-\frac{|m|}{N_K+1}\right)\int_0^{2\pi}e^{i(m-l)y}dy = 2\pi\left(1-\frac{|l|}{N_K+1}\right).$$

Ainsi, on en tire que

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_K(l) &= \frac{1}{4\pi^2 M}\sum_{j=1}^{M}2\pi e^{-ilt_j}\left[2\left(1-\frac{|l|}{2N_K+2}\right) - \left(1-\frac{|l|}{N_K+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi M}\sum_{j=1}^{M}e^{-ilt_j}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $x \in E_K$ alors

$$\begin{aligned}
S^*(\varphi_K, x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|S_n(\varphi_K, x)| &\geqslant \sup_{n<N_K}\left|\sum_{l=-n}^{n}\widehat{\varphi}_K(l)e^{ilx}\right| \\
&= \sup_{n<N_K}\left|\frac{1}{2\pi M}\sum_{l=-n}^{n}\sum_{j=1}^{M}e^{il(x-t_j)}\right| > K. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Posons $P_k = \frac{1}{k^2}\varphi_{2^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Notons que $P_k \in L^1(\mathbb{T})$ pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Montrons que la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\|P_k\|_{L^1}$ converge en montrant qu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ satisfont $q \geqslant p \geqslant 0$ alors puisque $\|\varphi_{2^k}\|_{L^1} \leqslant 3$, on obtient que

$$\sum_{k=p}^{p}\|P_k\|_{L^1} \leqslant 3\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{k^2}.$$

Comme la série de Riemann d'ordre 2 converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geqslant p \geqslant N$ alors

$$\sum_{k=p}^{p} \|P_k\|_{L^1} < \epsilon.$$

Posons

$$E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant m} E_{2^k}.$$

Si $x \in E$ alors pour tout $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, il existe $k(m) \geqslant m$ tel que $x \in E_{2^{k(m)}}$. Soit $x \in E$. En utilisant la proposition 1.2.1, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}} S^*(P_k, x) &= \sup_{k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{l=-n}^{n} \frac{1}{k^2} \widehat{\varphi}_{2^k}(l) e^{ilx} \right| \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}} \frac{1}{k^2} S^*(\varphi_{2^k}, x) \\
&\geqslant \sup_{m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}} \frac{1}{k(m)^2} S^*(\varphi_{2^{k(m)}}, x) \\
&> \sup_{m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}} \frac{1}{k(m)^2} 2^{k(m)} = +\infty
\end{aligned}$$

où la dernière minoration est donnée par (3.38) et car $x \in E_{2^{k(m)}}$. En appliquant la proposition 3.1.2 avec la suite de polynômes trigonométriques $(P_k)_{k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}}$, on obtient que $E$ est un ensemble de divergence pour $L^1(\mathbb{T})$. En outre,

$$\begin{aligned}
\mu(E) = \mu\left( \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geqslant m} E_{2^k} \right) &= \lim_{m \to +\infty} \mu\left( \bigcup_{k \geqslant m} E_{2^k} \right) \\
&\geqslant \lim_{m \to +\infty} \mu\left(E_{2^m}\right) \\
&\geqslant \lim_{m \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^m} = 1
\end{aligned}$$

en utilisant les propriétés d'une mesure, le fait que la suite $\left(\bigcup_{k \geqslant m} E_{2^k}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante et grâce à (3.37). On en tire que $E = \mathbb{T}$ presque partout. Par le théorème 3.3.1, on obtient que $\mathbb{T}$ est un ensemble de divergence pour $L^1(\mathbb{T})$ et la conclusion suit.

□

# Annexe

**Proposition 3.4.1.** *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres positifs telle que* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n < +\infty$ *alors il existe une suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres positifs qui croît vers l'infini telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n < +\infty.$$

*Démonstration.* Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge, la queue de la série tend vers 0 et il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n \leqslant 1.$$

De même, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $N_1 > N_0$ et

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} x_n \leqslant 2^{-2}.$$

On construit de proche en proche une suite strictement croissante $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\sum_{n=N_j}^{+\infty} x_n \leqslant 2^{-2j}.$$

Posons

$$y_n = \begin{cases} 2^j & \text{si } n \in \{N_j, \dots, N_{j+1}-1\}, \\ 1 & \text{si } n \leqslant N_0. \end{cases}$$

La suite $(y_n)_n$ est croissante et tend vers l'infini. De plus, comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n y_n + \sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n y_n &= \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n=N_j}^{N_{j+1}-1} x_n 2^j \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n + \sum_{j=0}^{+\infty} 2^j \sum_{n=N_j}^{+\infty} x_n \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n + \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} < +\infty.\end{aligned}$$

□

# Bibliographie


[1] BASTIN, Françoise. *Introduction à l'analyse harmonique MATH0511*. Université de Liège, 2022. Disponible via l'URL <http://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/AnHarm/20-23/Main3BM(290922).pdf> (consulté le 11 octobre 2022).

[2] DE MARÇAY, François. *Séries de Fourier*. Département de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, France. Disponible via l'URL <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~joel.merker/Enseignement/Analyse-de-Fourier/series-de-Fourier.pdf> (consulté le 15 novembre 2022).

[3] ESSER, Céline et Yvik SWAN. *Processus Stochastiques II*. 2020-2021.

[4] FOURIER, Joseph. *Théorie analytique de la chaleur*. 1822. Disponible via l'URL <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v.texteImage> (consulté le 26 mars 2022).

[5] FRANCINOU-GIANELLA, Nicolas. *Fonctions à variation bornée*. Disponible via l'URL <http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/devagreg/Fonctions_variations_bornees.pdf> (consulté le 4 avril 2023).

[6] HILLE, Einar et Ralph Saul PHILLIPS. *Functional analysis and semi-groups*. Revised ed. Providence, RI : American Mathematical Society, 1957. (American Mathematical Society Colloquium Publications, 31).

[7] KAHANE, Jean-Pierre. *Séries de Fourier et ondelettes*. Paris : Cassini, 1998. (Nouvelle bibliothèque mathématique, 3). ISBN 2-84225-001-X.

[8] KATZNELSON, Yitzhak. *An introduction to harmonic analysis*. New York, NY : J. Wiley, 1968.

[9] MONTGOMERY, Hugh L. et Robert C. VAUGHAN. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*. Vol. 97. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). ISBN 978-0-521-84903-6 ; 0-521-84903-9.

[10] NICOLAY, Samuel. *Théorie de la mesure*. Université de Liège, 2022. Disponible via l'URL <http://www.afaw.ulg.ac.be/mesure/mesure.pdf> (consulté le 30 janvier 2023).

[11] *Noyau de Fejér*. 2018. Disponible via l'URL <https://fr.wikipedia.org/wiki/Noyau_de_Fej%C3%A9r> (consulté le 28 janvier 2023).

[12] *Problème. Série de Fourier. Noyau de Fejer (Devoir surveillé n°2 correction)*. Lycée Pierre de Fermat Toulouse, 2019. Disponible via l'URL `<https://cahier-de-prepa.fr/mpsi3-fermat/download?id=672>` (consulté le 28 janvier 2023).

[13] ZYGMUND, Antoni. *Trigonometric series*. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1959.

[14] ZYGMUND, Antoni. *Trigonometric series*. Third edition. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2002. (Cambridge mathematical library). ISBN 9780521890533.

# Table des matières