

---

## Approche asymptotique de l'analyse critique des structures à assemblages semi-rigides

**Auteur** : Crahay, Romain

**Promoteur(s)** : Denoel, Vincent

**Faculté** : Faculté des Sciences appliquées

**Diplôme** : Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

**Année académique** : 2022-2023

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/17592>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---

**Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées**

2eme Master Ingénieur civil des constructions

Année académique 2022-2023

Promoteur : V. Denoël



Mémoire de fin d'études réalisé par

Romain Crahay

en vue de l'obtention du grade de Master Ingénieur Civil des constructions

---

## **Approche asymptotique de l'analyse critique des structures à assemblages semi-rigides**

---

Membres du jury :

M. Geuzaine - ULiège

J-F. Demnceau - ULiège

V. Denoël - ULiège

R. Bodson - B.E Greisch

**Liège**

**Juin 2023**

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>2</b>
<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Notations</b>	<b>6</b>
<b>Résumé</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>8</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2 Principes de base nécessaires au développement de la théorie</b>	<b>10</b>
2.1 La méthode des perturbations ([6]) . . . . .	10
2.2 Classification des structures ([8],[4],[7]) . . . . .	11
2.2.1 Structure contreventée et non-contreventée . . . . .	12
2.2.2 Structure souple ou rigide . . . . .	12
2.2.3 Conclusion . . . . .	12
2.3 Classification des assemblages . . . . .	13
2.3.1 Classification par rigidité des assemblages . . . . .	15
2.4 Analyse critique des structures ([1]) . . . . .	17
2.4.1 Concept de bifurcation . . . . .	17
2.4.2 Illustration de l'analyse critique pour un élément à assemblage semi-rigide . . . . .	19
2.4.3 Détermination d'un état critique . . . . .	20
2.5 Méthode des éléments finis (MEF) ([3]) . . . . .	23
2.5.1 Méthode des résidus pondérés . . . . .	23
2.5.2 Construction d'un modèle "éléments finis" . . . . .	25
<b>3 Développement de la théorie</b>	<b>26</b>
3.1 Application de la méthode des éléments finis à un élément avec ressorts ([2])	26
3.1.1 Fonctions d'interpolation . . . . .	26
3.1.2 Développement élément finis ([2],[5]) . . . . .	28
3.2 Application de la méthode des perturbations à l'analyse critique des structures ([2]) . . . . .	29
3.2.1 Signification physique de la formule développée . . . . .	32
3.2.2 Exemple d'application . . . . .	34

3.3	Implémentation numérique de la formule . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Étude des limites de la méthode</b>	<b>39</b>
4.1	Étude sensibilité maillage . . . . .	39
4.2	Test de la méthode . . . . .	41
4.2.1	Test1 : cas de charge asymétrique . . . . .	42
4.2.2	Test2 : cas de charge peu réaliste . . . . .	42
4.2.3	Test3 : bâtiment multi-étage avec cas de charge symétrique . . . . .	43
4.2.4	Test4 : Portique avec plusieurs travées . . . . .	44
4.2.5	Conclusion sur les limites de la méthode . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Simplification de l'utilisation de la formule</b>	<b>45</b>
5.1	Indroduction . . . . .	45
5.2	Modification de la formule ([2]) . . . . .	45
5.2.1	Développement de la formule simplifiée . . . . .	47
5.3	Simplification au maximum de la formule pour permettre une utilisation pratique rapide . . . . .	49
5.3.1	Cas d'étude 1 . . . . .	49
5.3.2	Cas d'étude 2 . . . . .	51
5.3.3	Étude de l'influence des composantes du vecteur de charge équivalente $\mathbf{P}_1$ . . . . .	54
5.4	Conclusion . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Comparaison entre la méthode d'approximation avec et sans hypothèse sur la force statique équivalente</b>	<b>57</b>
6.1	Test de la méthode avec une hypothèse sur le mode propre de la structure	57
6.1.1	Test 1 : cas de charge symétrique . . . . .	57
6.1.2	Test 2 : cas de charge asymétrique . . . . .	58
6.1.3	Test 3 : cas de charge peu réaliste . . . . .	59
6.1.4	Test 4 : bâtiment multi-étage avec charge symétrique . . . . .	61
6.1.5	Test 5 : Portique avec plusieurs travées . . . . .	62
6.1.6	Conclusion sur la méthode avec une hypothèse . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Étude des limites de la méthode en faisant une hypothèse sur la forme du mode critique</b>	<b>64</b>
<b>8</b>	<b>Utilité pratique de la méthode</b>	<b>66</b>
8.1	Nouvelle piste pour la classification des assemblages . . . . .	66
8.1.1	Cas d'un portique avec une poutre beaucoup plus rigide et plus longue que les colonnes . . . . .	66
8.1.2	Exemple d'un bâtiment avec des travées centrales plus rigides . . . . .	68
8.1.3	Exemple d'un bâtiment avec un contreventement efficace . . . . .	71
8.2	Utilisation pratique sur bâtiment de grande envergure . . . . .	72
8.2.1	Evaluation de la contribution de $\varepsilon\lambda_1$ pour chaque élément . . . . .	74

<b>9</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>77</b>
9.1	Conclusions . . . . .	77
9.2	Perspectives . . . . .	79
<b>A</b>	<b>Représentation des solutions de chaque réponses pour les tests des chapitres 6 et 8 en négligeant les termes relatifs aux deuxièmes et troisièmes degrés de libertés à chaque nœud</b>	<b>82</b>
A.1	Test 2 : Résultats liés à la Figure (6.3) . . . . .	82
A.2	Test 3 : Résultats liés à la Figure (6.4) . . . . .	83
A.3	Test 4 : Résultats liés à la Figure (6.7) . . . . .	83
A.4	Test 5 : Résultats liés à la Figure (6.9) . . . . .	84
<b>B</b>	<b>Représentation de l'évolution du rapport <math>\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}</math> pour les tests des chapitres 6 et 8</b>	<b>85</b>
B.1	Test 1 : Résultat lié à la Figure (6.1) . . . . .	85
B.2	Test 2 : Résultat lié à la Figure (6.3) . . . . .	86
B.3	Test 3 : Résultat lié à la Figure (6.4) . . . . .	86
B.4	Test 4 : Résultat lié à la Figure (6.7) . . . . .	87
B.5	Test 5 : Résultat lié à la Figure (6.9) . . . . .	87
<b>C</b>	<b>Illustration des cas de charges statiques équivalentes <math>P_1</math> et <math>P_\sigma</math> sur les différents modèles étudiés</b>	<b>88</b>
C.1	Test 1 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.5) . . . . .	88
C.2	Test 2 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.6) . . . . .	89
C.3	Test 3 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.7) . . . . .	89
C.4	Test 4 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.8) . . . . .	90
C.5	Test 5 : Résultat lié au modèle de la Figure (8.6) . . . . .	90

# Remerciements

Je profite de cet ultime travail pour remercier les différentes personnes qui ont cru en moi et m'ont encouragé durant ce long chemin que sont les études d'ingénieur civil.

Je commencerai en remerciant mon promoteur pour ce travail V. Denoël qui m'a beaucoup aidé dans la compréhension et l'interprétation des fondements théoriques nécessaires pour mener à bien ce mémoire et qui m'a permis de constamment avancer et aller plus loin dans la réflexion avec des entrevues régulières. Je voudrais également adresser un remerciement tout particulier à M. Geuzaine qui a pris beaucoup de son temps pour me donner des retours sur les différentes avancées de cet ouvrage sans lesquels il serait certainement beaucoup moins abouti.

Pour finir, je remercie ma famille, ma compagne et tous les proches qui m'ont soutenu dans les difficultés traversées lors de ces études et lors de ce mémoire de fin d'étude.

Romain Crahay

# Notations

$E$	Module de Young du matériau considéré
$I$	Inertie de la section de l'élément considéré
$k_i$	Raideur du nœud $i$
$\varepsilon$	Paramètre dont la valeur absolue est extrêmement petite
$\kappa_i$	Coefficient de flexibilité de l'élément qui est le rapport entre la raideur du nœud $i$ et la raideur de l'élément considéré
$L_e$	Longueur de l'élément considéré
$\mathbf{K}^{(e)}$	Matrice de rigidité d'un élément
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité du modèle
$\mathbf{K}_\sigma^{(e)}$	Matrice de contrainte d'un élément
$\mathbf{K}_\sigma$	Matrice de contrainte du modèle
$\lambda$	Multiplicateur de charge du modèle
$\lambda_{cr}$	Multiplicateur critique pour lequel le premier mode d'instabilité du modèle se produit
$S_{j,ini}$	Rigidité en rotation initiale d'un assemblage
$\alpha_i$	Flexibilité du nœud $i$
SR	Semi-rigide
MEF	Méthode des éléments finis

## Résumé

Lorsqu'on dimensionne une structure, il est d'usage de faire l'approximation que les assemblages présents dans le modèle sont soit articulés, soit infiniment rigides pour pouvoir utiliser les méthodes de calcul élastique linéaire. La classification par rigidité des assemblages se fait selon des critères très restrictifs et plutôt approximatifs décrits dans l'Eurocode 3. Ces critères restrictifs font qu'il est courant que des assemblages semi-rigides doivent être renforcés pour répondre aux critères inscrits dans les normes alors que leur rigidité telle qu'elle est, est plus que suffisante pour la stabilité de la structure. Ajoutons à cela que le calcul des structures à assemblages semi-rigides est une tâche ardue qui rend souvent les praticiens réticents à prendre en compte cette semi-rigidité dans leur analyse. L'utilisation des assemblages semi-rigides est très rare alors qu'elle pourrait entraîner un gain de matériaux, de temps et d'argent considérable. Dans une époque où les exigences en matière de bilan carbone n'ont jamais été aussi strictes, la moindre économie d'acier est donc bonne à prendre. C'est pour ces quelques raisons que nous avons, dans un premier temps, développé une méthode qui vise à démystifier le calcul des structures à assemblages semi-rigides en présentant une formule claire et facile d'utilisation. Et dans un deuxième temps, nous avons élaboré une proposition d'un nouveau critère de classification par rigidité des assemblages moins restrictif qui s'adapte aux spécificités de chaque structure.



## **Abstract**

When designing a structure, it is customary to make the approximation that the connections present in the model are either hinged or infinitely rigid in order to use linear elastic calculation methods. The classification of connections by rigidity is based on very restrictive and rather approximate criteria described in Eurocode 3. These restrictive criteria often result in semi-rigid connections needing to be reinforced to meet the criteria specified in the standards, even though their existing rigidity is more than sufficient for the stability of the structure. In addition to this, the calculation of structures with semi-rigid connections is a challenging task that often makes practitioners reluctant to consider this semi-rigidity in their analysis. The use of semi-rigid connections is very rare, even though it could lead to significant savings in materials, time, and money. In an era where carbon footprint requirements have never been stricter, any reduction in steel usage is valuable. For these reasons, we have initially developed a method aimed at demystifying the calculation of structures with semi-rigid connections by presenting a clear and user-friendly formula. Furthermore, we have proposed a new, less restrictive classification criterion for connection rigidity that can adapt to the specificities of each structure.

# Chapitre 1

## Introduction

Dans le cadre du dimensionnement des structures, il est courant de partir du principe que les connexions entre les différents éléments structurels (poutres, colonnes, etc.) sont soit infiniment rigides, soit parfaitement articulées. Bien que ces hypothèses simplifient les calculs en permettant l'utilisation de méthodes élastiques linéaires, elles ne reflètent pas la réalité des assemblages en raison des contraintes liées à leur mise en place et à leur comportement en service. Lorsqu'on dimensionne une structure en se basant sur de telles hypothèses, il est cependant impératif que la situation réelle corresponde au modèle utilisé pour le dimensionnement. Or, le dimensionnement d'une structure avec des connexions semi-rigides reste une tâche plutôt ardue en l'absence de logiciels de calcul de structures par éléments finis. Même lorsque l'on dispose de ce type de logiciel, la modélisation de bâtiments trop complexes peut prendre un temps considérable.

C'est pourquoi il pourrait être intéressant de développer une méthode simplifiée permettant de relâcher les contraintes de rigidité des assemblages lors du calcul de la structure, sans avoir recours à ces logiciels. C'est ce que nous allons essayer d'explorer dans ce travail en étudiant des méthodes "classiques" dans le domaine de l'analyse des structures, tout en introduisant la semi-rigidité des assemblages grâce à la méthode des perturbations. Cette méthode consiste à étudier une solution approchée par la somme de la réponse initiale (non perturbée) et d'une petite perturbation (en introduisant une certaine flexibilité dans les assemblages). Les formules obtenues et utilisées dans ce travail découlent de la résolution du problème aux valeurs propres pour l'analyse critique des structures, résolu grâce à la méthode des perturbations. Ainsi, il s'agit d'une formulation inédite de la solution d'un problème bien connu.

Dans un premier temps, il sera donc nécessaire de valider ces formules en comparant les résultats obtenus avec les solutions fournies par un logiciel classique d'éléments finis (tel que "*BeamZ*" dans notre cas). Ensuite, nous testerons les limites de ces formules, les expliciterons et en discuterons. De plus, l'objectif final du développement d'une telle théorie étant de faciliter son utilisation par un ingénieur en bureau d'étude par rapport à l'utilisation d'un logiciel d'éléments finis, nous chercherons à simplifier ces formules afin qu'elles puissent être utilisées par n'importe quel ingénieur. Enfin, nous exploiterons les développements réalisés et les nouvelles formulations obtenues afin de dégager une nouvelle piste pour la classification par rigidité des assemblages.

## Chapitre 2

# Principes de base nécessaires au développement de la théorie

### 2.1 La méthode des perturbations ([6])

Dans un sens très large, la méthode des perturbations est une technique mathématique utilisée pour résoudre des équations qui sont difficiles voire impossibles à résoudre de manière exacte. Cette méthode consiste à considérer l'équation comme une perturbation d'une équation plus simple et à la résoudre en utilisant des techniques d'approximation. On suppose donc qu'une solution exacte à l'équation perturbée peut être approximée par une série de termes de la puissance de la perturbation. Dans la plupart des cas, il n'est pas nécessaire d'aller au-delà de la première ou de la deuxième puissance si la perturbation est suffisamment petite. Ainsi, il suffit de résoudre cette série terme par terme, en commençant par le terme de plus basse puissance, et d'itérer jusqu'à obtenir le niveau de précision souhaité.

La méthode des perturbations est utilisée dans de nombreux domaines de la physique tels que la mécanique quantique, la physique des particules, la dynamique des fluides, et bien d'autres domaines où il est bien connu qu'obtenir une solution exacte n'est pas chose aisée. Dans le cadre de ce travail, nous avons appliqué la méthode des perturbations au domaine de l'analyse des structures afin d'explorer des théories innovantes pour le calcul critique des structures.

Pour illustrer la méthode, nous pouvons prendre l'équation suivante :

$$x^2 - (1 + \varepsilon) = 0 \tag{2.1}$$

dont nous connaissons la réponse exacte par simple inspection :

$$x = \pm\sqrt{1 + \varepsilon} \tag{2.2}$$

Mais supposons que nous ne connaissons pas cette solution et que nous résolvons l'équation à l'aide de la méthode des perturbations. Nous allons introduire une petite perturbation  $\varepsilon \ll 1$  et développer  $x$  en série en tronquant les termes d'ordre supérieur à  $ord(\varepsilon)$  :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \text{ord}(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

où  $x_0$  est le paramètre non perturbé et  $\varepsilon x_1$  est la première perturbation de  $x$ .

En substituant ce développement en série dans l'équation, nous obtenons :

$$(x_0 + \varepsilon x_1)^2 - (1 + \varepsilon) = 0 \quad (2.4)$$

$$\iff x_0^2 + 2x_0\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_1^2 - (1 + \varepsilon) = 0 \quad (2.5)$$

et sachant que  $\varepsilon$  est très petit, nous pouvons négliger les termes en  $\varepsilon^2$  :

$$x_0^2 + 2x_0\varepsilon x_1 - (1 + \varepsilon) = 0 \quad (2.6)$$

Ce qui nous donne les deux équations :

$$\text{ord}(1) : \quad x_0^2 - 1 = 0 \iff x_0 = \pm 1 \quad (2.7)$$

$$\text{ord}(\varepsilon) : \quad 2x_0x_1 = \varepsilon \iff x_1 = \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.8)$$

Dès lors, nous obtenons la solution finale :

$$x = \pm 1 \pm \frac{\varepsilon}{2} + \text{ord}(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

Or, si on fait le développement en série de l'expression (2.2), nous avons :

$$\pm\sqrt{1 + \varepsilon} = \pm 1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.10)$$

Ce qui est bien la solution que nous avons trouvé grâce à la méthode des perturbations.

L'avantage de l'étude des problèmes par la méthode des perturbations est qu'il est possible, en faisant varier l'ordre de grandeur de la perturbation initiale, de quantifier l'effet de cette perturbation sur la réponse finale du problème. C'est ce que nous allons explorer dans ce travail en développant une méthode d'analyse de structure basée sur la méthode des perturbations. Dans un premier temps, nous introduirons une perturbation initiale dans le problème, résoudrons ce problème à l'aide de notre nouvelle méthode, et comparerons cette solution avec une solution précise obtenue grâce à une analyse de type éléments finis. Ensuite, nous augmenterons progressivement la perturbation en continuant la comparaison avec la solution de référence obtenue grâce à la méthode des éléments finis. De cette manière, nous étudierons l'effet d'une diminution de la rigidité de l'assemblage et observerons jusqu'où nous pouvons pousser cette perturbation tout en obtenant des résultats précis avec notre nouvelle méthode.

## 2.2 Classification des structures ([8],[4],[7])

Avant d'introduire les critères de classification des assemblages, il est important de rappeler ce qu'est une structure contreventée, non-contreventée, souple et rigide. En effet, comme nous le verrons dans la section suivante, les critères de classification en rigidité des assemblages dépendent de la classe de la structure étudiée.

### 2.2.1 Structure contreventée et non-contreventée

Par définition, nous disons qu'une structure est contreventée si la structure est capable de conduire efficacement les charges horizontales qui lui sont appliquées jusqu'aux fondations. Ce terme désigne donc le fait que le système est dimensionné pour assurer sa stabilité horizontale **globale**. Par exemple, une manière simple de faire en sorte qu'un portique soit contreventé est de mettre en place des tirants en croix afin d'empêcher la structure de basculer.

Il faut cependant s'assurer que le système de contreventement mis en place soit efficace. Sans quoi, nous ne pouvons pas dire que la structure est contreventée. Selon les normes, un système de contreventement est dit "efficace" s'il réduit les déplacements horizontaux d'au moins 80% par rapport aux déplacements de la structure sans ce dispositif. Plus spécifiquement, nous pouvons dire que nous classons une structure comme contreventée si :

1. Elle est équipée d'un système de contreventement ;
2.  $\psi_{braced} \leq 0,2\psi_{unbraced}$  où  $\psi_{braced}$  est la flexibilité latérale de la structure équipée du système de contreventement alors que  $\psi_{unbraced}$  est la flexibilité de la structure sans le contreventement.

Il est important de noter que si une seule de ces deux conditions n'est pas respectée, la structure sera classée comme non-contreventée.

### 2.2.2 Structure souple ou rigide

Les termes "souple" et "rigide" sont utilisés pour caractériser le comportement **global** d'une structure. Nous dirons qu'une structure est rigide si les effets du second ordre globaux induits par les sollicitations horizontales qui lui sont appliquées sont négligeables. Si ce n'est pas le cas, nous dirons que la structure est souple.

Les normes décrivent un critère pour quantifier si les effets du second ordre globaux sont négligeables ou non. Ce critère diffère si nous procédons à une analyse élastique ou une analyse plastique. Cet indicateur est défini comme le ratio entre la première résultante verticale critique élastique  $V_{cr}$  qui provoque l'instabilité d'ensemble de la structure et la résultante verticale totale  $V_{Ed}$  des charges appliquées sur la structure. Les critères de rigidité pour l'analyse élastique et l'analyse plastique sont les suivants :

- Analyse élastique : si  $\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{V_{Ed}} < 10$  ;
- Analyse plastique : si  $\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{V_{Ed}} < 15$ .

Si le critère n'est pas respecté, nous dirons que la structure est souple.

### 2.2.3 Conclusion

Nous aurons donc compris que les notions de contreventement et de rigidité des structures sont fortement liées. En effet, la présence d'un contreventement efficace aura tendance à rigidifier la structure. Cependant, ce n'est pas parce qu'une structure est dite contreventée qu'elle est forcément rigide. Inversement, ce n'est pas parce qu'une structure

n'est pas contreventée qu'elle n'est pas rigide, il faut toujours se référer aux critères des normes pour s'assurer que nous classons la structure considérée dans les bonnes cases.

Voici un tableau récapitulatif pour mieux comprendre la différence entre les notions de contreventement et de rigidité :

	Contreventé	Non-contreventé
Rigide		
Souple		

FIGURE 2.1 – Tableau récapitulatif des notions de contreventement et de rigidité des structures ([7])

## 2.3 Classification des assemblages

Le contenu de ce travail portant sur l'analyse des structures avec des nœuds semi-rigides, il est indispensable de rappeler la théorie de classification des assemblages selon l'*Eurocode 3* ([8]) afin que la notion de semi-rigidité soit claire.

Les assemblages peuvent être classés selon trois de leurs propriétés : résistance, ductilité et rigidité :

1. Résistance : La classification des assemblages par rapport à leur résistance est basée sur leur capacité à résister aux charges appliquées. On distingue généralement trois catégories de résistance :
  - Assemblages pleinement résistants : Ces assemblages ont un moment résistant qui dépasse le moment résistant plastique de tous les éléments qui y sont assemblés. Cela signifie qu'ils peuvent supporter les charges sans subir de déformations importantes.
  - Assemblages articulés : Ces assemblages ont un moment résistant inférieur à 25% du moment résistant requis pour un assemblage à résistance complète. Toutefois, ils doivent également avoir une capacité de rotation suffisante. Les assemblages articulés permettent la déformation plastique et la redistribution des contraintes.
  - Assemblages partiellement résistants : Ces assemblages ne répondent pas aux critères des deux autres catégories. Leur moment résistant n'est pas suffisant pour être considéré comme pleinement résistant, mais il n'est pas aussi faible que celui des assemblages articulés. Ces assemblages peuvent présenter une résistance partielle à la charge.

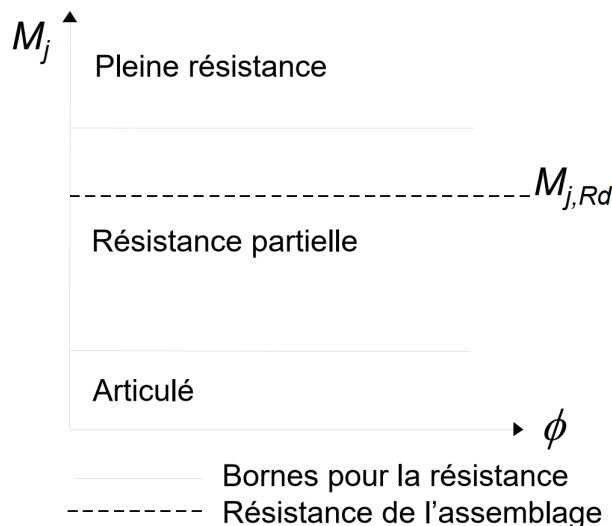


FIGURE 2.2 – Illustration de la classification des assemblages par résistance ([7])

2. Ductilité : La classification des assemblages par ductilité est similaire à celle des sections. La ductilité fait référence à la capacité d'un assemblage à subir des déformations plastiques significatives avant de perdre sa capacité portante. La classification de la ductilité des assemblages dépend principalement de deux facteurs :
  - Capacité de rotation : Certains assemblages sont conçus pour permettre une rotation plastique entre les éléments assemblés, ce qui leur confère une plus grande ductilité. La capacité de rotation permet à l'assemblage de se déformer sans subir de défaillance catastrophique.
  - Apparition d'instabilité ou de rupture fragile : Certains assemblages peuvent présenter une ductilité limitée en raison de l'apparition d'une instabilité ou d'une rupture fragile avant d'atteindre leur moment résistant. Dans de tels cas, l'assemblage perd sa capacité portante avant d'atteindre sa pleine ductilité.
3. Rigidité : La classification des assemblages par rapport à leur rigidité concerne leur comportement de déformation et de rotation. On distingue généralement trois catégories :
  - Assemblages rigides : Ces assemblages ont une rigidité élevée et transmettent efficacement les charges sans subir de déformation significative. Ils sont généralement utilisés dans des applications nécessitant une grande stabilité structurelle.
  - Assemblages semi-rigides : Ces assemblages permettent une certaine déformation et rotation entre les éléments assemblés. Ils offrent une certaine flexibilité et peuvent absorber les déformations dues aux charges appliquées.
  - Assemblages articulés : Ces assemblages permettent une rotation complète entre les éléments sans résistance significative. Ils offrent une grande flexibilité et sont souvent utilisés dans des applications nécessitant une mobilité ou des mouvements spécifiques.

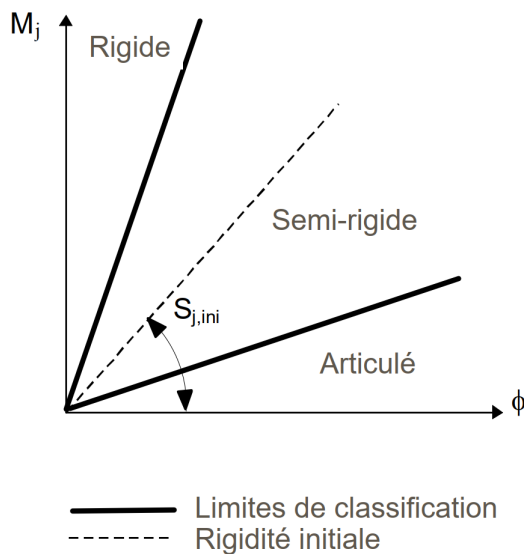


FIGURE 2.3 – Illustration de la classification des assemblages par rigidité ([7])

En résumé, la classification des assemblages par résistance, ductilité et rigidité permet de comprendre et de caractériser le comportement mécanique des assemblages dans différentes situations. Ces classifications sont essentielles pour la conception et l'analyse des structures assemblées, car elles permettent de choisir les types d'assemblages appropriés en fonction des exigences en terme de résistance, de ductilité et de rigidité.

Au vu de l'axe de ce travail qui s'intéresse tout particulièrement à la rigidité des assemblages, nous allons investiguer de manière plus profonde la classification des assemblages par rigidité.

### 2.3.1 Classification par rigidité des assemblages

On peut décrire le comportement des assemblages par une courbe qui montre l'évolution du moment  $M$  qui se développe dans l'assemblage en fonction de la rotation relative  $\phi$  entre les extrémités des éléments assemblés.

Dans la pratique, on considère généralement les assemblages comme infiniment rigides ou parfaitement articulés. Cette simplification permet d'analyser la structure en utilisant des méthodes élastiques linéaires, ce qui est plus simple et direct que si l'on devait prendre en compte la rigidité réelle de l'assemblage, ce qui nécessiterait l'utilisation de méthodes non linéaires complexes. Le comportement réel d'un assemblage est similaire à celui de l'acier. Ainsi, dans la pratique, nous approximations le comportement d'un assemblage par deux segments de droite qui représentent respectivement la phase élastique et la phase plastique du comportement de l'assemblage. Tout comme pour le module de Young de l'acier, nous définissons la rigidité initiale de l'assemblage (représentée par  $S_{j,ini}$ ) comme la pente de la phase élastique du comportement de l'assemblage. C'est sur la base de ce paramètre que la classification des assemblages selon leur rigidité est établie. Ci-dessous, nous pouvons voir une représentation du comportement et des simplifications faites concernant le comportement réel des assemblages :



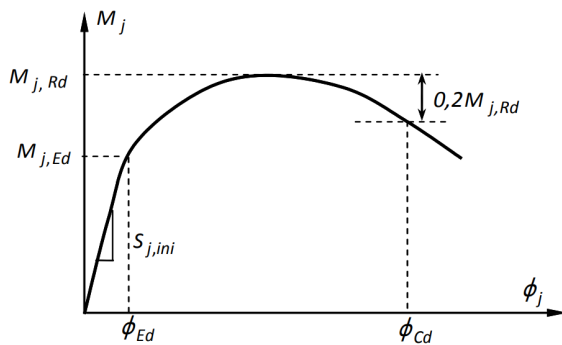


FIGURE 2.4 – Comportement réel d'un assemblage ([7])

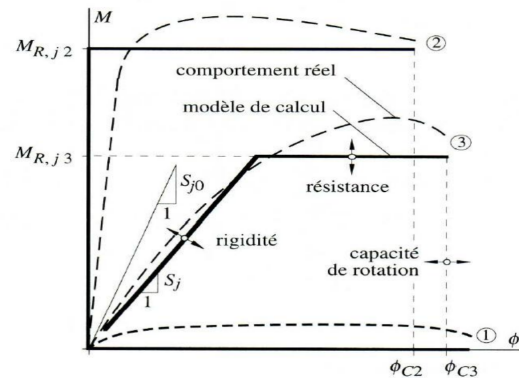


FIGURE 2.5 – Idéalisation du comportement des assemblages ([7])

On peut clairement observer les trois domaines de classification en terme de rigidité des assemblages sur la figure (2.5). Près de l'axe des abscisses, nous avons les assemblages qualifiés d'"articulés", un peu plus haut au centre du graphique, nous pouvons voir le comportement des assemblages dits "semi-rigides", et près de l'axe des ordonnées, nous observons le comportement des assemblages qualifiés de "rigides". Tout comme pour la classification des structures, les normes prévoient des critères permettant de classer les assemblages en fonction de leur rigidité. Comme mentionné précédemment, la classe de la structure dans laquelle nous étudions les assemblages est également importante pour leur classification en terme de rigidité. Les critères de classification définis par les normes pour tous les types d'assemblages, à l'exception des bases de poteaux, sont les suivants :

1. Si l'ossature est contreventée, nous dirons que l'assemblage est rigide si  $S_{j,ini} \geq 8 \frac{EI_b}{L_b}$ . Si l'ossature est considérée comme non-contreventée, l'assemblage sera rigide si  $S_{j,ini} \geq 25 \frac{EI_b}{L_b}$ . De plus, pour que l'assemblage soit classé comme rigide, il faut que  $K_{c,m} \leq 10K_{b,m}$ .
2. Nous dirons qu'un assemblage est articulé si  $S_{j,ini} \leq 0,5 \frac{EI_b}{L_b}$ .
3. Pour finir, nous dirons qu'un assemblage est semi-rigide s'il ne rentre dans aucune des deux autres catégories.

Notons que :

- $I_b$  est le moment d'inertie de flexion d'une poutre
- $I_c$  est le moment d'inertie de flexion d'une colonne
- $L_b$  est la longueur d'une poutre entre deux colonnes
- $L_c$  est la hauteur d'une colonne
- $K_{b,m}$  est la valeur moyenne du rapport  $I_b/L_b$  pour toutes les poutres de la partie supérieure de l'étage considéré
- $K_{c,m}$  est la valeur moyenne du rapport  $I_c/L_c$  pour toutes les colonnes de l'étage considéré

## 2.4 Analyse critique des structures ([1])

L'ensemble de l'étude développée dans ce travail repose sur l'analyse critique des structures. En effet, nous allons examiner la validité de notre méthode en étudiant le comportement du multiplicateur critique d'une structure en fonction de la rigidité des assemblages. Il est donc essentiel de rappeler les fondements de la théorie de l'analyse critique des structures.

De manière générale, l'analyse critique des structures consiste à étudier les problèmes d'instabilité par bifurcation, à déterminer les multiplicateurs de charge critiques et à identifier les modes d'instabilité correspondants. Cela permet de comprendre le comportement de la structure et de prendre les mesures appropriées pour assurer sa stabilité.

### 2.4.1 Concept de bifurcation

Commençons le développement de la théorie du calcul critique sur un élément dont les conditions aux limites sont, d'une part, un appui à rouлеau et, d'autre part, un appui simple. Nous supposons que l'élément est parfaitement rectiligne, de longueur  $l$  et de raideur flexionnelle  $EI$ . Nous négligeons son poids propre de manière à ce qu'il n'y ait pas de déformation initiale due à son propre poids. Nous appliquons une charge axiale de compression  $\lambda P$  sur cet élément, puis nous étudions sa réponse en fonction de l'augmentation du facteur  $\lambda$ , qui est le multiplicateur de charge de la sollicitation. Une illustration de cet élément est présentée ci-dessous.

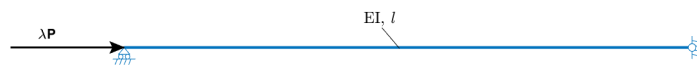


FIGURE 2.6 – Illustration de l'élément soumis à une charge axiale  $\lambda P$ .

De manière très directe, nous savons que lorsque  $\lambda = 0$ , aucune force n'est appliquée à l'élément et donc il n'y a aucune déformation. En raison des hypothèses formulées et de la force étant parfaitement alignée avec l'axe de l'élément, il n'y a, a priori, aucune raison de voir apparaître un déplacement transversal. Cependant, admettons qu'à un moment donné, l'élément puisse se déformer transversalement, comme illustré sur la figure (2.7). La réaction horizontale à l'appui simple est donc  $\lambda P$ , et les réactions verticales aux deux appuis doivent nécessairement être nulles afin de satisfaire l'équilibre vertical en translation et l'équilibre en rotation.

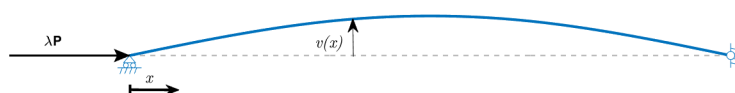


FIGURE 2.7 – Mode de déformation de l'élément

L'équilibre en rotation autour du point de coupe, comme illustré à la figure (2.8), indique que le moment de flexion  $M(x)$  peut s'écrire :

$$M(x) = \lambda P v(x) \quad (2.11)$$

où  $v(x)$  est la déformée transversale de l'élément et  $x$  est l'abscisse mesurée depuis le point d'application de la force. Il est bien connu que le moment est relié à la courbure de l'élément par  $M = -EIv''$ . Dès lors, la déformée transversale de la poutre  $v(x)$  est gouvernée par l'équation différentielle :

$$EIv'' + \lambda P v = 0 \quad (2.12)$$

qui est une équation différentielle homogène, ce qui est caractéristique de l'instabilité par bifurcation. En effet, par simple inspection de l'équation, on voit directement qu'il existe une solution triviale  $v = 0$  qui correspond au cas d'une charge axiale sur une colonne rectiligne sans déplacement transversale et sans imperfection. Cette solution ne nous intéresse pas dans notre cas puisqu'il n'y a pas de déformation transversale, et donc pas d'instabilité. Par contre, il existe des valeurs particulières du multiplicateur de charge  $\lambda$  pour lesquelles nous pouvons trouver d'autres solutions que  $v = 0$ .



FIGURE 2.8 – Coupe dans l'élément

Notons également que l'équation (2.12) présente une forme assez similaire à la forme générale d'un problème aux valeurs propres

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0 \quad (2.13)$$

si ce n'est que la première est une équation continue et que la deuxième est une équation discrète. La forme (2.13) nous servira dans la suite du travail.

La seule solution qui satisfait la condition limite  $v(0) = 0$  est

$$v(x) = v_0 \sin \left( \sqrt{\frac{\lambda P}{EI}} x \right) \quad (2.14)$$

et si on prend en compte la deuxième condition limite  $v(l) = 0$ , nous trouvons la solution particulière

$$\sqrt{\frac{\lambda P}{EI}} l = k\pi \rightarrow \lambda P = k^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.15)$$

où  $k \in \mathbb{N}_0$ . Nous pouvons finalement nous faire une idée de l'unique forme que pourra prendre la déformée au fur et à mesure que le multiplicateur de charge augmentera en remplaçant la solution trouvée dans (2.14) :

$$v(x) = v_0 \sin \left( \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (2.16)$$

qui est une forme sinusoïdale avec une augmentation du nombre de demi-ondes lorsque  $k$  augmente. Nous pouvons observer que, quelle que soit la valeur de  $x$ ,  $v(x)$  sera toujours une constante d'intégration indéterminée qui dépend de  $k$ . Ce phénomène résulte du caractère linéaire et homogène de l'équation. C'est pour cela que nous parlerons toujours

en terme de "forme" ou plus généralement de *mode d'instabilité* car un mode d'instabilité obtenu à partir d'une analyse critique **linéaire** est donc toujours déterminé à une constante multiplicative près.

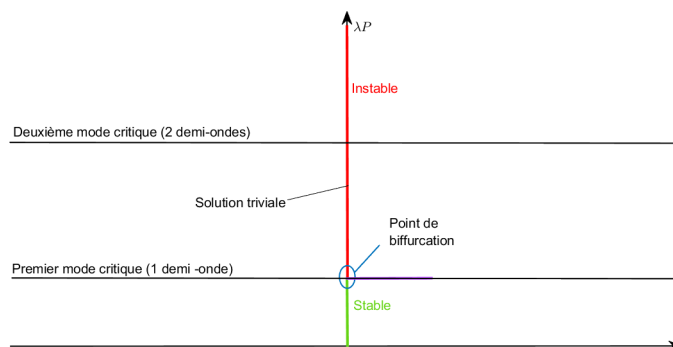


FIGURE 2.9 – Représentation graphique du phénomène de bifurcation

### 2.4.2 Illustration de l'analyse critique pour un élément à assemblage semi-rigide

Après avoir illustré la théorie de l'analyse d'instabilité de manière continue sur une poutre assez classique, il serait pertinent de voir ce que ça donne si nous faisons la même analyse pour un élément à assemblage semi-rigide avec 1 degré de liberté. Nous supposons ici que cet élément est infiniment rigide et nous nous retrouvons donc avec un problème discret où nous étudierons uniquement la rotation  $\varphi$  au niveau de l'assemblage :

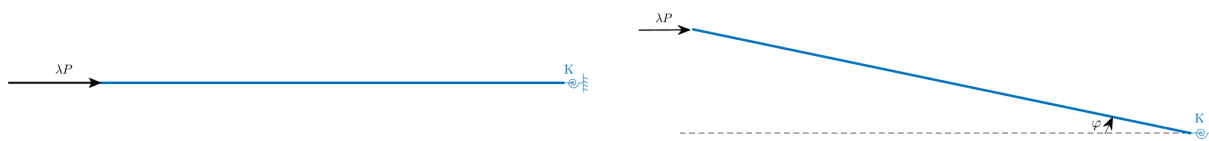


FIGURE 2.10 – Instabilité par bifurcation de la barre rigide à encastrement élastique

L'encastrement élastique est caractérisé par une raideur finie qu'on appellera  $K$ . La loi de comportement moment-rotation s'exprime par la relation linéaire  $M = K\varphi$ . De la même manière que dans l'exemple précédent, nous savons que la configuration horizontale (en négligeant le poids propre de l'élément) sera la solution triviale de notre problème. Par contre, si on admet que la barre peut tourner autour du point d'appui, l'équilibre de la configuration déformée peut s'écrire :

$$\lambda Pl\varphi = M = K\varphi \tag{2.17}$$

puisque le moment en base est induit par la charge  $\lambda P$  excentrée de  $l\varphi$  au premier ordre si on suppose que la rotation est petite ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ). Comme déjà mentionné, nous sommes dans le cas d'un problème discret et plus continu. Dès lors, le problème est une équation algébrique et non différentielle et nous pouvons l'écrire sous la forme de l'équation (2.13) :

$$(K - \lambda Pl)\varphi = 0 \tag{2.18}$$

Il s'agit ici d'une forme simplifiée puisque l'élément ne peut se déformer que dans un seul mode selon un seul degré de liberté. Puisque la solution triviale  $\varphi = 0$  ne nous intéresse pas, il ne nous reste que la solution exacte  $\lambda P = \frac{K}{l}$  où la rotation  $\varphi$  est indéterminée mais la solution reste correcte pour autant que l'hypothèse  $\varphi \ll 1$  reste vraie.

Notons que si nous n'avions pas fait l'hypothèse des petites rotations, nous aurions eu un problème et une solution sous la forme :

$$K\varphi - \lambda Pl \sin \varphi = 0 \rightarrow \lambda P = \frac{K}{l} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \quad (2.19)$$

Cependant, si notre but est uniquement de déterminer la valeur du multiplicateur de charge pour laquelle la première instabilité va se produire, il n'est pas nécessaire de prendre en compte cette deuxième forme puisque, quelle que soit la valeur de  $\varphi$ , le rapport  $\frac{\varphi}{\sin \varphi}$  sera toujours plus grand que 1. Cela signifie que, si nous nous localisons sur la figure (2.9), cela signifie que la solution (2.19) sera toujours plus grande ou égale à la solution de l'équation (2.18). Nous pouvons donc en conclure qu'un modèle linéarisé par les petites rotations suffit pour déterminer précisément le comportement critique d'un modèle mais ne permet pas de déterminer l'amplitude réelle de la configuration déformée. Ceci n'est pas un problème puisque l'intérêt de l'analyse critique est de déterminer le multiplicateur de charge maximum qui peut être appliqué à la structure, la déformée de l'élément après l'instabilité nous importe peu.

### 2.4.3 Détermination d'un état critique

#### Stabilité d'un équilibre

De manière tout à fait générale, considérons une structure dans un état éventuellement déformé et soumise à un ensemble de forces extérieures appliquées de manière quasi-statique<sup>1</sup>. Si nous imposons une petite perturbation à cette structure en équilibre et que sa réaction se traduit par des oscillations de petites amplitudes autour de la position d'équilibre, alors cette configuration d'équilibre est dite **stable**. En revanche, si ces oscillations persistent indéfiniment ou que leur amplitude tend à augmenter avec le temps, la structure est dite **instable**.

Pour mieux comprendre ces notions d'équilibre stable ou instable, on peut imaginer une petite bille soumise à la gravité qui évolue sur une courbe comme illustré sur la figure (2.11).

Si la bille se trouve au point A (où elle est en équilibre) et que nous perturbons légèrement sa position en la poussant vers la droite ou vers la gauche, la gravité fera osciller sa position avec une amplitude de plus en plus petite jusqu'à ce qu'elle retrouve sa position initiale (équilibre stable). En revanche, si la bille est en équilibre au niveau du point B et que nous perturbons même légèrement sa position, elle ne retrouvera jamais sa position initiale et s'en éloignera (équilibre instable).

---

1. Des forces appliquées de manière quasi-statique sont des forces extérieures qui agissent lentement et de manière progressive sur la structure, sans mouvement rapide ou changement brusque, de manière à ce qu'on puisse négliger les effets dynamiques et considérer la structure en équilibre à chaque instant.

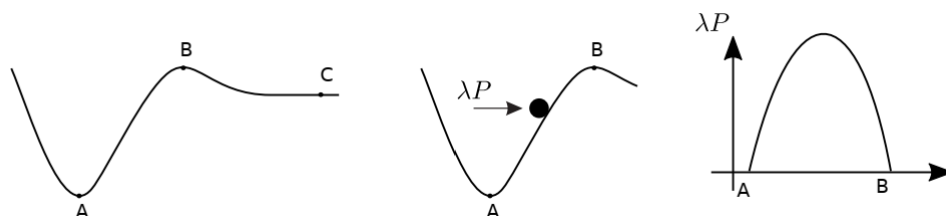


FIGURE 2.11 – Illustration du concept d'équilibre stable (A), instable (B) et neutre (C) ([1]).

Si nous considérons maintenant n'importe quelle structure de génie civil qui doit remplir ses fonctions, elle sera généralement en équilibre stable dans sa configuration initiale sans aucune sollicitation. Lorsque nous lui appliquons ensuite un ensemble de charges quasi-statiques et augmentons progressivement le multiplicateur de charge, il arrive un moment où la configuration d'équilibre devient instable. La transition entre ces deux types de stabilité est appelée **état critique**, et le multiplicateur de charge pour lequel cette transition se produit est appelé **multiplicateur critique**.

### Notion énergétique de la stabilité pour un système discret

Soit  $H[\mathbf{q}; \mathbf{p}]$  la fonction qui représente l'énergie potentielle totale d'un système où  $\mathbf{q}$  contient les coordonnées généralisées qui expriment la déformée et  $\mathbf{p}$  contient l'ensemble des paramètres éventuels ( $P, \lambda, K, \dots$ ). La fonction de l'énergie potentielle peut très bien s'apparenter à la courbe décrite dans la figure (2.11). Définissons  $\mathbf{q}_*$  la position d'équilibre statique de la structure. La condition nécessaire pour que  $\mathbf{q}_*$  soit stable est que la dérivée seconde de  $H[\mathbf{q}_* + \varepsilon \mathbf{r}; \mathbf{p}]$  par rapport à  $\varepsilon$  soit positive quelles que soient les valeurs des coordonnées généralisées  $\mathbf{r}$ . Si on fait une analogie avec la figure (2.11), cela veut bien dire que la fonction de l'énergie potentielle aura une concavité vers le haut et que nous serons dans le cas où la bille se trouve au point (A). Dès lors, il faudra un multiplicateur de charge qui augmente de plus en plus jusqu'à se retrouver dans la configuration où la bille arrive au point (B) (dérivée seconde de  $H$  négative) pour atteindre le multiplicateur critique.

De manière tout à fait générale, on peut définir l'énergie potentielle de déformation élastique comme l'intégrale des contraintes sur le chemin de déformation. Dès lors, si on reprend l'équation d'équilibre d'un élément comprimé avec un encastrement élastique (2.19) avec des rotations non-négligeables, nous avons :

$$H[\varphi; K, \lambda Pl] = \int_0^l (K\varphi - \lambda Pl \sin \varphi) dx = K \frac{\varphi^2}{2} - \lambda Pl (1 - \cos \varphi) \quad (2.20)$$

Comme expliqué précédemment, la structure sera stable tant que la dérivée seconde de l'énergie potentielle est positive. Dès lors, faisons le développement en série de *Taylor* dans le voisinage de la position d'équilibre  $\varphi_*$  jusqu'au second ordre :

$$H[\varphi_* + \varepsilon r] = H[\varphi_*] + \varepsilon r [K\varphi_* - \lambda Pl \sin \varphi_*] + \frac{\varepsilon^2 r^2}{2} [K - \lambda Pl \cos \varphi_*] + \text{ord}(\varepsilon^3) \quad (2.21)$$

Si nous reprenons l'hypothèse des petits angles, nous pouvons faire l'approximation :  $\cos \varphi_* \approx 1$ . Dès lors, la structure passera d'un équilibre stable vers un équilibre instable lorsque  $K - \lambda_{cr} Pl = 0$  et donc nous obtenons finalement le multiplicateur critique de la structure :

$$\lambda_{cr} = \frac{K}{Pl} \quad (2.22)$$

Nous terminerons cette section en explicitant de manière très globale la façon de trouver le multiplicateur critique de n'importe quelle structure.

L'énergie potentielle totale est la somme de l'énergie potentielle de déformation  $V[\mathbf{q}; \mathbf{p}]$  et du travail des forces extérieures de références<sup>2</sup>  $U = -\lambda T_e[\mathbf{q}; \mathbf{p}]$ . Dès lors, l'expression générale de l'équation pour trouver le multiplicateur critique est :

$$\frac{d^2 H}{d\varepsilon^2} = \frac{d^2 V}{d\varepsilon^2} - \lambda_{cr} \frac{d^2 T_e}{d\varepsilon^2} = 0 \quad (2.23)$$

tel que le multiplicateur critique s'écrit sous la forme

$$\lambda_{cr} = \frac{\frac{d^2}{d\varepsilon^2} V[\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \mathbf{r}_{cr}]}{\frac{d^2}{d\varepsilon^2} T_e[\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}, \mathbf{r}_{cr}]} \quad (2.24)$$

Le problème avec cette forme est que la forme de  $\mathbf{r}_{cr}$  qui permet d'annuler la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale est inconnue. Or, elle dépend directement de la valeur de  $\lambda_{cr}$  et on ne peut les déterminer précisément que les deux à la fois. C'est là que la linéarisation du problème rentre en jeu et est très utile. En effet, comme on a pu le voir précédemment, la résolution du problème linéarisé est généralement suffisante. Donc, toutes les formes de l'énergie potentielle totale sont des formes quadratiques des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$ . Par conséquent, les dérivées secondes de  $V$  et  $T_e$  s'identifient également aux valeurs de la fonction elle-même en remplaçant  $\mathbf{q}$  par  $\mathbf{r}$ . La forme du multiplicateur critique devient alors :

$$\lambda_{cr} = \frac{V[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]}{T_e[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}]} \quad (2.25)$$

De plus, nous pouvons écrire de la manière la plus générale possible :

$$V[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] := \mathbf{r}_{cr}^T \mathbf{K} \mathbf{r}_{cr}; \quad T_e[\mathbf{r}_{cr}; \mathbf{p}_{cr}] := \mathbf{r}_{cr}^T \mathbf{K}_\sigma \mathbf{r}_{cr} \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur linéaire de la structure et  $\mathbf{K}_\sigma$  est la matrice des contraintes. Nous trouvons enfin par simple substitution et remaniement de (2.25) :

$$\mathbf{r}_{cr}^T (\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{r}_{cr} = 0 \quad (2.27)$$

Et la condition nécessaire pour satisfaire cette relation sans que  $\mathbf{p}_{cr}$  ne soit une solution triviale est que la matrice  $(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma)$  soit singulière et donc le problème prend la forme d'un problème aux valeurs propres tout à fait classique :

---

2. Les forces extérieures de référence sont les forces pour lesquelles le multiplicateur de charge est l'initial ( $\lambda = 1$ ).

$$(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{r}_{cr} = 0 \quad (2.28)$$

## 2.5 Méthode des éléments finis (MEF) ([3])

Comme nous l'avons déjà introduit, nous allons étudier le comportement des réponses que nous obtiendrons grâce à notre nouvelle formule et le comparer à une réponse connue pour être plutôt précise et obtenue par la méthode des éléments finis. Il est donc pertinent de rappeler brièvement comment fonctionne cette méthode.

De manière tout à fait générale la méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. La MEF repose sur le principe de subdiviser un domaine (1D, 2D, 3D, linéaire, courbe,...) en un ensemble discret d'éléments finis plus simples qui peuvent être de formes multiples en fonction des dimensions du problème. Ces éléments finis sont reliés entre eux par des nœuds, qui forment ainsi un maillage. Les équations mathématiques décrivant le comportement physique du système sont alors approximées localement à l'intérieur de chaque élément fini, en utilisant des fonctions d'interpolation. On transforme donc un problème continu en un problème discret soluble numériquement. On peut alors obtenir un système d'équations algébriques en appliquant des conditions aux limites adéquates pour décrire au mieux les propriétés des limites du modèle. Le système d'équations algébriques est alors résolu pour déterminer les inconnues du problème telles que les déplacements, les contraintes, les vitesses,... . Enfin, la MEF permet d'obtenir des solutions approximatives pour des problèmes complexes en prenant en compte les interactions entre les différentes parties du système dont la précision des résultats dépend de la qualité et du raffinement du maillage, la formulation du problème et les approximations faites lors de la discrétisation.

### 2.5.1 Méthode des résidus pondérés

La méthode des résidus pondérés est largement utilisée dans la résolution de problèmes de type éléments finis. En termes généraux, la méthode des résidus pondérés dans la méthode des éléments finis consiste à introduire des "fonctions poids" pour pondérer les résidus de l'équation différentielle à résoudre. Cette approche nous permet de formuler un système d'équations globales pondérées, dont la résolution donne une solution approximative pondérée qui minimise l'erreur globale.

Pour illustrer la méthode des résidus pondérés, nous allons procéder au développement mathématique de la méthode des éléments finis en utilisant la méthode des résidus pondérés sous la forme la plus générale possible.

Soit une équation différentielle générale de la forme :

$$\mathcal{L}(u) = f(x) \quad (2.29)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel linéaire,  $u$  est la fonction inconnue et  $f(x)$  est une fonction donnée. Comme expliqué, nous allons approximer la fonction inconnue  $u$  en utilisant



la combinaison linéaire de fonctions d'interpolation locales définies sur chaque élément du maillage. Si notre modèle possède  $N$  éléments, la fonction d'approximation de notre inconnue  $u$  sur chaque élément peut-être exprimée comme :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N U_i^{(e)} h_i^{(e)}(x) \quad (2.30)$$

où  $u^h(x)$  est la solution approximée,  $U_i^{(e)}$  sont les coefficients inconnus associés à chaque nœud  $i$  et  $h_i^{(e)}(x)$  sont les fonctions d'interpolation définies localement sur chaque élément.

Pour obtenir les coefficients  $U_i^{(e)}$ , nous devons déterminer une formulation faible du problème. Pour cela, nous multiplions l'équation différentielle par une fonction poids  $\delta u_j^{(e)}(x)$  et intégrons sur le domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \delta u_j^{(e)}(x) \mathcal{L}(u^h(x)) dx = \int_{\Omega} \delta u_j^{(e)}(x) f(x) dx \quad (2.31)$$

En prenant en compte l'équation (2.30) et en remanipulant un peu la forme de la relation, on peut aisément trouver :

$$\sum_i^N U_i^{(e)} \int_{\Omega} \delta u_j^{(e)}(x) \mathcal{L}(h_i^{(e)}(x)) dx = \int_{\Omega} \delta u_j^{(e)}(x) f(x) dx \quad (2.32)$$

Il ne nous reste alors qu'à décomposer le domaine en un nombre finis d'éléments et appliquer la condition de continuité des fonctions de pondération aux interfaces entre les éléments adjacents. On peut donc trouver un système d'équations algébriques linéaires du type :

$$\sum_i^N K_{ij} U_i^{(e)} = F_j^{(e)} \quad (2.33)$$

où  $K_{ij}$  est la matrice de rigidité élémentaire et  $F_j^{(e)}$  est le vecteur de charge élémentaire. Le système d'équations globales est obtenu en assemblant les matrices de rigidité élémentaires et les vecteurs de charge élémentaires. Une fois que nous avons obtenu le système d'équations globales, nous pouvons ainsi trouver les coefficients inconnus  $U_i^{(e)}$  et donc la solution approximée  $u^h(x)$  de l'équation différentielle.

La méthode des résidus pondérés sert donc à minimiser l'erreur de la solution approximée en choisissant les fonctions de pondération de manière judicieuse pour satisfaire certaines propriétés. Elles sont généralement lisses et s'annulent aux frontières du domaine. Dès lors, en multipliant l'équation différentielle par la fonction de pondération et en intégrant sur le domaine, on obtient une forme pondérée de l'équation. Si on utilise ensuite la fonction d'approximation de la solution  $u^h(x)$ , on peut calculer les matrices de rigidité pondérées et les vecteurs de charge pondérés, qui sont utilisés pour construire le système d'équations globales pondérées.

## 2.5.2 Construction d'un modèle "éléments finis"

De manière plus concrète, la construction d'un modèle éléments finis consiste en plusieurs étapes :

1. Identifier la forme du domaine de résolution
2. Découper le domaine en une série d'éléments afin de coller au mieux à la forme de ce domaine
3. Définir les nœuds du modèle

4. Choisir les inconnues nodales :  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_N \end{pmatrix}$

5. Déterminer les fonctions d'interpolations pour décrire le comportement des éléments

entre les nœuds :  $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_N \end{pmatrix}$

6. Calcul des intégrales élément par élément afin d'obtenir les matrices de raideur locales :  $\mathbf{K}^{(e)} = \begin{pmatrix} k_{11,(e)} & k_{12,(e)} \\ k_{12,(e)} & k_{22,(e)} \end{pmatrix}$  et établir pour chaque élément, une relation entre les inconnues nodales et les "efforts" associés :  $\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)}$  où le vecteur  $\mathbf{R}$  dépend du problème et de ses conditions aux limites

7. Assemblages des matrices locales afin d'obtenir le système d'équation à résoudre. Par exemple, pour les matrices de rigidité élémentaires d'un modèle à 4 éléments, on

procédera comme suit :  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11,1} & k_{12,1} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21,1} & k_{22,1} + k_{22,2} & k_{23,2} & 0 & 0 \\ 0 & k_{32,2} & k_{33,2} + k_{33,3} & k_{34,3} & 0 \\ 0 & 0 & k_{43,3} & k_{44,3} + k_{44,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{54,4} & k_{55,4} \end{pmatrix}$

## Chapitre 3

### Développement de la théorie



#### 3.1 Application de la méthode des éléments finis à un élément avec ressorts ([2])

Pour mener à bien le développement théorique de notre nouvelle méthode, il est essentiel de connaître les propriétés d'un élément assemblé entre deux ressorts. Pour ce faire, nous allons appliquer la méthode classique des éléments finis en modifiant les données pour prendre en compte la petite flexibilité des extrémités. Nous avons choisi d'utiliser des fonctions d'interpolation cubiques pour approximer la déformation de l'élément entre deux points du maillage. En utilisant ces fonctions, nous serons en mesure de capturer des variations plus complexes dans les champs de déplacement, de contrainte et de déformation. De plus, l'utilisation de fonctions de degré trois permet une meilleure approximation de la courbure locale d'une structure, ce qui est essentiel dans le domaine du génie civil. En appliquant la méthode des éléments finis à cet élément, nous pourrions calculer les matrices de raideur et de contrainte correspondantes, qui seront utilisées dans la suite du développement de la théorie.

##### 3.1.1 Fonctions d'interpolation

Premièrement, il nous a fallu déterminer l'expression analytique des fonctions d'interpolation. Nous voulons des fonctions d'interpolation cubiques et nous savons donc que ces fonctions auront la forme d'un polynôme de degré trois :

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.1)$$

dont nous pouvons directement donner la forme successivement de la dérivée première et de la dérivée seconde :

$$\frac{dv(x)}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 6ax + 2b \quad (3.3)$$

Ensuite par souci de simplicité, nous avons décidé de poser des hypothèses :

1. On suppose que la rigidité axiale de l'élément est infinie de telle manière qu'aucune déformation axiale ne soit permise
2. La longueur de l'élément est positive
3. La rigidité flexionnelle de l'élément est positive
4. Nous supposons que nous restons dans le domaine élastique linéaire et donc que la courbure de l'élément sans sollicitation transversale est constante :  $EIv''''(x) = 0$
5.  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement les flexibilités des ressorts au premier et deuxième nœud de l'élément. Nous définirons ce paramètre comme le rapport entre la raideur de l'élément et la rigidité de l'assemblage :  $\alpha_i = \frac{EI}{k_i L}$

En prenant en compte ces hypothèses et en imposant successivement :

- Un déplacement unitaire selon  $\mathbf{u}_2$
- Une rotation unitaire selon  $\mathbf{u}_3$
- Un déplacement unitaire selon  $\mathbf{u}_5$
- Une rotation unitaire selon  $\mathbf{u}_6$

et en prenant tout de même en compte les directions  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4)$  même si elles sont nulles, nous trouvons les fonctions d'interpolation :

$$h_1 = 0 \quad (3.4)$$

$$h_2 = \frac{(L-x)(Lx(\alpha_2(\alpha_1-2) + 4\alpha_1) - 2x^2(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) + L^2(4(3+\alpha_1) + \alpha_2(4+\alpha_1)))}{L^3(4(3+\alpha_1) + \alpha_2(4+\alpha_1))} \quad (3.5)$$

$$h_3 = \frac{(L-x)x(-x(2+\alpha_2) + L(4+\alpha_2))\alpha_1}{L^2(4(3+\alpha_1) + \alpha_2(4+\alpha_1))} \quad (3.6)$$

$$h_4 = 0 \quad (3.7)$$

$$h_5 = \frac{x(6L^2(2+\alpha_2) + 3Lx(2+\alpha_2)\alpha_1 - 2x^2(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2))}{L^3(4(3+\alpha_1) + \alpha_2(4+\alpha_1))} \quad (3.8)$$

$$h_6 = -\frac{(L-x)x\alpha_2(2L+x(2+\alpha_1))}{L^2(4(3+\alpha_1) + \alpha_2(4+\alpha_1))} \quad (3.9)$$

Dans le reste du développement, ces fonctions d'interpolations seront écrites sous la forme d'un vecteur :

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Afin de mieux visualiser la déformée de l'élément selon les déplacements/rotations imposés aux nœuds 1 et 2, nous pouvons voir sur la figure (3.1) la forme des déformées de l'élément selon différentes valeurs pour la rigidité des assemblages.

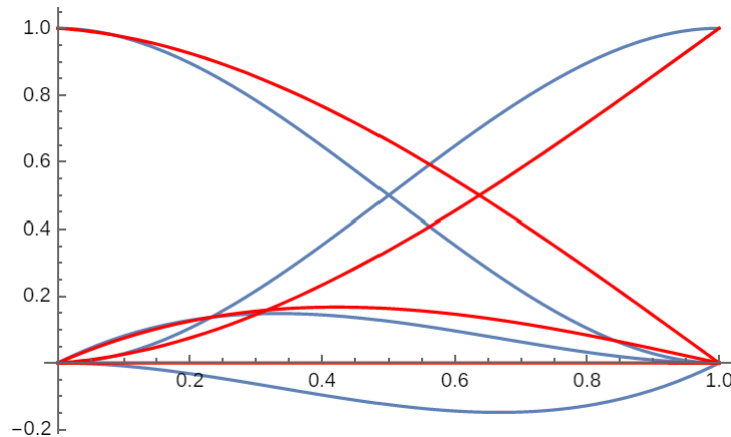


FIGURE 3.1 – Représentation des fonctions d'interpolations

Sur ce graphique, nous avons à chaque fois 2 représentations par imposition de déplacement/rotation aux nœuds 1 et 2. Ces 2 représentations sont toujours un couple d'une courbe bleue et une courbe rouge : les courbes bleues sont tracées pour des rigidités de  $K_1 = K_2 = 10^5 Nm$  (comportement d'un élément bi-encasté), et les courbes rouges sont tracées pour des rigidités de  $K_1 = 20 Nm$  et  $K_2 = 0 Nm$  (comportement d'une poutre avec un nœud semi-rigide et un nœud rotulé). La forme de ces courbes correspond bien à ce qu'on peut attendre de la déformée d'une poutre soumise à ce type déplacement/rotation avec des rigidités telles qu'on les a imposées.

### 3.1.2 Développement élément finis ([2],[5])

L'équation différentielle que nous devons résoudre pour notre élément de poutre entre deux ressorts est :

$$EIv''''(x) = 0 \quad (3.11)$$

assortie des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} EIv''(0) &= K_1v'(0) = M(0) \\ EIv''(L) &= K_2v'(L) = M(L) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous pouvons dès lors commencer le développement par la MEF en introduisant la solution d'approximation :

$$v(x) = \mathbf{h}^T(x)\mathbf{q} \quad (3.13)$$

où  $\mathbf{h}$  est le vecteur qui contient les fonctions d'interpolations et  $\mathbf{q}$  est le vecteur qui contient les inconnues nodales.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Pour la suite du développement, nous allons utiliser l'hypothèse que nous avons faite sur la rigidité axiale infinie de l'élément afin d'alléger la notation des matrices de raideur et de contrainte données un peu plus tard puisque si nous prenions en compte les degrés de liberté 1 et 4 de l'élément, cela nous rajouterait 2 lignes et 2 colonnes remplies de zéro ce qui n'est pas très pertinent.

Grâce à la relation (3.12), nous pouvons introduire un nouveau terme qui est la rotation relative d'un nœud qu'on va définir comme suit :

$$\Delta\varphi_i = \frac{M(L_i)}{K_i} = \frac{EIv''(L_i)}{K_i} \quad (3.15)$$

où  $L_i$  est la position du nœud.

En utilisant la méthode des résidus pondérés, nous calculons successivement :

$$U = EI \int_0^L v''^2(x) dx + K_1 \Delta\varphi_1^2 + K_2 \Delta\varphi_2^2 \quad (3.16)$$

$$= EI \int_0^L v''^2(x) dx + \frac{EI^2}{K_1} v''^2(0) + \frac{EI^2}{K_2} v''^2(L) \quad (3.17)$$

$$= \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

et la matrice de rigidité élémentaire :

$$\mathbf{K}^{(e)} = EI \int_0^L \mathbf{h}''^T(x) \mathbf{h}''(x) dx + \frac{EI^2}{K_1} \mathbf{h}''^T(0) \mathbf{h}''(0) + \frac{EI^2}{K_2} \mathbf{h}''^T(L) \mathbf{h}''(L) \quad (3.20)$$

De la même manière, la matrice de contrainte peut-être calculée grâce à la force axiale (s'il y en a) dans l'élément et se présente sous la forme de la relation :

$$\mathbf{K}_\sigma^{(e)} = P \int_0^L \mathbf{h}'(x) \mathbf{h}^T(x) dx \quad (3.21)$$

### 3.2 Application de la méthode des perturbations à l'analyse critique des structures ([2])

Comme nous l'avons introduit auparavant, l'équation algébrique qui gouverne l'équilibre d'une structure en configuration déformée peut s'écrire sous la forme du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \Phi = 0 \quad (3.22)$$

Nous pouvons donc en déduire que si nous connaissons le premier mode critique de la structure  $\Phi_{cr}$ , il suffit de résoudre l'équation afin de trouver la première valeur propre  $\lambda_{cr}$  qui sera le multiplicateur critique de la structure pour lequel une instabilité surviendra. Dans une analyse de stabilité, on prend la valeur propre minimum  $\lambda_{cr}$  car c'est la valeur pour laquelle la première instabilité aura lieu. On ne s'intéresse pas aux autres multiplicateurs critiques car, une fois que l'instabilité a eu lieu, nous n'aurons pas l'occasion d'observer un autre phénomène d'instabilité puisque la ruine de la structure s'est déjà produite.

Cette équation a été le point de départ du développement de notre nouvelle formule et les résultats de nos recherches seront donc basés sur un calcul critique.

L'idée dans ce travail a été d'étudier la stabilité de structures à nœuds presque rigides (et non pas infiniment rigides) grâce à la formule (3.22), en lui appliquant la méthode des perturbations à l'ordre 1.

Introduisons la perturbation suivante :

$$\varepsilon a_i \equiv \alpha_i = \frac{EI}{k_i L} = \frac{1}{\kappa_i} \quad (3.23)$$

où  $\varepsilon \ll 1$ ,  $a_i \approx 1$  (est à peu près de l'ordre de 1) et  $\alpha_i < 1$  est le rapport entre la raideur de l'élément et la raideur du nœud  $i$  à l'une des extrémités de cet élément. Par inspection de ce rapport, on peut déduire qu'une grande raideur de la poutre par rapport à l'assemblage entraînera une valeur de  $\alpha$  de plus en plus élevée. Nous définirons donc la perturbation  $\alpha$  comme la légère flexibilité du nœud. En déduisant simplement de l'équation, nous pouvons conclure que le paramètre  $\kappa_i$  devra être très grand pour que le paramètre  $\alpha_i$  soit très petit. Autrement dit, la rigidité du nœud devra être beaucoup plus grande que la raideur de l'élément.

Cette perturbation doit être prise en compte de manière élémentaire. Cela signifie que pour chaque élément, nous recalculerons cette perturbation en tenant compte de la rigidité du nœud gauche et du nœud droit. Ainsi, la formule développée sera valable même pour des éléments dont les nœuds gauche et droit n'ont pas la même rigidité. Cette perturbation étant choisie arbitrairement, elle disparaîtra naturellement des résultats qui vont suivre, de sorte que la solution proposée ne dépende pas de ce choix arbitraire.

Comme introduit dans la relation (3.20), la matrice de raideur élémentaire peut être calculée sous la forme d'une intégrale. Si nous développons cette matrice en série et que nous tronquons les termes d'ordre supérieur à  $\varepsilon \ll 1$ , nous obtenons le développement :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K}_1 + \text{ord}(\varepsilon^2) \quad (3.24)$$

Nous pouvons donc découpler cette matrice de rigidité en deux matrices distinctes (la matrice de rigidité de l'élément bi-encastré et la matrice de perturbation qui prend en

compte la flexibilité des assemblages), ce qui nous donne la somme des deux matrices suivantes :

$$\mathbf{K}_0 = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \mathbf{K}_1 = -\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 36(\alpha_1 + \alpha_2) & 12L(2\alpha_1 + \alpha_2) & -36(\alpha_1 + \alpha_2) & 12L(\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ 12L(2\alpha_1 + \alpha_2) & 4L^2(4\alpha_1 + \alpha_2) & -12L(2\alpha_1 + \alpha_2) & 8L^2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -36(\alpha_1 + \alpha_2) & -12L(2\alpha_1 + \alpha_2) & 36(\alpha_1 + \alpha_2) & -12L(\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ 12L(\alpha_1 + 2\alpha_2) & 8L^2(\alpha_1 + \alpha_2) & -12L(\alpha_1 + 2\alpha_2) & 4L^2(\alpha_1 + 4\alpha_2) \end{pmatrix}$$

Exactement de la même manière pour la matrice des contraintes dont la formule est introduite dans l'équation (3.21), nous pouvons à nouveau procéder au développement en série en tronquant les termes d'ordre supérieur à  $\varepsilon$  :

$$\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_{\sigma,0} + \varepsilon \mathbf{K}_{\sigma,1} + \text{ord}(\varepsilon^2) \quad (3.25)$$

que nous pouvons également découpler en la somme des deux matrices suivantes :

$$\mathbf{K}_{\sigma,0} = \frac{P}{30L} \begin{pmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \mathbf{K}_{\sigma,1} = -\frac{P}{30L} \begin{pmatrix} 36(\alpha_1 + \alpha_2) & 36L\alpha_1 & -36(\alpha_1 + \alpha_2) & 36L\alpha_2 \\ 36L\alpha_1 & 4L^2(8\alpha_1 - \alpha_2) & -36L\alpha_1 & 4L^2(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -36(\alpha_1 + \alpha_2) & -36L\alpha_1 & 36(\alpha_1 + \alpha_2) & -36L\alpha_2 \\ 36L\alpha_2 & 4L^2(\alpha_1 + \alpha_2) & -36L\alpha_2 & -4L^2(\alpha_1 - 8\alpha_2) \end{pmatrix}$$

Cette perturbation aura donc pour conséquence de modifier la forme des matrices de raideur et de contraintes, ainsi que le mode propre et enfin le multiplicateur critique. Par conséquent, les formules suivantes sont utilisées pour calculer ces différents paramètres en négligeant les termes d'ordre supérieur à  $\varepsilon$  :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K}_1 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{K}_\sigma = \mathbf{K}_{\sigma,0} + \varepsilon \mathbf{K}_{\sigma,1} \quad (3.27)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 \quad (3.28)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 \quad (3.29)$$

Si on remplace ces hypothèses dans l'équation (3.22), cela nous donne :

$$(\mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K}_1 + (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1)(\mathbf{K}_{\sigma,0} + \varepsilon \mathbf{K}_{\sigma,1})) (\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1) = \mathbf{0} + \text{ord}(\varepsilon^2) \quad (3.30)$$

Nous pouvons découpler cette équation en deux tel que :



$$\text{ord}(1) : \quad (\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \Phi = \mathbf{0} \longrightarrow \text{Problème non perturbé} \quad (3.31)$$

$$\text{ord}(\varepsilon) : \quad (\mathbf{K}_0 + \lambda_0 \mathbf{K}_{\sigma,0}) \Phi_1 = -\mathbf{K}_1 \Phi_0 - \lambda_1 \mathbf{K}_{\sigma,0} \Phi_0 - \lambda_0 \mathbf{K}_{\sigma,1} \Phi_0 \quad (3.32)$$

Si nous projetons (3.32) sur le mode  $\Phi_0$  (orthogonal au mode  $\Phi_1$ ), nous obtenons :

$$\Phi_0^T \mathbf{K}_{\sigma,0} \Phi_0 \lambda_1 = -\Phi_0^T \mathbf{K}_1 \Phi_0 - \lambda_0 \Phi_0^T \mathbf{K}_{\sigma,1} \Phi_0 \quad (3.33)$$

Dès lors, nous pouvons calculer la première perturbation du multiplicateur critique tel que :

$$\varepsilon \lambda_1 = - \frac{\Phi_0^T \varepsilon \mathbf{K}_1 \Phi_0 + \lambda_0 \Phi_0^T \varepsilon \mathbf{K}_{\sigma,1} \Phi_0}{\Phi_0^T \mathbf{K}_{\sigma,0} \Phi_0} \quad (3.34)$$

Pour des raisons de lisibilité et d'interprétation de la formule, nous avons fait le choix de renommer les différents termes qui y interviennent de la manière suivante :

$$\Phi_0^{(e)T} \varepsilon \mathbf{K}_1^{(e)} \Phi_0^{(e)} = \varepsilon \Delta H_0^{(e)} \quad (3.35)$$

$$\Phi_0^{(e)T} \varepsilon \mathbf{K}_{\sigma,1}^{(e)} \Phi_0^{(e)} = \varepsilon \Delta H_\sigma^{(e)} \quad (3.36)$$

$$\Phi_0^{(e)T} \mathbf{K}_{\sigma,0}^{(e)} \Phi_0^{(e)} = H_\sigma^{(e)} \quad (3.37)$$

où,  $\Phi_0^{(e)}$  est le vecteur du mode de l'élément considéré de taille  $\{6 \times 1\}$ ,  $\varepsilon \mathbf{K}_1^{(e)}$  est la perturbation de la matrice de raideur de l'élément de taille  $\{6 \times 6\}$ ,  $\varepsilon \mathbf{K}_{\sigma,1}^{(e)}$  est la perturbation de la matrice de contrainte de l'élément de taille  $\{6 \times 6\}$  et  $\mathbf{K}_{\sigma,0}^{(e)}$  est la matrice de contrainte non perturbée de l'élément de taille  $\{6 \times 6\}$ .

Nous pouvons donc réécrire la formule (3.34) sous la forme :

$$\varepsilon \lambda_1 = - \frac{\sum_1^{N_{elem}} \varepsilon \Delta H_0^{(e)} + \lambda_0 \sum_1^{N_{elem}} \varepsilon \Delta H_\sigma^{(e)}}{\sum_1^{N_{elem}} H_\sigma^{(e)}} \quad (3.38)$$

Une fois ce multiplicateur calculé, il suffira de l'ajouter au multiplicateur critique de la structure à nœuds infiniment rigides pour trouver le multiplicateur approché par notre méthode :

$$\lambda_{approx} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 \quad (3.39)$$

### 3.2.1 Signification physique de la formule développée

Le premier défi majeur de ce travail de fin d'études a été de donner une signification physique à la formule développée. En effet, les différents termes de la formule sont assez abstraits et difficiles à comprendre. Dans notre cas, la petite perturbation de la formule représente la légère différence entre la rigidité de l'assemblage réel et la rigidité infinie des

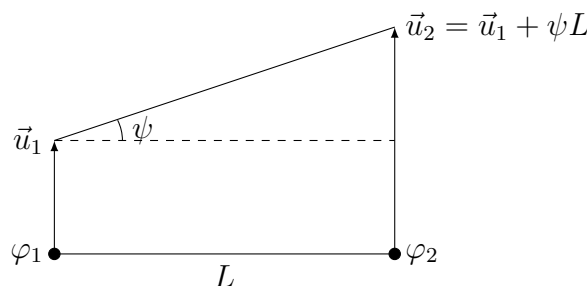
assemblages parfaitement rigides. Si nous développons chaque expression individuellement en terme de formules, en prenant en compte que les deux extrémités de l'élément peuvent être considérées comme presque rigides, nous pouvons écrire :

$$\varepsilon \Delta H_0^{(e)} = -\frac{4EI}{L}(\alpha_1(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi)^2 + \alpha_2(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\psi)^2) \quad (3.40)$$

$$\varepsilon \Delta H_\sigma^{(e)} = -\frac{2PL}{15}(\alpha_1(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi)(4\varphi_1 - \varphi_2 - 3\psi) + (\alpha_2(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\psi)(-\varphi_1 + 4\varphi_2 - 3\psi))) \quad (3.41)$$

$$H_\sigma^{(e)} = \Phi_0^{(e)T} K_{\sigma,0}^{(e)} \Phi_0^{(e)} = \frac{PL}{15}(2\varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_2^2 - 3(\varphi_1 + \varphi_2)\psi + 18\psi^2) \quad (3.42)$$

Pour une meilleure compréhension de ces formules, nous pouvons voir une représentation d'un élément fini de longueur  $L$  ci-dessous :



Les paramètres  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les rotations au nœud gauche et au nœud droit de l'élément,  $\psi$  est la rotation de corde de l'élément et les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont les déplacements transversaux des nœuds de l'élément.

Sachant cela, essayons de donner une signification un peu plus physique aux formules développées précédemment pour une meilleur compréhension.

Premièrement, nous pouvons observer que  $\varepsilon \Delta H_0^{(e)}$  (eqn (3.40)) est le produit de la transposée du mode propre par une matrice de raideur, puis par le mode propre lui-même. Nous pouvons facilement le relier à l'énergie potentielle associée à la déformation de la structure. En considérant également que la matrice  $\varepsilon \mathbf{K}_1$  est la perturbation de la matrice de raideur, nous pouvons interpréter ce terme comme la différence d'énergie potentielle accumulée dans la structure entre la déformation avec des nœuds infiniment rigides et la déformation avec des nœuds presque rigides.

Ensuite, passons directement à la troisième formule avec le terme  $H_\sigma^{(e)}$ , qui est le produit de la matrice des contraintes de la structure avec des nœuds infiniment rigides par le mode propre projeté dans le premier mode critique. Comme nous pouvons le voir dans la forme développée (3.42), cela implique l'intervention de la force axiale dans l'élément. Nous pouvons considérer ce terme comme le travail des forces au second ordre dans la structure.

Enfin, nous avons le terme  $\varepsilon \Delta H_\sigma^{(e)}$  (eqn (3.41)), qui a une forme similaire au terme que nous venons d'expliquer. La différence réside dans le fait que la matrice des contraintes

utilisée ici est la perturbation de la matrice des contraintes de la structure avec des nœuds presque rigides. Dans le même esprit que le terme  $\varepsilon \Delta H_0^{(e)}$ , nous pouvons interpréter ce dernier terme comme la différence du travail des forces au second ordre entre le cas de la structure avec des nœuds infiniment rigides et le cas de la structure avec des nœuds presque rigides.

### 3.2.2 Exemple d'application

Maintenant que les bases théoriques de ce premier développement sont posées, passons à un exemple concret d'application afin de mieux comprendre comment utiliser ces nouvelles formules et démontrer qu'un calcul manuel est tout à fait réalisable et peut fournir une bonne première approximation.

Prenons l'exemple plutôt basique d'un portique soumis à une charge ponctuelle sur chacun des deux nœuds supérieurs comme représenté ci-dessous :

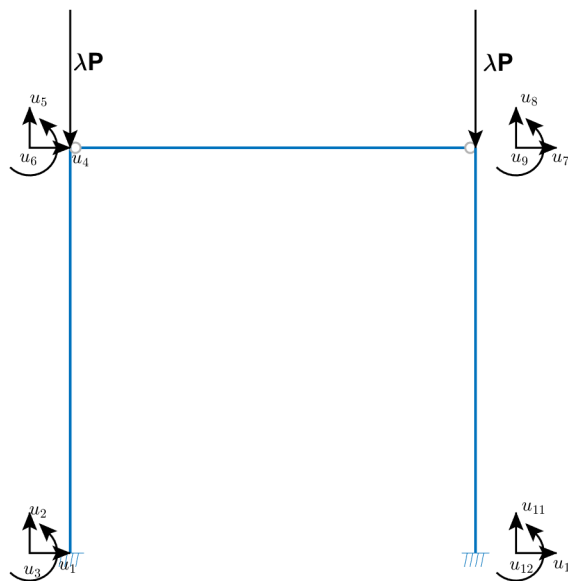


FIGURE 3.2 – Représentation du portique avec deux charges ponctuelles

Pour plus de facilité dans les calculs, on va considérer que la hauteur des colonnes et que la longueur de la poutre sont unitaires. De plus, nous allons également considérer que :

$$\begin{aligned}
 EI &= 1Nm^2 \\
 EA &\rightarrow \infty \\
 P &= 1N \\
 \alpha_1 &= \alpha_4 = 0 \\
 \alpha_2 &= \alpha_3 = \frac{1}{100L} \\
 \lambda_0 &= 7,44
 \end{aligned}$$

Puisque le modèle était déjà entré dans le logiciel **BeamZ**, nous avons profité de ses fonctionnalités pour extraire les données dont nous avons besoin pour appliquer les formules développées. Ces données sont les valeurs des déplacements et des rotations aux différents nœuds pour le modèle infiniment rigide :

	Ux [m]	Uy [m]	Uz [m]
1	0	0	0
2	1	7.0013e-06	-0.5835
3	1	-7.0013e-06	-0.5835
4	0	0	0

où les déplacements et les rotations aux bases du portique sont nuls puisqu'ils sont encastrés.

Dès lors, appliquons la méthode développée élément par élément :

### Élément 1 : colonne de gauche

Sur la représentation ci-dessous, nous avons représenté les déplacements dans une vision élémentaire et plus dans une vision globale. Il a donc fallu prendre en compte le changement de signe de certains déplacements.



Pour cet élément, nous avons les données suivantes :  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  car  $K_1 = K_2 \rightarrow \infty$  et donc les nœuds sont infiniment rigides,  $\varphi_1 = 0[rad]$ ,  $\varphi_2 = -0,5835[rad]$ ,  $L = 1[m]$ ,  $P = 1[N]$  et  $\psi = -1$ . Nous pouvons donc calculer successivement grâce aux équations (3.40), (3.41) et (3.42) :

$$\varepsilon \Delta H_0^{(e)} = 0[Nm] \tag{3.43}$$

$$\varepsilon \Delta H_\sigma^{(e)} = 0[Nm] \tag{3.44}$$

$$H_\sigma^{(e)} = -1,0379[Nm] \tag{3.45}$$

### Élément 2 : poutre



Pour cet élément, nous avons les données suivantes :  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.01$  car  $K_1 = K_2 = 100$  et les nœuds aux extrémités sont presque rigides et on suppose que le modèle est symétrique et donc qu'ils ont la même rigidité,  $\varphi_1 = \varphi_2 = -0,5835[rad]$ ,  $L = 1[m]$ ,  $P = 0$  et  $\psi = 0$ . Donc, toujours grâce aux formules (3.40), (3.41) et (3.42), on a :

$$\varepsilon \Delta H_0^{(e)} = -0,245[Nm] \quad (3.46)$$

$$\varepsilon \Delta H_\sigma^{(e)} \approx 0[Nm] \quad (3.47)$$

$$H_\sigma^{(e)} \approx 0[Nm] \quad (3.48)$$

### Élément 3 : colonne de droite



Pour cet élément, par symétrie avec la colonne de gauche, nous pouvons à nouveau calculer :

$$\varepsilon \Delta H_0^{(e)} = 0[Nm] \quad (3.49)$$

$$\varepsilon \Delta H_\sigma^{(e)} = 0[Nm] \quad (3.50)$$

$$H_\sigma^{(e)} = -1,0379[Nm] \quad (3.51)$$

Maintenant que tous les éléments ont été passés en revue, nous pouvons calculer  $\varepsilon \lambda_1$  grâce à la formule (3.38) :

$$\varepsilon \lambda_1 = -\frac{0 - 0,245 + 0 + \lambda_0(0 + 0 + 0)}{-1,0379 + 0 - 1,0379} = -0,118 \quad (3.52)$$

Dès lors, le multiplicateur critique de la structure avec des nœuds presque rigides approchée par notre formule peut se calculer :

$$\lambda_{approx} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 = 7,32 \quad (3.53)$$

Notons que le multiplicateur critique de cette structure calculée par la méthode des éléments finis est  $\lambda_{FEM} = 7,33$ . Donc, avec une division grossière de la structure (chaque élément structural est un élément fini), il y a une erreur de 1% entre la solution de référence et la solution par notre nouvelle méthode.

Pour se rendre compte de comment évolue le multiplicateur critique en fonction de la diminution de la rigidité des ressorts en rotation, nous pouvons trouver une représentation graphique de cette évolution à la figure (3.3).

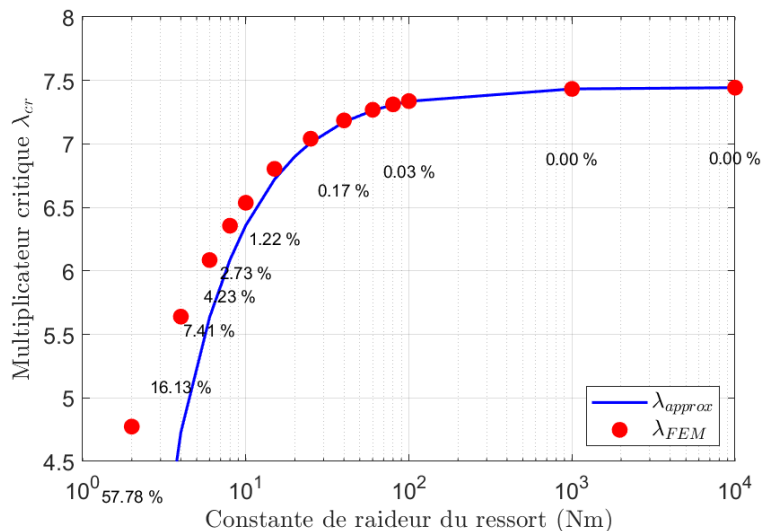


FIGURE 3.3 – Relation entre  $\lambda_{cr}$  et la constante de raideur du ressort

On peut observer que, même avec une segmentation grossière de la structure, la réponse obtenue par notre méthode épouse très bien la solution éléments finis pour des raideurs de ressorts allant jusqu'à l'ordre de 10Nm. En effet, l'erreur commise par rapport à la réponse de référence est de 1,22%. Cette erreur est sécuritaire puisque nous approchons cette réponse de référence par défaut.

### 3.3 Implémentation numérique de la formule

Les développements précédents étaient assez complexes à comprendre et très mathématiques. Afin de clarifier la manière de fonctionner de la formule, voici une illustration de la structure du code *Matlab* que nous avons implémenté afin de tester différents modèles et différentes rigidités des assemblages :

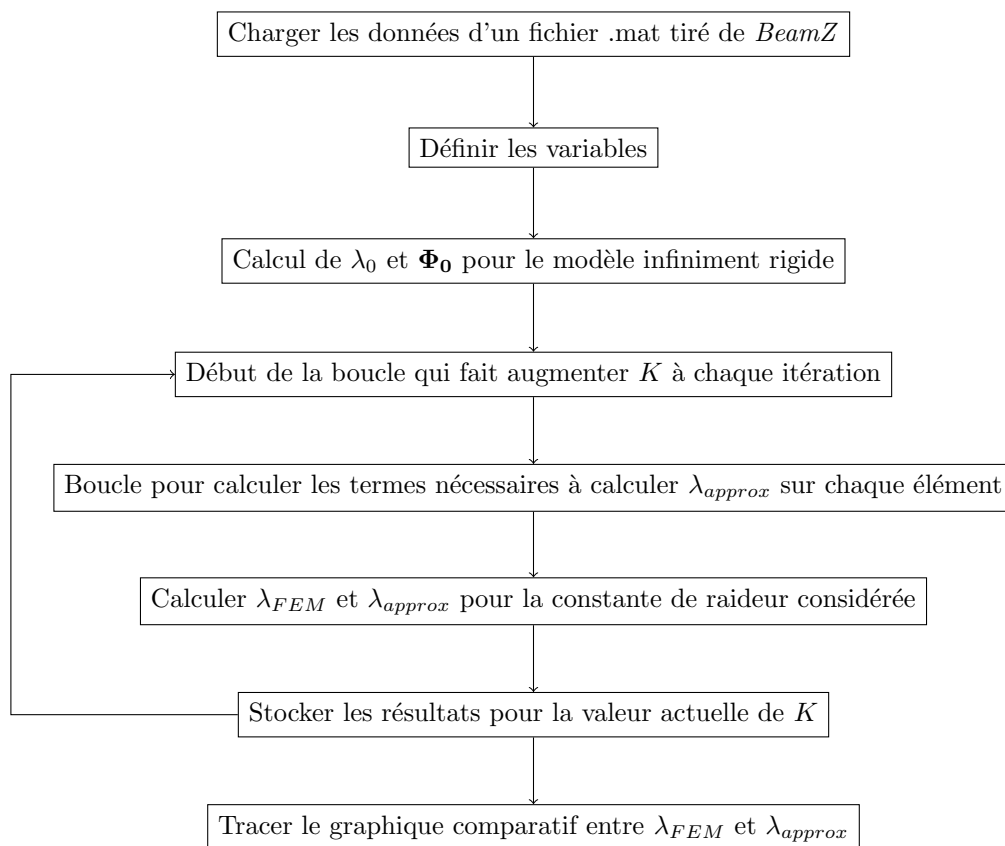


FIGURE 3.4 – Structure du code *MATLAB*

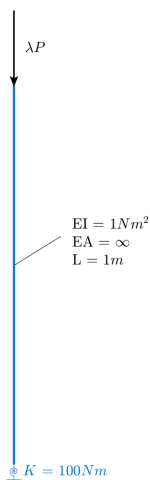
## Chapitre 4

# Étude des limites de la méthode

### 4.1 Étude sensibilité maillage

Dans l'exemple précédent, nous avons comparé la réponse obtenue par notre méthode à celle obtenue par la méthode des éléments finis (MEF). Cependant, étant donné la segmentation grossière de notre structure, nous ne pouvons pas affirmer que la réponse par éléments finis correspond exactement à la solution exacte. Toutefois, nous savons que lorsque la longueur des éléments tend vers zéro, la solution des éléments finis tend vers la solution exacte. Ainsi, cette comparaison soulève la question de la sensibilité de notre méthode au maillage par rapport à la méthode des éléments finis. Nous nous demandons en effet si en affinant le maillage de notre structure, nous pourrions approcher davantage la solution obtenue par la méthode des éléments finis. De plus, nous souhaitons analyser l'importance d'une telle amélioration de la précision. Par conséquent, nous allons procéder à une étude de sensibilité du maillage afin d'analyser comment notre méthode converge en fonction du nombre d'éléments.

Pour réaliser cette étude, nous allons considérer le cas très basique d'une colonne encastree libre avec un nœud presque rigide en sa base et une force verticale de  $1[N]$  en son sommet :



Sa longueur est toujours de  $1[m]$  et nous allons considérer une perturbation  $\varepsilon = \alpha =$



0,01. En calculant le multiplicateur critique à la fois avec la méthode des éléments finis et avec notre nouvelle méthode pour différentes segmentations de la colonne, nous obtenons les résultats suivants :

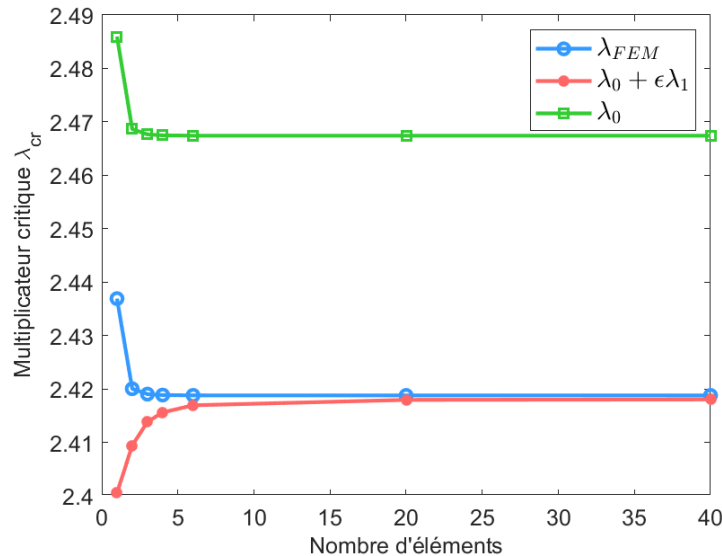


FIGURE 4.1 – Étude de la sensibilité de la formule au maillage

Nous pouvons constater que la méthode des éléments finis converge rapidement vers la solution de référence (avec des éléments infiniment petits). Aussi, notre méthode converge également rapidement vers cette solution, ce qui indique qu'il n'est pas nécessaire de diviser la structure en une infinité d'éléments pour obtenir une réponse relativement précise. De plus, si nous examinons l'échelle des ordonnées, nous remarquons qu'en prenant seulement un élément, nous ne commettons qu'une erreur (sécuritaire) d'environ 2% par rapport à la solution exacte et d'environ 4% par rapport à la solution obtenue par la méthode des éléments finis pour un seul élément également mais, qui elle, surestime la solution exacte.

Nous pouvons donc conclure, à partir de cette étude de sensibilité au maillage, que nous pouvons utiliser la formule pour effectuer rapidement une première estimation de l'ordre du multiplicateur critique de la structure. Cette estimation s'avère non seulement assez précise, mais aussi sécuritaire. Il convient toutefois de noter que ces affirmations sont valables tant que la rigidité des assemblages n'est pas trop élevée. En effet, plus les assemblages sont flexibles, moins la réponse sera précise, comme le montre la figure (3.3).

Pour vérifier la convergence de notre méthode, nous examinerons la réponse de l'exemple d'application (3.2) du portique soumis à deux charges verticales que nous avons développé précédemment. Nous le ferons en divisant à la fois les colonnes et la poutre successivement en 2 et 10 éléments.

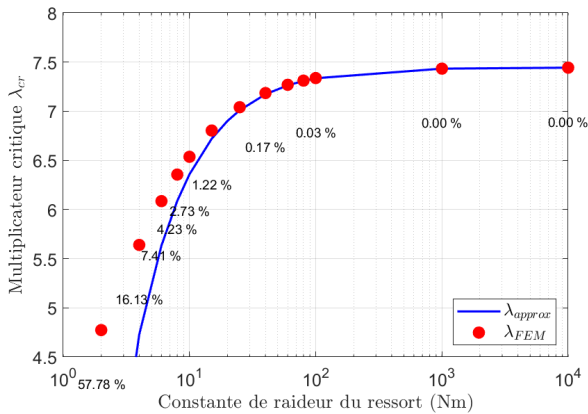


FIGURE 4.2 – Réponse pour une division en 2 élément

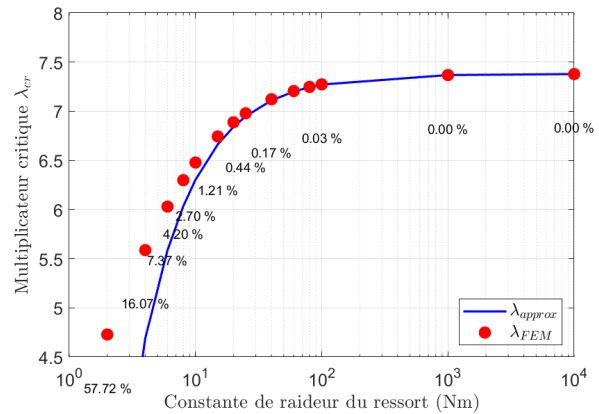


FIGURE 4.3 – Réponse pour une division en 10 élément

On constate immédiatement que les deux réponses illustrées sont très similaires, bien que le maillage de chaque colonne et de la poutre soit cinq fois plus fin dans le deuxième cas par rapport au premier. Nous pouvons donc conclure que la méthode converge même pour un maillage très grossier.

## 4.2 Test de la méthode

Maintenant que nous avons démontré que la théorie développée fonctionne dans des cas relativement simples, il est important de la tester sur des cas un peu plus complexes afin de s'assurer qu'elle n'est pas limitée aux structures et aux chargements simples. Nous allons donc procéder à une série de tests sur différents types de structures avec différents types de chargement pour confirmer sa validité.

Il est important de noter que pour l'ensemble des tests qui seront réalisés tout le long de ce travail, nous considérerons une rigidité axiale infinie  $EA \rightarrow \infty$  pour tous les éléments présents dans les modèles. De plus, nous ne donnerons pas de valeur numérique à la rigidité flexionnelle  $EI$ , nous parlerons davantage en terme de proportion de raideur entre différents éléments sur certains exemples. Nous pouvons donc considérer que  $EI$  est unitaire. Pour finir, afin de clarifier la nature des assemblages que nous verrons dans chaque modèle, voici comment sont représentés les nœuds semi-rigides, articulés et infiniment rigides sur le logiciel *BeamZ* :

- Noeud semi-rigide
- Noeud articulé
- Noeud infiniment rigide

FIGURE 4.4 – Représentation des assemblages sur *BeamZ*

Les nœuds pour lesquels la rigidité va varier pour tracer les réponses que nous verrons dans l'ensemble de ce travail sont représentés par les nœuds semi-rigides. Dans le but de ne

pas alourdir les figures dans la suite du travail, nous n'y rappellerons pas ces informations à moins qu'il y ait des éléments avec des inerties différentes dans le modèle.

### 4.2.1 Test1 : cas de charge asymétrique

Lors de ce test, nous allons appliquer la formule à un cas de chargement asymétrique sur une structure pour laquelle nous avons déjà vérifié la fiabilité de notre théorie. L'objectif est de confirmer que notre méthode fonctionne de manière cohérente pour un même modèle soumis à des chargements différents.

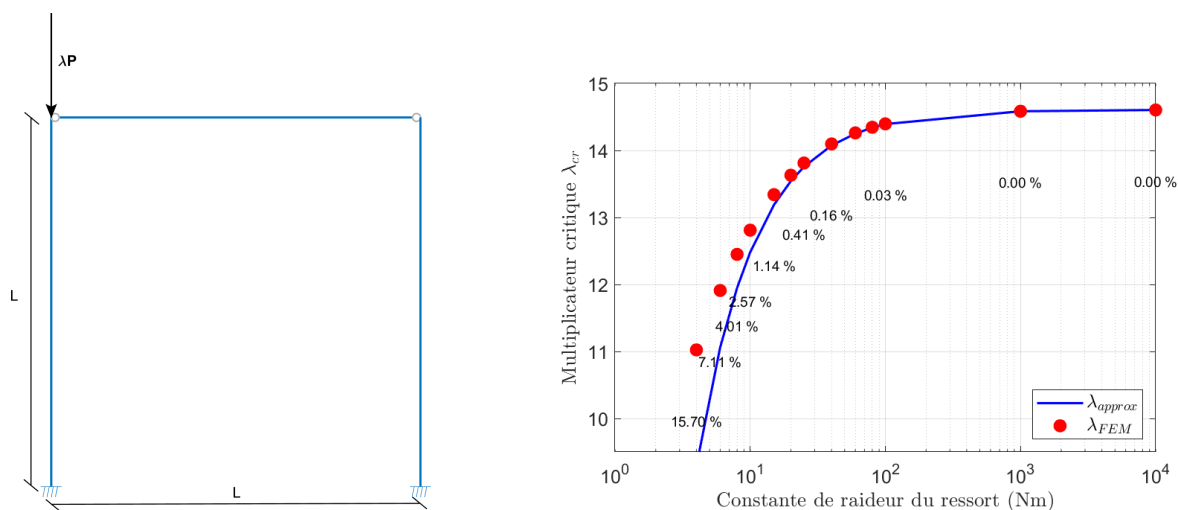


FIGURE 4.5 – Résultats et modèle du test 1

Si nous comparons le comportement de la réponse approximée à celui de la méthode des éléments finis, nous constatons que les courbes se superposent de la même manière que dans le test précédemment développé (3.2).

### 4.2.2 Test2 : cas de charge peu réaliste

Pour ce test, nous souhaitons vérifier l'efficacité de la méthode même dans le cas d'une charge qui entraîne une traction dans une colonne. Un objectif sous-jacent de ce test était également de vérifier l'implémentation numérique de la formule pour s'assurer qu'aucun problème ne se manifestait de ce côté-là.

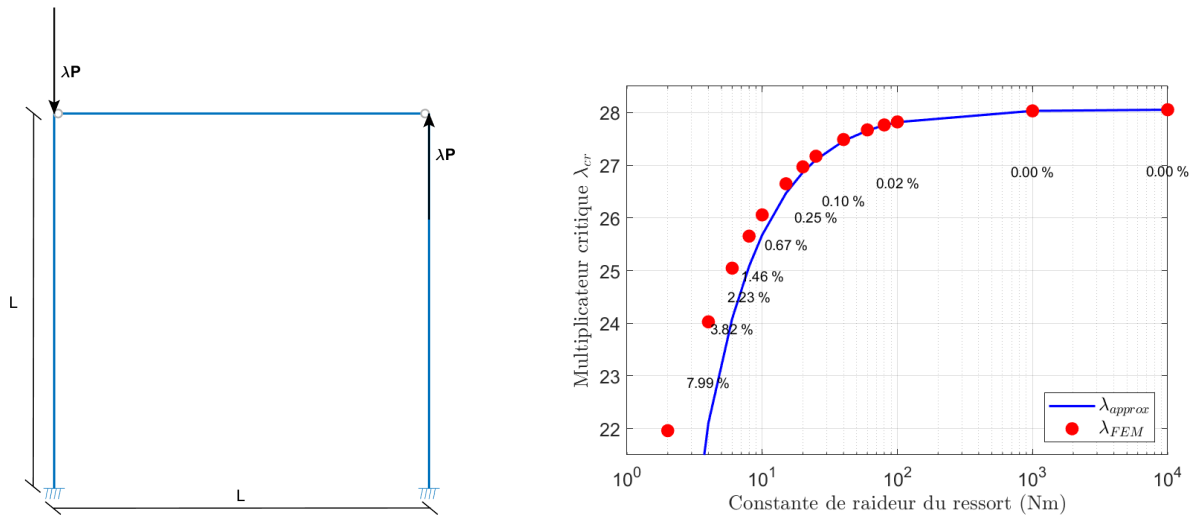


FIGURE 4.6 – Résultats et modèle du test 2

Nous pouvons constater que ce test a été réussi, car nous observons un comportement de la réponse qui est très similaire à celui des tests précédents, avec une erreur maximale nettement réduite, même pour une rigidité d’assemblage très faible.

### 4.2.3 Test3 : bâtiment multi-étage avec cas de charge symétrique

Maintenant qu’il semble que la méthode soit efficace pour les portiques à un étage et une travée, examinons son comportement pour un bâtiment à plusieurs étages avec un chargement symétrique qui se rapproche du cas de charge réel qu’un tel bâtiment pourrait subir.

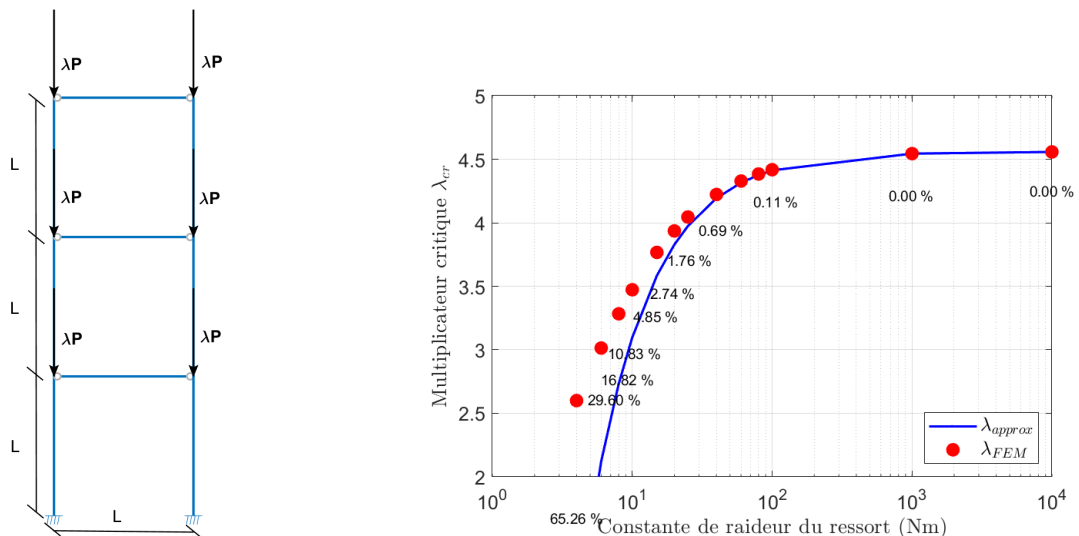


FIGURE 4.7 – Résultats et modèle du test 3

Nous pouvons, une fois de plus, observer des résultats assez satisfaisants pour ce cas. Il est important de noter que ce test a révélé une faille dans le code, qui a dû être corrigée pour pouvoir l’étudier.

#### 4.2.4 Test4 : Portique avec plusieurs travées

Suite au dernier test, où on a augmenté le nombre d'étage, la suite logique est bien évidemment de tester un portique à plusieurs travées comme illustré ci-dessous :

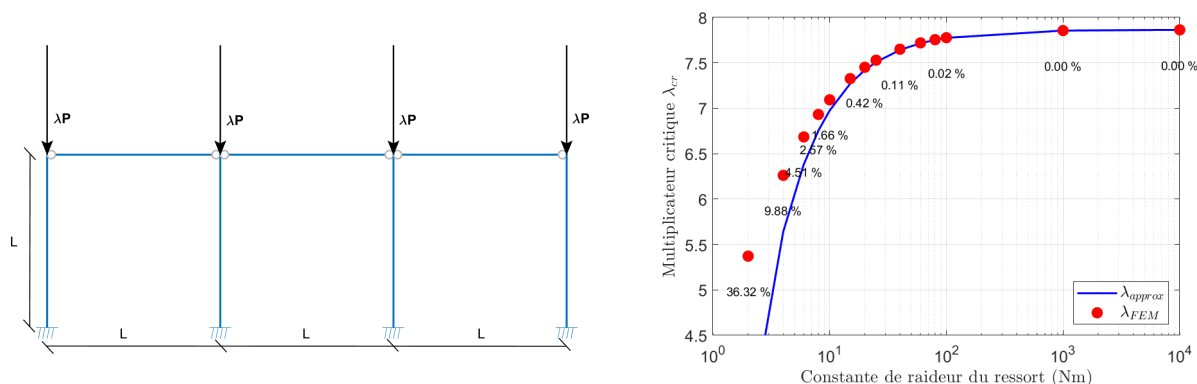


FIGURE 4.8 – Résultats et modèle du test 4

Ce test a également été passé avec succès.

#### 4.2.5 Conclusion sur les limites de la méthode

Après cette série de tests, comprenant différents cas de chargement et différents modèles, nous pouvons conclure que la méthode fonctionne assez bien pour des rigidités d'assemblage pouvant s'éloigner plus ou moins d'une rigidité infinie, selon le modèle considéré. Cependant, il est important de noter que si nous restons dans des gammes de rigidité supérieures ou égales à l'ordre de 100, nous obtenons des résultats avec une erreur de l'ordre de 0% par rapport à la réponse de référence. Ainsi, nous avons démontré que notre nouvelle méthode était fiable pour le calcul de structures avec des nœuds presque rigides.

Cependant, même si cette méthode est relativement simple à appliquer, puisqu'elle consiste en une somme de plusieurs termes dont nous avons donné les formules, elle peut s'avérer fastidieuse à utiliser pour des structures de plus grande envergure. De plus, elle peut rapidement nécessiter l'utilisation d'outils numériques pour résoudre le problème, notamment si l'on souhaite raffiner le maillage. L'objectif ultime de ce travail est de fournir une formule simple et directe pour le calcul rapide du multiplicateur critique d'une structure à nœuds presque rigides, qui puisse être utilisée lors de réunions de projet ou autres. Ainsi, dans la suite de cette étude, nous nous efforcerons de simplifier la formule afin de la rendre accessible à tous, sans nécessiter l'utilisation d'outils numériques pour résoudre le problème.

Nous pouvons également mentionner le fait qu'il semble que plus nous nous approchons d'une structure à nœuds non déplaçables, plus la solution obtenue grâce à notre méthode se rapproche de la réponse de référence. Ce résultat n'est pas surprenant, car les structures à nœuds non déplaçables tendent à être plus stables en réduisant la longueur de flambement. Ainsi, la variabilité du multiplicateur critique est réduite, ce qui pourrait expliquer le meilleur comportement de notre solution.

## Chapitre 5

# Simplification de l'utilisation de la formule

### 5.1 Introduction

Rappelons que l'objectif ultime du développement de cette théorie est de créer une formule simple et accessible à tous. La formule actuelle a déjà démontré sa précision et son applicabilité à tous types de modèles. Cependant, elle reste relativement complexe et fastidieuse à utiliser. Afin de rendre notre théorie manuellement applicable pour obtenir une approximation rapide du multiplicateur critique de la structure avec des nœuds semi-rigides, nous devons la simplifier.

C'est précisément ce que nous abordons dans ce chapitre. Il est donc d'une importance capitale de bien comprendre la construction de la théorie qui sera utilisée pour simplifier la formule et optimiser son utilisation. Ce chapitre revêt une importance particulière dans ce travail, car il marque la transition entre une formule complexe à utiliser et une méthode basée sur l'intuition et l'expérience de l'ingénieur pour approcher de manière raisonnable le multiplicateur critique de la structure étudiée.

### 5.2 Modification de la formule ([2])

Si nous reprenons le calcul du multiplicateur critique d'une structure à sa source, nous savons que la formule pour calculer le multiplicateur critique associé au mode de vibration fondamental d'un système dynamique linéaire est la suivante :

$$\lambda_0 = \frac{\Phi_0^T \mathbf{K}_0 \Phi_0}{\Phi_0^T \mathbf{K}_\sigma \Phi_0} \quad (5.1)$$

Ce multiplicateur est utilisé pour déterminer la charge critique ou la charge limite à partir de laquelle le système peut subir une instabilité dynamique (bifurcation). Si nous manipulons cette équation, nous pouvons réécrire :

$$\mathbf{K}_\sigma = -\frac{1}{\lambda_0} \Phi_0^T \mathbf{K}_0 \Phi_0 \quad (5.2)$$

Si on injecte ceci dans l'équation (3.33), on obtient :

$$-\frac{1}{\lambda_0} \Phi_0^T \mathbf{K}_0 \Phi_0 \lambda_1 = -\Phi_0^T \mathbf{K}_1 \Phi_0 - \lambda_0 \Phi_0^T \mathbf{K}_{\sigma,1} \Phi_0 \quad (5.3)$$

Ce développement nous mène vers une nouvelle écriture de la formule de la forme :

$$\frac{\varepsilon \lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\Phi_0^T \mathbf{K}_1 \Phi_0 + \lambda_0 \Phi_0^T \mathbf{K}_{\sigma,1} \Phi_0}{\Phi_0^T \mathbf{K}_0 \Phi_0} \quad (5.4)$$

qui est une forme assez intéressante puisqu'elle est présentée sous la forme d'un rapport entre la correction du multiplicateur critique et le multiplicateur critique de la structure infiniment rigide. Cela nous ouvre une perspective de piste pour un nouveau critère de classification des assemblages que nous explorerons plus tard.

De plus, sous cette forme, nous pouvons observer l'expression  $\Phi_0^T \mathbf{K}_0 \Phi_0$  qui contient le produit  $\mathbf{K}_0 \Phi_0$ . Il est important de noter que la multiplication d'un mode propre par la matrice de raideur donne la distribution de forces statiques qui, une fois appliquée à la structure, génère une déformation équivalente à celle produite par le mode propre  $\Phi_0$ . En d'autres termes, l'application de cette distribution de forces statiques à la structure génère une réponse qui est un multiple du mode propre considéré. Par conséquent, dans la suite de la discussion, nous utiliserons l'écriture suivante :

$$\mathbf{K}_0 \Phi_0 = \mathbf{F} = \mathbf{P}_0 \quad (5.5)$$

où  $\mathbf{F}$  est la distribution de forces statiques équivalentes. De plus, nous pouvons également écrire  $\Phi_0 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}$  et donc réécrire (5.4) :

$$\frac{\varepsilon \lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\Phi_0^T \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F} + \lambda_0 \Phi_0^T \mathbf{K}_{\sigma,1} \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}}{\Phi_0^T \mathbf{F}} \quad (5.6)$$

De plus, nous sommes en mesure d'identifier deux autres termes à interpréter :

$$\mathbf{K}_1 \Phi_0 = \mathbf{P}_1 \quad (5.7)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma,1} \Phi_0 = \mathbf{P}_\sigma \quad (5.8)$$

où on peut appeler  $\mathbf{P}_1$  la première charge statique équivalente relative à  $\mathbf{K}_1$  (matrice de raideur perturbée) et  $\mathbf{P}_\sigma$  la seconde charge statique équivalente relative à  $\mathbf{K}_{\sigma,1}$  (matrice des contraintes perturbée). Enfin, on peut également introduire les déplacements statiques sous les charges équivalentes :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{P}_1 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{x}_\sigma = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{P}_\sigma \quad (5.10)$$

Maintenant, on peut à nouveau réécrire l'équation (5.6) de la manière suivante :

$$\frac{\varepsilon \lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{F} + \lambda_0 \mathbf{x}_\sigma^T \mathbf{F}}{\Phi_0^T \mathbf{F}} \quad (5.11)$$

Comme indiqué précédemment, les déplacements  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_\sigma$  sont respectivement relatifs aux matrices de raideur et de contrainte perturbées. Il est donc intéressant de remarquer

que les termes du numérateur ne concernent que les éléments adjacents aux nœuds semi-rigides, tandis que le dénominateur concerne l'ensemble des éléments affectés par la force  $\mathbf{F}$ .

Ce qui est extrêmement intéressant avec cette forme, c'est qu'elle ouvre la porte à la possibilité de simplifier le calcul du multiplicateur critique en posant une hypothèse sur la distribution de force statique  $\mathbf{F}$ . S'il s'avère que, même avec une mauvaise approximation de cette distribution statique, on approche la forme du mode de la structure induit par le chargement initial, nous pourrions approcher le multiplicateur critique de manière assez précise et très facilement. En effet, imaginons que la force  $\mathbf{F}$  ne soit qu'une force appliquée en un nœud, cela signifierait que  $\mathbf{F}$  n'est plus un vecteur mais bien un scalaire et que les  $\mathbf{F}$  se simplifieraient dans l'équation (5.11). Et le vecteur du mode propre  $\Phi_{cr}$  étant normalisé, l'amplitude de  $\mathbf{F}$  n'aura pas d'influence sur le résultat final, ce qui rendrait cette méthode assez puissante. Les seules données dont nous aurons besoin seront donc la matrice de raideur du modèle infiniment rigide  $\mathbf{K}_0$ , la matrice de raideur perturbée  $\mathbf{K}_1$ , et la matrice de contrainte perturbée  $\mathbf{K}_{\sigma,1}$ .

### 5.2.1 Développement de la formule simplifiée

Pour plus de compréhension pour la suite, nous allons marquer les paramètres qui découlent de notre hypothèse par un accent circonflexe " $\hat{\phantom{x}}$ ". Par exemple, notre hypothèse première se fait sur la distribution de force statique  $\mathbf{F}$ , elle se notera donc " $\hat{\mathbf{F}}$ ".

Tout d'abord, illustrons à quoi va ressembler cette force statique équivalente. Puisqu'elle est censée induire une déformation statique dans la structure de la même forme que le premier mode critique correspondant à une instabilité, cette force s'illustrera forcément par une force horizontale appliquée sur le sommet de la structure. Dès lors, si on prend l'exemple du portique à un étage et une travée utilisé précédemment (Figure 3.2), elle se présentera comme ci-dessous avec la déformée correspondante :

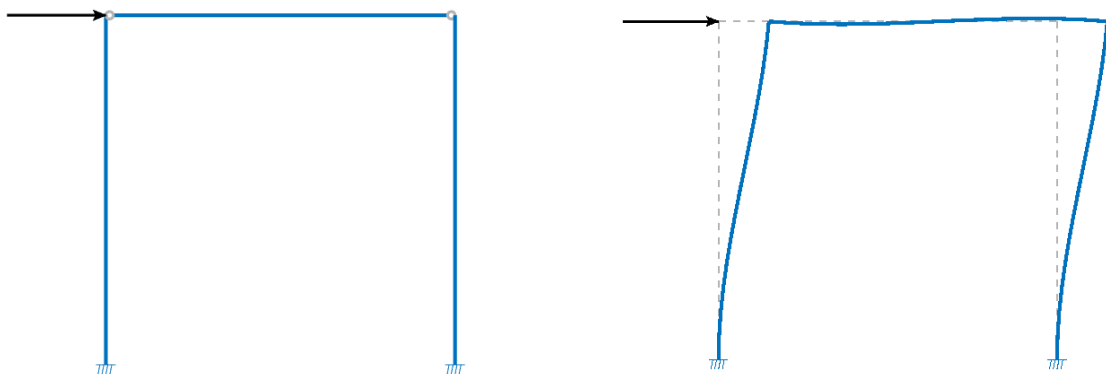


FIGURE 5.1 – Illustration de la déformée statique du modèle sous la charge statique équivalente

Connaissant la force équivalente, nous pouvons calculer successivement :



Le mode propre associé :

$$\widehat{\Phi}_0 = \frac{\widehat{F}}{K_0} \quad (5.12)$$

Le premier cas de charge équivalent :

$$\widehat{P}_1 = K_1 \widehat{\Phi}_0 \quad (5.13)$$

Et le deuxième cas de charge équivalent :

$$\widehat{P}_\sigma = K_{\sigma,1} \widehat{\Phi}_0 \quad (5.14)$$

On peut également réécrire les deux forces statiques équivalentes sous une autres formes en explicitant les multiplications des matrices :

$$\widehat{P}_1^{(e)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{12EI}{L^2}(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) \\ -\frac{4EI}{L}(2\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) \\ 0 \\ \frac{12EI}{L^2}(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) \\ -\frac{4EI}{L}(\alpha_1\varphi_1 + 2\alpha_2\varphi_2) \end{pmatrix}; \quad \widehat{P}_\sigma^{(e)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6P}{5}(\alpha_1(\theta_1 - \psi) + \alpha_2(\theta_2 - \psi)) \\ -\frac{2PL}{15}(\alpha_1\varphi_1^* - \alpha_2(\theta_1 - \theta_2)) \\ 0 \\ \frac{6P}{5}(\alpha_1(\theta_1 - \psi) + \alpha_2(\theta_2 - \psi)) \\ -\frac{2PL}{15}(\alpha_1(\theta_1 - \theta_2) + \alpha_2\varphi_2^*) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Où

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi; & \varphi_1^* &= 3\varphi_1 + 2(\theta_1 - \theta_2) \\ \varphi_2 &= \theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi; & \varphi_2^* &= 3\varphi_2 + 2(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

Notons que pour des raisons de compréhension, nous avons nommé les rotations aux extrémités de l'élément respectivement par  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Les deux charges équivalentes sont ensuite assemblées comme suit :

$$\widehat{P}_1 = \sum_1^{N_{elem}} \mathbf{R}_e^{(e)} \widehat{P}_1^{(e)} \quad (5.16)$$

$$\widehat{P}_\sigma = \sum_1^{N_{elem}} \mathbf{R}_e^{(e)} \widehat{P}_\sigma^{(e)} \quad (5.17)$$

où les matrices  $\mathbf{R}_e$  sont les matrices de rotations pour projeter les charges dans les axes élémentaires.

Pour finir, il ne nous reste plus qu'à calculer le dénominateur qui est commun à l'équation (3.38) :

$$\Phi_0^{(e)T} K_\sigma^{(e)} \Phi_0^{(e)} = \frac{PL}{15} (2\theta_1^2 - \theta_1\theta_2 + 2\theta_2^2 - 3(\theta_1 + \theta_2)\psi + 18\psi^2) \quad (5.18)$$

Ce qui nous donne finalement une dernière forme de la formule :

$$\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{(\widehat{P}_1^T + \lambda_0\widehat{P}_\sigma^T)\Phi_0}{\lambda_0\Phi_0^T K_\sigma \Phi_0} \quad (5.19)$$

## 5.3 Simplification au maximum de la formule pour permettre une utilisation pratique rapide

Dans la suite de ce travail, nous examinerons toute une série d'exemples afin de tester comment la simplification de notre formule influence la solution finale. Pour comprendre ces exemples, il nous a paru opportun d'illustrer les cas de charges équivalentes introduits dans l'équation (5.15). Nous avons donc entrepris d'observer comment ces charges se répartissent sur le modèle une fois calculées. Afin de ne pas trop alourdir le travail, nous n'allons pas étudier ces charges pour tous les modèles. Nous allons simplement étudier deux cas et voir si nous pouvons en tirer des conclusions intéressantes. Les représentations de ces charges statiques équivalentes sur l'ensemble des modèles de ce travail sont données en annexe.

### 5.3.1 Cas d'étude 1

A l'image de tout ce que nous avons fait jusqu'à présent, nous allons commencer par observer comment les cas de charge  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_\sigma$  se répartissent sur un portique simple à une travée que nous allons diviser en 9 éléments (chaque élément structural est divisé en 3 éléments finis). Nous allons illustrer ces cas de charges pour le modèle représenté à la figure (3.2).

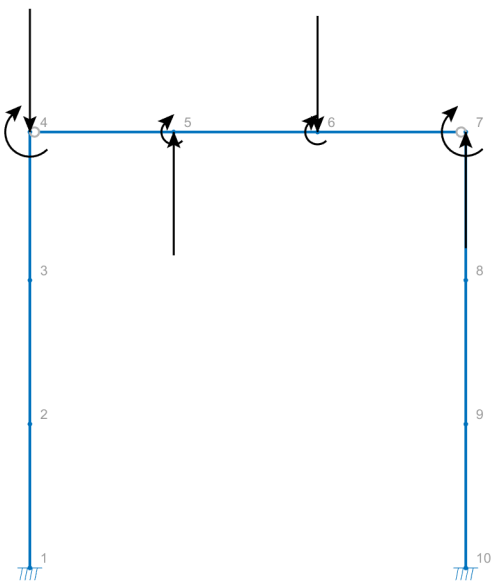


FIGURE 5.2 – Illustration du cas de charge  $\mathbf{P}_1$

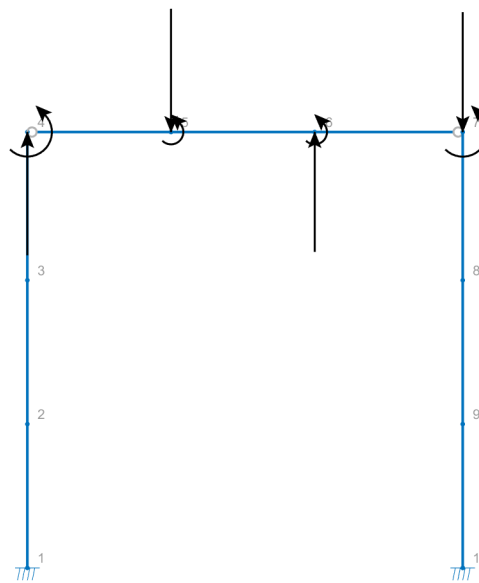


FIGURE 5.3 – Illustration du cas de charge  $\mathbf{P}_\sigma$

Les déformées statiques induites par ces deux cas de charges sont représentées dans la figure (5.4).

Par simple observation des deux cas de charge et de leur déformée correspondante, nous aurions tendance à conclure que l'un est l'opposé de l'autre. Cependant, il faut noter que l'échelle entre les deux n'est pas du tout respectée. En effet, le multiplicateur de la

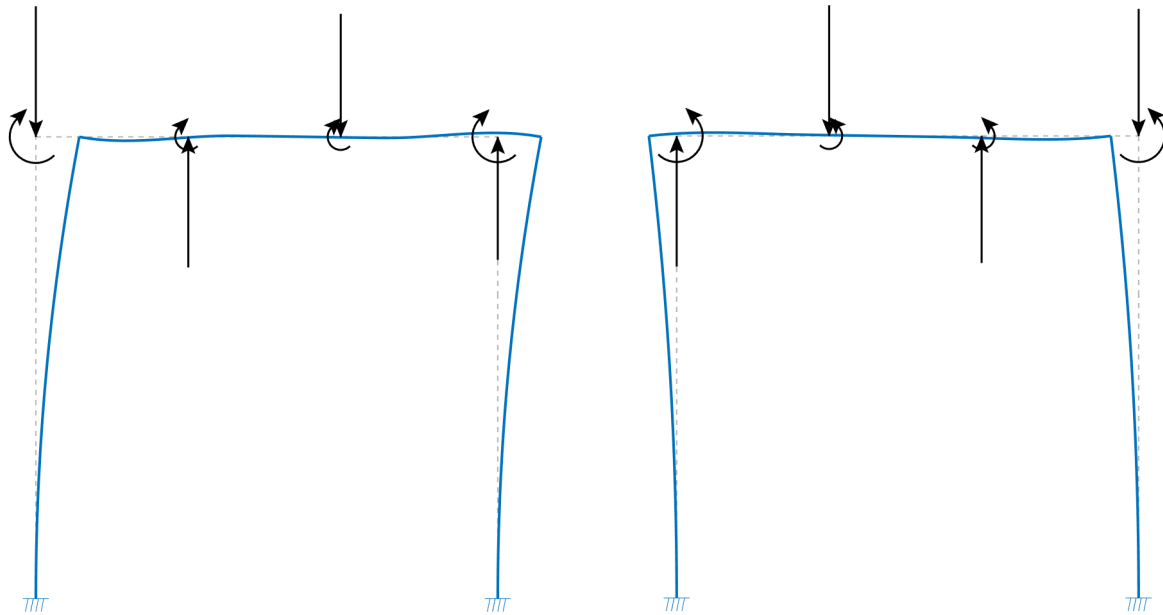


FIGURE 5.4 – Représentation des déformées statiques induites par les cas de charges  $\mathbf{P}_1$  (à gauche) et  $\mathbf{P}_\sigma$  (à droite)

déformée relative au cas de charge  $\mathbf{P}_1$  est de  $12,5 \times 10^{13}$  alors que le multiplicateur de la déformée relative au cas de charge  $\mathbf{P}_\sigma$  est de  $4.375 \times 10^{35}$ . Un autre bon indicateur sont les valeurs des efforts pour les deux cas de charge qui sont reprises dans le tableau (5.1).

$\mathbf{P}_1$	$f_y$ [N]	$m_z$ [Nm]	$\mathbf{P}_\sigma$	$f_y$ [N]	$m_z$ [Nm]
nœud 4	$-1,98 \cdot 10^{-2}$	$-4,36 \cdot 10^{-3}$		$2,27 \cdot 10^{-24}$	$6,06 \cdot 10^{-25}$
nœud 5	$1,98 \cdot 10^{-2}$	$-2,18 \cdot 10^{-3}$		$-2,27 \cdot 10^{-24}$	$1,43 \cdot 10^{-25}$
nœud 6	$-1,87 \cdot 10^{-2}$	$-2,12 \cdot 10^{-3}$		$2,21 \cdot 10^{-24}$	$1,42 \cdot 10^{-25}$
nœud 7	$1,87 \cdot 10^{-2}$	$-4,24 \cdot 10^{-3}$		$-2,21 \cdot 10^{-24}$	$6,08 \cdot 10^{-25}$

TABLE 5.1 – Amplitudes des charges verticales et des moments induits aux différents nœuds par  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_\sigma$

En regardant ce tableau, la première chose qui saute aux yeux, c'est que dans un cas comme dans l'autre, l'équilibre vertical est respecté. En effet, chaque charge nodale orientée selon l'axe  $y$  est compensée par une charge de même amplitude mais dans le sens opposé. En revanche, en ce qui concerne l'équilibre en rotation, la somme des contributions n'est pas parfaitement nulle<sup>1</sup>.

On peut calculer successivement pour  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_\sigma$  :

1. En réalité, les valeurs représentées dans le tableau du côté de  $\mathbf{P}_\sigma$  peuvent être considérées comme des zéros numériques. La raison pour laquelle le logiciel ne nous affiche pas exactement zéro est qu'il considère une rigidité axiale  $EA = 10^6$  et non infinie. Dans la réalité, même si les rigidités axiales sont très grandes, elles ne sont cependant pas infinies, nous allons donc poursuivre le développement pour l'exemple.

$$\begin{aligned}
Rot(\mathbf{P}_1) &= (-0,436 - 0,218 - 0,221 - 0,424 + 1,98.0,33 - 1,87.0,66 + 1,87) \cdot 10^{-2} \\
&\approx -1.10^{-4} Nm \\
Rot(\mathbf{P}_\sigma) &= (0,606 + 0,143 + 0,142 + 0,608 - 2,21.0,33 + 2,21.0,66 - 2,21) \cdot 10^{-24} \\
&\approx 2.10^{-26} Nm
\end{aligned}$$

La différence entre les ordres de grandeur est extrêmement significative. À partir de là, nous pouvons remarquer d'une part que, si nous examinons la forme de la relation (5.19), ces deux vecteurs de charges s'additionnent, et d'autre part que, si nous considérons la relation (5.15), la forme analytique pour calculer  $\mathbf{P}_\sigma$  n'est pas des plus aisées à obtenir. En effet, elle est calculable à la main, mais cela reste une tâche fastidieuse que nous aimerions éviter. Par conséquent, s'il se confirme que la différence d'ordre de grandeur entre les valeurs contenues dans ces deux vecteurs demeure aussi grande dans tous les cas, nous pourrions considérer que  $\mathbf{P}_\sigma$  est négligeable par rapport à  $\mathbf{P}_1$ , ce qui nous conduirait à une formule de la forme :

$$\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\widehat{\mathbf{P}}_1^T \Phi_0}{\lambda_0 \Phi_0^T \mathbf{K}_\sigma \Phi_0} \quad (5.20)$$

C'est une simplification non négligeable de la formule car, si nous sommes en présence d'un bâtiment avec un très grand nombre de poutres et qu'il y a un endroit critique où il semble compliqué de prodiguer la rigidité initialement calculée pour ce nœud, il nous suffira de connaître la raideur, les déplacements et les rotations de l'élément assemblé à ce nœud pour connaître sa contribution dans le calcul de  $\varepsilon\lambda_1$  et ainsi savoir si nous pouvons relâcher les exigences en termes de rigidité pour ce nœud précis. De plus, il faut souligner le fait que se passer du calcul d'un tel vecteur réduit considérablement la complexité de la formule et tend de plus en plus vers une forme applicable dans tous les bureaux d'études pour les calculs de structure.

Ce cas d'étude a été développé dans le chapitre suivant et nous pouvons d'ores et déjà anticiper et observer l'approximation du multiplicateur critique que nous obtenons en faisant le calcul en négligeant la charge statique équivalente  $\mathbf{P}_\sigma$  à la figure (6.2). Nous pouvons constater que cela ne change rien au résultat final et que l'approximation de  $\lambda_{cr}$  est très bonne.

### 5.3.2 Cas d'étude 2

Nous allons profiter de cette section et de l'étude de l'influence des charges équivalentes sur la stabilité des structures pour illustrer comment de tels cas de charge se répartissent sur un bâtiment de plus grande envergure, avec plusieurs étages et plusieurs travées, comportant des éléments d'inerties différentes ainsi que des assemblages rigides, semi-rigides et articulés. De plus, nous allons considérer un cas de charge appliqué aléatoirement. L'objectif de cette étude est de mieux comprendre la répartition des cas de charge sur un bâtiment classique dans une situation "réelle".

L'analyse du comportement du multiplicateur critique de ce modèle sera traitée plus en détail ultérieurement dans ce travail. Cependant, dans un souci de compréhension, nous allons dès à présent représenter le modèle ainsi que sa charge appliquée. Nous avons décidé de présenter la forme du mode critique du bâtiment pour deux raisons : d'une part, cela permet de comparer cette forme avec celle des déformées statiques de nos deux cas de charge, et d'autre part, cela nous permet de mieux observer les différences entre les charges appliquées aux différents nœuds du bâtiment.

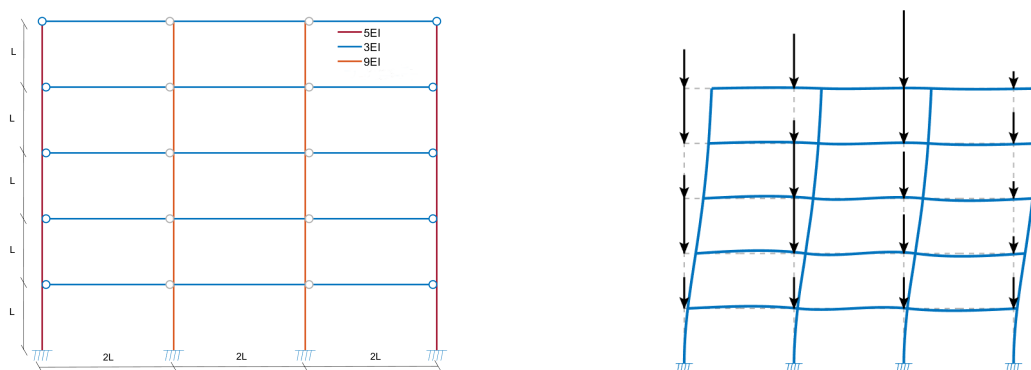


FIGURE 5.5 – Représentation du bâtiment avec les différentes raideur de chaque élément et forme du mode critique

Le bâtiment a été modélisé afin qu'il se comporte un peu de la même manière qu'un bâtiment avec un noyau central en ayant mis en place des éléments verticaux beaucoup plus raides au centre et en y encastrant les poutres du milieu. Nous sommes bien conscients que le comportement ne suivra pas vraiment celui d'un bâtiment avec un vrai noyau central efficace mais nous voulions rester dans le cas d'une structure non contreventée pour observer le comportement déformé. De plus, l'étude d'un cas intermédiaire entre deux situations "extrêmes" est toujours une bonne chose pour ajouter une sorte de point de contrôle afin de mieux comprendre l'évolution du comportement du modèle entre ces deux situations.

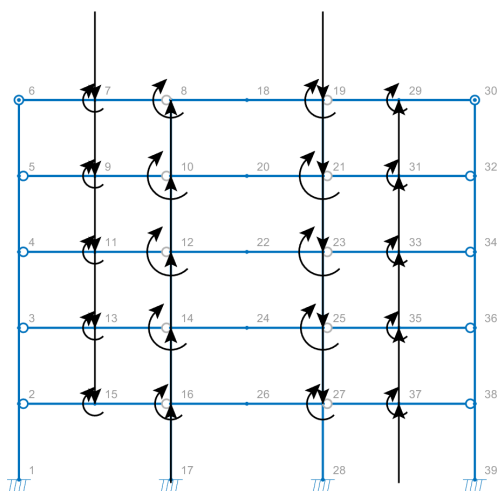


FIGURE 5.6 – Représentation du cas de charge  $P_1$

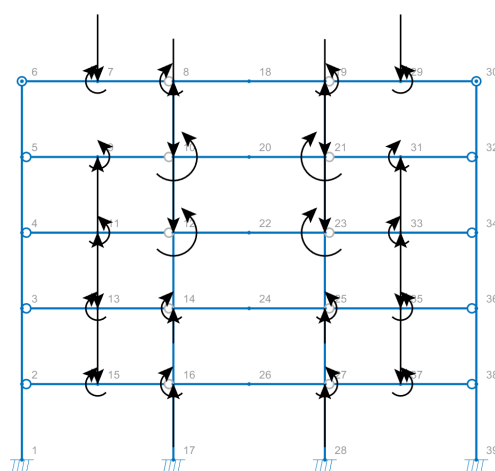


FIGURE 5.7 – Représentation du cas de charge  $P_\sigma$

Nous pouvons observer plusieurs éléments intéressants dans ces deux représentations. Tout d'abord, comme prévu, seuls les éléments reliés à des nœuds presque rigides présentent des charges nodales équivalentes. En effet, en examinant les formules (5.15), nous constatons que si un nœud est parfaitement rigide, nous aurons  $\alpha \rightarrow 0$ , ce qui entraîne une tendance vers zéro pour les deux cas de charges. De plus, pour des raisons de concision, nous n'allons pas énumérer toutes les valeurs des charges nodales, mais il est à noter que les charges verticales s'annulent à nouveau et que la différence d'échelle entre les deux cas est à nouveau très importante, ce qui suggère que  $\mathbf{P}_\sigma$  peut être négligé dans ce cas également. En outre, si nous comparons les travées situées aux extrémités droite et gauche du bâtiment avec les résultats obtenus dans notre premier cas d'étude, nous avons l'impression que les éléments adjacents à la colonne centrale avec des assemblages semi-rigides se comportent de manière similaire au portique étudié précédemment.

Il peut également être intéressant d'étudier la déformée induite par ces deux cas de charge :

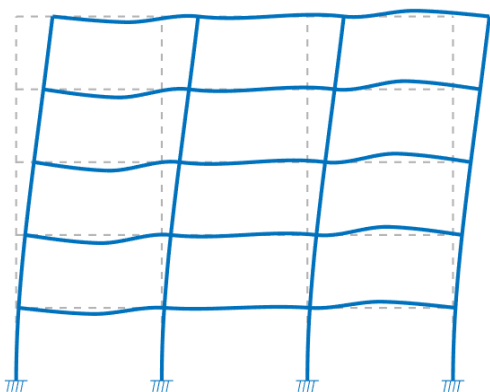


FIGURE 5.8 – Représentation de la déformée du cas de charge  $\mathbf{P}_1$

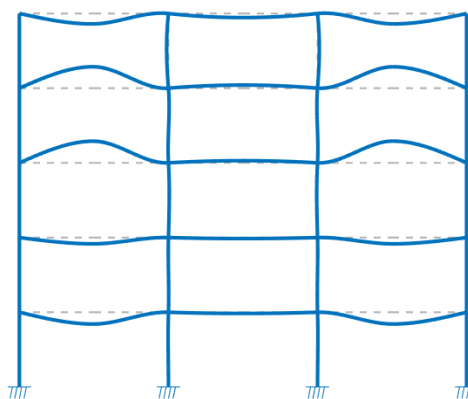


FIGURE 5.9 – Représentation de la déformée du cas de charge  $\mathbf{P}_\sigma$

La dernière conclusion intéressante que nous pouvons tirer ici est que, comme on pourrait s'y attendre en examinant les représentations des charges, les moments de  $\mathbf{P}_1$  ont tous la même direction, ce qui va entraîner une "bascule" de la structure dans cette direction. Ce n'est pas du tout le cas pour les moments de  $\mathbf{P}_\sigma$ , car la symétrie du bâtiment fait que chaque moment induit qui tourne vers la droite a un homologue (qui n'a pas nécessairement la même amplitude, mais dont l'ordre de grandeur est comparable) qui contrecarre cet effet en tournant dans l'autre sens. Ainsi, les charges ont tendance à s'auto-équilibrer dans ce cas, et la structure ne se déplacera pas transversalement. Par conséquent, nous pouvons conclure que, pour un bâtiment symétrique tel que celui-ci, même si le chargement n'est pas symétrique, le cas de charge  $\mathbf{P}_\sigma$  aura tendance à s'auto-équilibrer et n'aura pas d'influence sur la stabilité globale du bâtiment. C'est un autre exemple qui démontre que  $\mathbf{P}_\sigma$  peut être négligé. Pour en être convaincu, nous allons anticiper un peu les choses et constater que la réponse obtenue en négligeant  $\mathbf{P}_\sigma$  est très précise, comme le montre la figure (8.3).

Pour vérifier si nous pouvons, oui ou non, nous passer de ce terme, nous avons réalisé l'ensemble des tests de la suite du travail en le négligeant. Si malgré cela, nous obtenons des

résultats probants, nous pourrions conclure que la forme (5.20) est une formule satisfaisante pour calculer l'importance de la perturbation du multiplicateur critique d'une structure à nœuds presque rigides.

### 5.3.3 Étude de l'influence des composantes du vecteur de charge équivalente $\mathbf{P}_1$

Dans les deux cas d'études ci-dessus, nous avons remarqué que les charges verticales s'annulaient à la fois pour les charges équivalentes  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_\sigma$ . De plus, nous avons décidé d'éliminer le vecteur  $\mathbf{P}_\sigma$  de l'équation en raison de la différence significative de magnitude entre les deux vecteurs. En examinant de plus près les cas de charges et les équilibres en rotations calculés dans le premier cas d'étude, nous pouvons observer que, pour un même élément, les charges verticales aux nœuds successifs s'alternent entre positif et négatif. Cela entraîne un équilibre en rotation qui oscille d'un côté à l'autre, avec une contribution croissante à mesure que la distance entre les nœuds augmente. Par conséquent, nous nous demandons quel serait l'impact de négliger les charges dans la direction  $y$  sur l'équilibre global, puisque ces charges n'influent sur la stabilité que par leur contribution à l'équilibre en rotation, qui est presque compensée par la charge verticale au nœud suivant. Nous allons donc calculer les réponses des deux cas d'études précédents en ne considérant que les moments dans  $\mathbf{P}_1$ .

Commençons par comparer les réponses obtenues pour le premier cas d'étude en prenant en compte toutes les composantes de  $\mathbf{P}_1$  et en ne considérant que les composantes de moments de force aux troisièmes degrés de liberté de chaque nœud (voir Figure 5.10). Nous constatons immédiatement une perte de précision significative par rapport au vecteur complet, et notre approximation s'éloigne rapidement de la solution de référence. Cependant, nous pouvons nous demander si cet écart ne serait pas acceptable pour une première approximation du multiplicateur critique. En effet, supposons que nous souhaitions déterminer l'effet du passage d'un assemblage infiniment rigide à un assemblage ayant une constante de rigidité de 100Nm. Dans ce cas, l'erreur par rapport à la solution de référence reste inférieure à 10%. De plus, dans la plupart des cas, lorsque nous examinons en détail la rigidité d'un assemblage, nous avons une idée approximative de la rigidité que nous souhaitons attribuer à ce nœud. Par conséquent, si le résultat obtenu avec notre calcul simplifié répond à la limite que nous souhaitons atteindre, sachant que cette valeur est sécuritaire, l'exactitude de notre réponse importe peu. Nous pouvons simplement conclure que nous pouvons attribuer cette rigidité au nœud sans compromettre la stabilité de la structure.

Nous pouvons observer une comparaison entre la solution obtenue en ne considérant qu'une partie du vecteur  $\mathbf{P}_1$  et en considérant sa totalité ci-dessous :

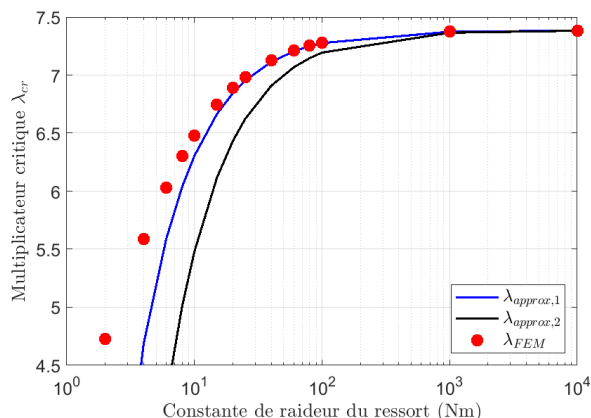


FIGURE 5.10 – Illustration des résultats du premier cas d’étude sans prendre en compte les charges verticales de  $\mathbf{P}_1$

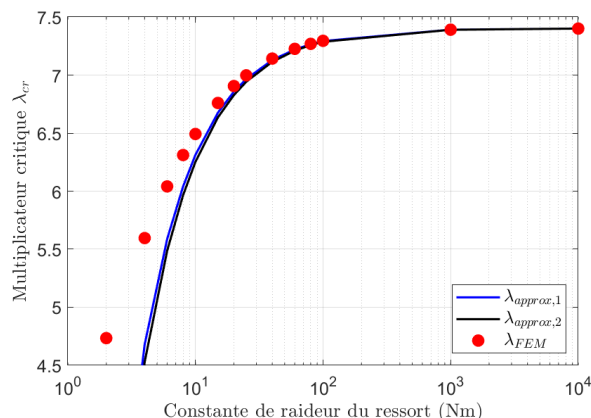


FIGURE 5.11 – Illustration des résultats du premier cas d’étude en prenant en compte les charges verticales de  $\mathbf{P}_1$

Maintenant, procédons à la même analyse pour le cas d’étude numéro deux :

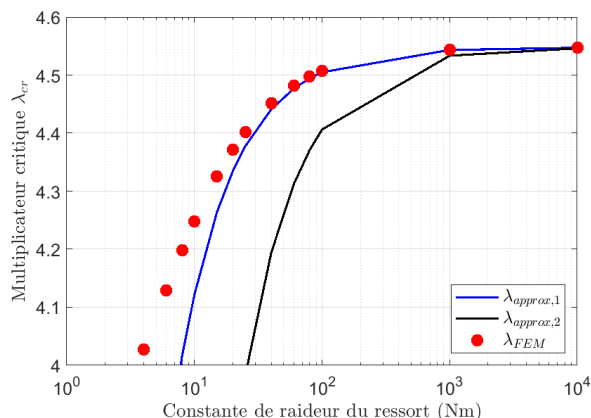


FIGURE 5.12 – Illustration des résultats du deuxième cas d’étude sans prendre en compte les charges verticales de  $\mathbf{P}_1$

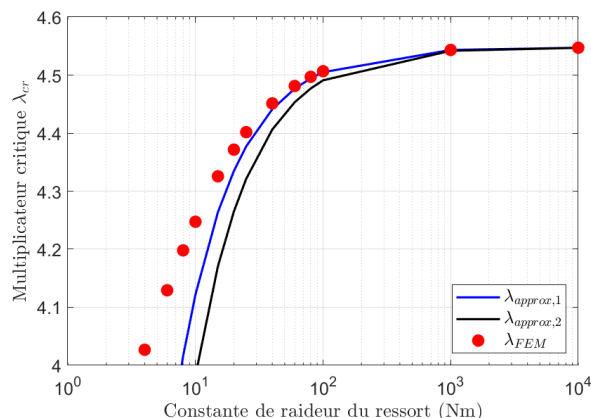


FIGURE 5.13 – Illustration des résultats du deuxième cas d’étude en prenant en compte les charges verticales de  $\mathbf{P}_1$

Encore une fois, nous pouvons constater un décrochage assez important entre la courbe de référence et la solution obtenue par notre méthode allégée. Cependant, si on fait la même analyse que pour la cas d’étude numéro un, nous constatons encore une fois que, si nous restons dans des hautes limites de rigidité, nous ne commettons pas d’erreur supérieure à 10% ce qui peut rester acceptable pour une première approximation ou pour une vérification sur chantier.

## 5.4 Conclusion

Suite aux développements réalisés dans ce chapitre, nous pouvons constater que la théorie étudiée dans ce travail peut avoir plusieurs finalités intéressantes. En effet, nous avons réussi à modifier cette formule pour la rendre plus accessible et permettre une résolution manuelle en utilisant une simple hypothèse de force statique équivalente appliquée



au bon endroit sur la structure. Cette modification est encore théorique, mais nous allons tester sa véracité et sa précision par rapport à la première formule dans les chapitres suivants. Si nous devons déjà émettre une hypothèse sur sa précision, nous pouvons raisonnablement supposer que la solution se situera entre la courbe bleue et la courbe noire des figures (5.10) et (5.12). Enfin, il est possible de pousser la simplification de cette méthode jusqu'à la suppression du calcul d'un cas de charges statiques équivalentes complet, ainsi que de la moitié de l'autre cas de charge (si nous faisons l'hypothèse d'une rigidité axiale infinie), dans un objectif de première approximation ou de vérification.

Les représentations des réponses de tous les tests qui vont être présentés dans la suite du travail, en négligeant les termes relatifs aux premiers et deuxièmes degrés de liberté de chaque nœud du cas de charge  $\mathbf{P}_1$ , sont présentées dans les annexes.

## Chapitre 6

# Comparaison entre la méthode d'approximation avec et sans hypothèse sur la force statique équivalente

Dans le chapitre précédent, nous avons considérablement modifié la formule développée afin de la rendre utilisable en posant une hypothèse sur la distribution des forces statiques équivalentes. Nous allons maintenant effectuer une série de tests similaires à ceux réalisés avec la première forme, afin d'évaluer l'influence de cette hypothèse (même mauvaise) sur la réponse de la structure. Dans la mesure du possible, nous essayerons de faire l'hypothèse d'une seule force ponctuelle, car cela faciliterait le calcul de la forme du mode critique.

### 6.1 Test de la méthode avec une hypothèse sur le mode propre de la structure

Sur l'ensemble des tests qui vont suivre, nous avons fait une hypothèse assez simple en approchant la forme du mode critique des différentes structures en appliquant uniquement une force horizontale au nœud supérieur gauche de chaque modèle. À titre d'anecdote, la force statique appliquée est de 100 N, soit 100 fois supérieure aux différentes charges ponctuelles verticales appliquées. Nous soulignons ceci car, comme expliqué précédemment, l'amplitude de la force statique n'a aucune importance étant donné que le mode critique et la déformation statique sont normalisés. En ce qui concerne les portiques à un étage et une travée, la déformation sous la charge statique équivalente  $\hat{\mathbf{F}}$  est présentée sur la figure (5.1).

#### 6.1.1 Test 1 : cas de charge symétrique

Nous allons commencer notre série de tests par le cas de base de ce travail (3.2) car nous aimerions montrer l'évolution de la précision de la méthode au fur et à mesure que le chargement devient de plus en plus asymétrique.

La forme du mode critique de ce test est illustrée ci-dessous :

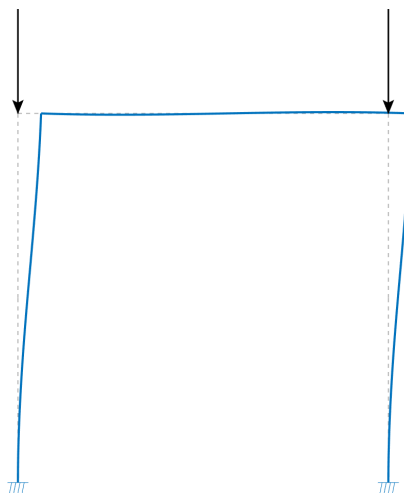


FIGURE 6.1 – Mode critique du modèle

Nous lui avons donc appliqué une force statique équivalente horizontale d'amplitude quelconque au sommet de la colonne de gauche afin d'approcher au mieux la forme de ce mode critique. Les résultats obtenus sont les suivants :

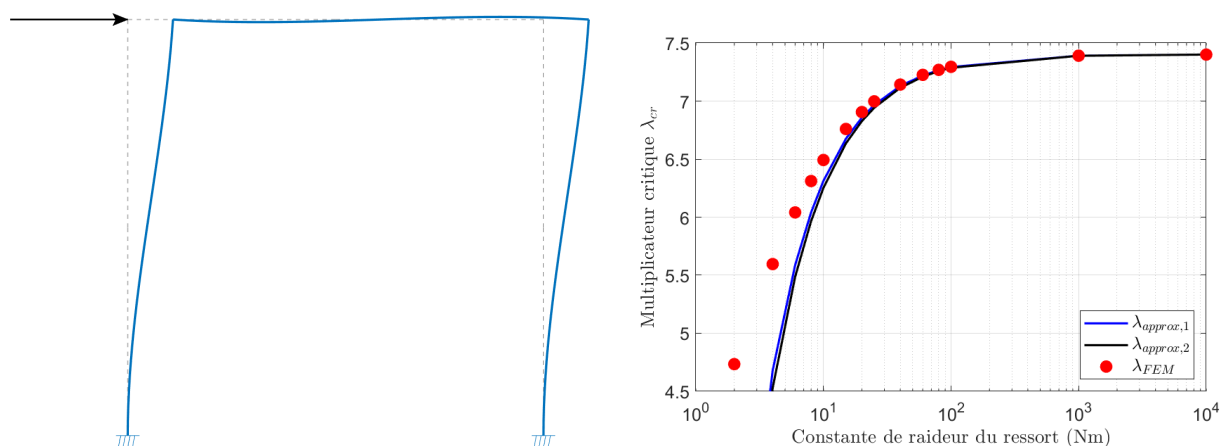


FIGURE 6.2 – Illustration des résultats du Test 1

Premièrement, nous pouvons observer que notre hypothèse sur la forme du mode critique de la structure est excellente, car la déformée statique obtenue par notre hypothèse est extrêmement similaire à la forme du mode critique du modèle illustré à la figure (6.1). Ensuite, comme nous nous y attendions, nous remarquons que les réponses obtenues avec et sans l'hypothèse se superposent presque sur l'ensemble du domaine considéré. Cela s'explique par le fait que notre hypothèse est excellente et qu'il n'y a pratiquement aucune différence entre la forme du mode critique réel de la structure et la forme que nous avons supposée.

### 6.1.2 Test 2 : cas de charge asymétrique

Nous passons maintenant au deuxième test réalisé pour un cas de charge asymétrique. Nous avons décidé d'appliquer la même hypothèse que pour le **Test 1**, car le modèle

conserve la même forme et seule la charge varie entre les deux tests. De plus, nous ne répéterons pas la forme de la déformée statique résultant de notre hypothèse, car elle est présentée à la figure (6.2). Nous pouvons observer ci-dessous la forme du mode critique de notre modèle, ainsi qu'une représentation du comportement de la réponse avec et sans notre hypothèse :

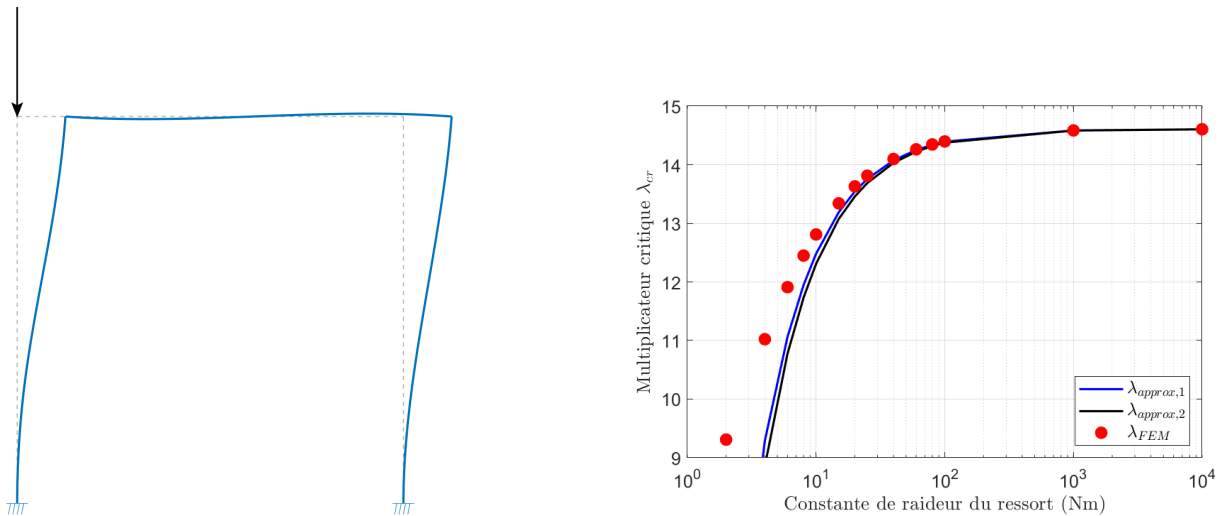


FIGURE 6.3 – Illustration des résultats du Test 2

Avec ce cas assez simple, nous pouvons observer que notre hypothèse (qui est faible, rappelons-le) a très peu d'influence sur le comportement de la réponse. En effet, pour  $K = 20 Nm$ , l'erreur entre les courbes bleue et noire est seulement de 0,64%. Il s'agit donc d'un résultat assez encourageant pour la suite. Si nous comparons la forme du mode critique de notre cas présent avec la déformée statique sous la charge statique équivalente (6.2), il n'est en réalité pas étonnant d'obtenir cet excellent résultat, car l'hypothèse est à nouveau excellente, même si elle est très simple. Notons toutefois que la deuxième approximation représentée par la courbe noire est légèrement plus éloignée de la courbe bleue que dans le cas précédent.

### 6.1.3 Test 3 : cas de charge peu réaliste

Poussons encore un peu plus l'asymétrie du chargement en plaçant deux charges égales mais opposées au sommet de chaque colonne. Les formes du mode critique et les réponses associées à cet exemple sont les suivantes :

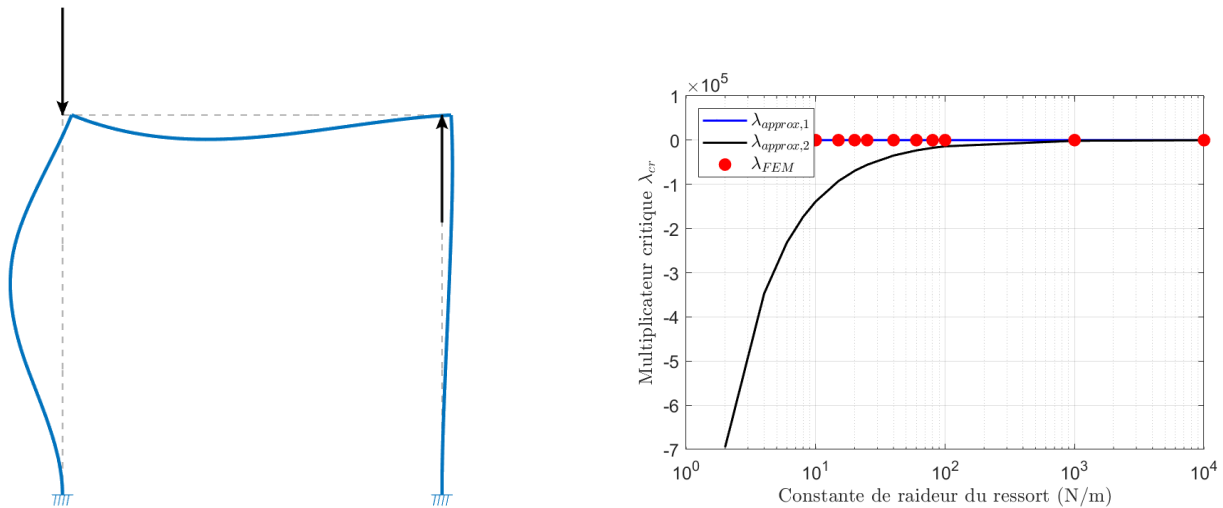


FIGURE 6.4 – Illustration des résultats du Test 3

Nous pouvons observer ici que, malheureusement, le comportement des deux réponses diffère énormément. Ce résultat n'est pas étonnant puisque, avec l'hypothèse posée, nous supposons que le mode de déformation de la structure aura tendance à se balancer vers la droite, avec la poutre en mi-travée qui reste plus ou moins droite et les colonnes qui suivent ce déplacement vers la droite. Cependant, avec le chargement que nous avons appliqué à ce portique, le mode de déformation sera très différent. Par conséquent, nous pouvons conclure que l'hypothèse posée est trop faible pour ce cas de test.

Si nous observons l'évolution de la forme du mode critique lors des trois premiers tests, nous constatons que cette forme tend de plus en plus à ressembler à celle d'un portique à nœuds non déplaçables, comme illustré ci-dessous :

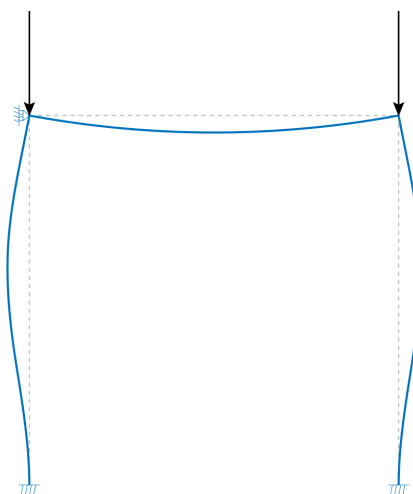


FIGURE 6.5 – Illustration de la forme du mode critique d'un portique à nœuds non déplaçables

En effet, lors du troisième test, les deux colonnes avaient tendance à se déformer dans des sens opposés, un peu à l'instar de la Figure (6.5). De plus, notre hypothèse suppose que les nœuds supérieurs du portique se déplacent horizontalement. Cependant, dans

notre dernier cas, le déplacement de ces nœuds est pratiquement empêché en raison de la force de traction qui "rappelle" la structure vers sa position initiale. C'est comme si nous voulions déformer la structure en appliquant une force horizontale au niveau de l'appui à rouleau sur la Figure (6.5); cela n'aurait aucune influence sur la déformation de la structure. C'est pourquoi notre hypothèse n'était plus valide pour ce cas de chargement, et il faudrait formuler une autre hypothèse pour obtenir un résultat satisfaisant.

#### 6.1.4 Test 4 : bâtiment multi-étage avec charge symétrique

Étudions maintenant le quatrième cas test d'un bâtiment à plusieurs étages avec une charge symétrique. Étant donné la forme très différente de ce modèle par rapport aux tests réalisés sur les portiques simples, il est utile de présenter la déformation statique de la structure sous la charge statique équivalente qui reflète notre hypothèse sur la forme du mode critique :

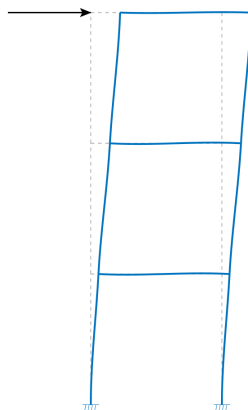


FIGURE 6.6 – Représentation de la déformée statique du modèle sous la charge statique équivalente

Ci-dessous, nous pouvons observer le mode critique de la structure ainsi que le comportement des réponses sous notre hypothèse :

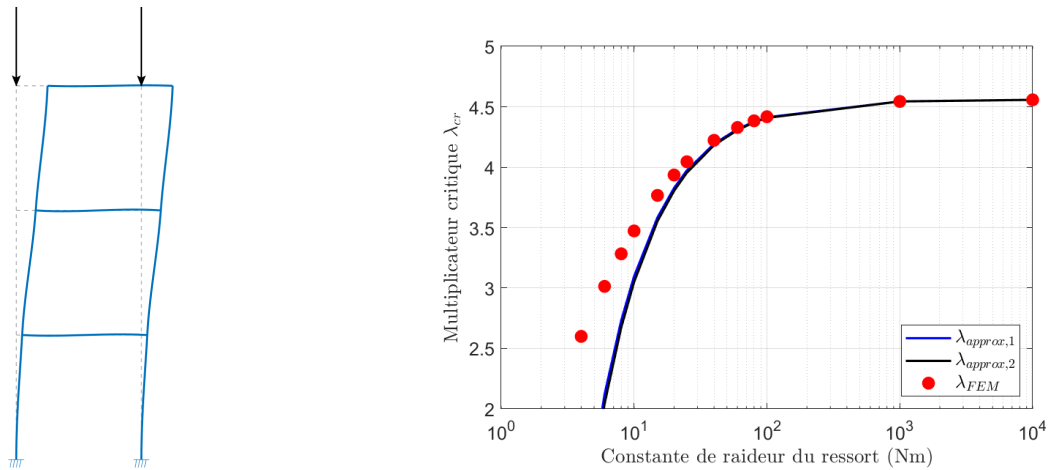


FIGURE 6.7 – Illustration des résultats du Test 4

De la même manière que pour les premiers cas étudiés dans cette section, nous pouvons constater une excellente superposition des courbes obtenues à l'aide de notre méthode avec et sans hypothèse. Ce résultat était largement prévisible car si nous comparons la forme réelle du mode critique de la structure à la déformation statique induite par la force statique équivalente (Figure 6.6), les formes sont très similaires.

### 6.1.5 Test 5 : Portique avec plusieurs travées

De la même manière que pour le test précédent, étant donné la forme considérablement différente de ce nouveau modèle, il est opportun de présenter la forme de la déformation statique de la structure soumise à la force statique équivalente :

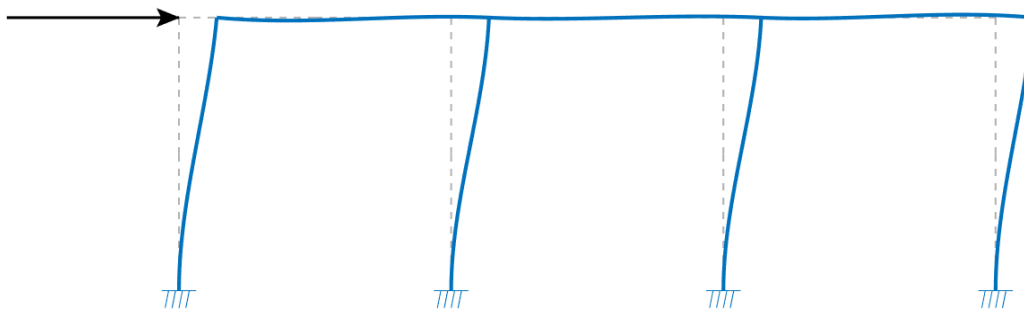


FIGURE 6.8 – Représentation de la déformée statique du modèle sous la charge statique équivalente

Nous avons donc, encore une fois, appliqué notre méthode avec cette hypothèse sur ce nouveau test :

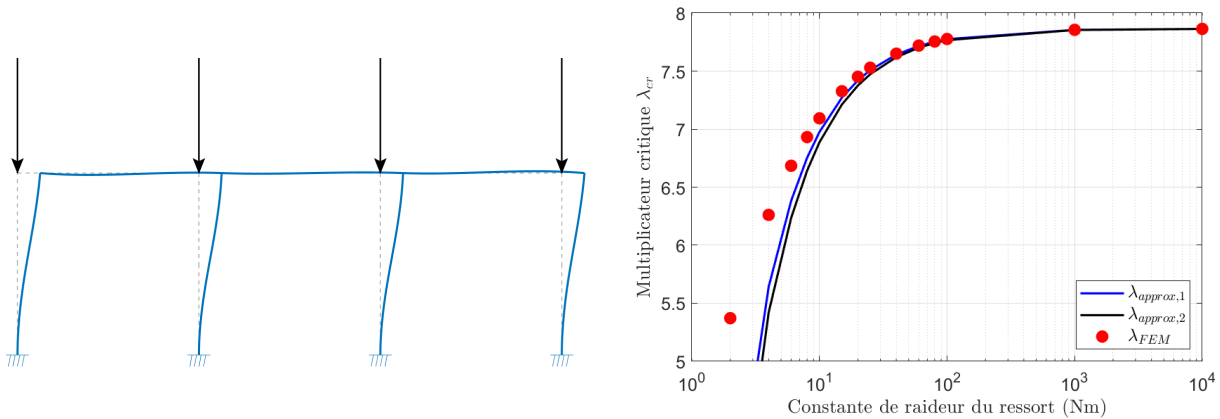


FIGURE 6.9 – Illustration des résultats du Test 5

La méthode simplifiée, utilisant l'hypothèse très simple d'une charge statique équivalente horizontale ponctuelle appliquée au nœud supérieur des portiques, se révèle une fois de plus suffisante pour obtenir une solution très satisfaisante. En effet, en comparant la déformation statique induite par  $\hat{\mathbf{F}}$ , telle qu'illustrée à la Figure (6.8), avec la forme du mode critique, telle qu'illustrée à la Figure (6.9), on constate que les deux formes sont sensiblement les mêmes. Par conséquent, les courbes de réponse avec et sans hypothèse sont très proches sur l'ensemble du domaine considéré.

### 6.1.6 Conclusion sur la méthode avec une hypothèse

Suite à cette série de tests, nous pouvons conclure que l'idée d'émettre une hypothèse sur la forme du mode critique de la structure étudiée, afin de calculer relativement facilement son multiplicateur critique à l'aide de formules simples, est prometteuse. En effet, dans tous les cas sauf un, nous avons obtenu les multiplicateurs critiques auxquels nous nous attendions en supposant simplement une charge horizontale ponctuelle appliquée au sommet pour approcher la forme du mode critique. Le seul cas où cette approche n'a pas fonctionné est celui où la structure se rapprochait d'une structure à nœuds non déplaçables. Si l'on y réfléchit, il n'est pas surprenant qu'il y ait une si grande différence de précision entre les modèles à nœuds déplaçables et ceux à nœuds non déplaçables en supposant la même forme du mode critique. En comparant les formes illustrées respectivement à la Figure (6.1) et à la Figure (6.5), on constate qu'elles n'ont rien à voir et qu'il y a même des éléments se déplaçant dans des sens opposés d'un cas à l'autre. Par conséquent, l'hypothèse était trop mauvaise (voire fausse) pour parvenir à un résultat concluant. Ainsi, si cette méthode venait à être utilisée en pratique, l'intuition et l'expérience de l'ingénieur joueraient un rôle primordial, car elles détermineraient si l'hypothèse est correcte, acceptablement approximative ou totalement aberrante.



## Chapitre 7

# Étude des limites de la méthode en faisant une hypothèse sur la forme du mode critique

Lors des tests que nous avons réalisés précédemment, nous avons pu observer un cas où notre méthode s'est révélée peu efficace. Ce cas correspond à l'application d'une charge de traction au sommet d'une des colonnes. Il n'est pas surprenant que le comportement de la réponse diffère considérablement de la solution de référence, car dans cette configuration, l'hypothèse que nous avons formulée sur la forme du mode critique devient beaucoup moins valide que dans les autres cas. En effet, l'application d'une force de traction au sommet d'une colonne rend le nœud soumis à cette charge relativement immobile. Cependant, notre hypothèse repose sur l'application d'une charge horizontale uniquement à l'un des coins supérieurs de la structure, ce qui suppose que les nœuds supérieurs sont déplacés et que la déformée statique correspondante est donc très différente du mode critique réel. Nous pouvons donc conclure que la méthode ne fonctionne pas pour n'importe quelle hypothèse sur la forme du mode critique et qu'il est nécessaire de faire une approximation relativement réaliste. En observant le mode critique sous chargement réel, nous avons formulé une autre hypothèse (toujours assez simple), à savoir :

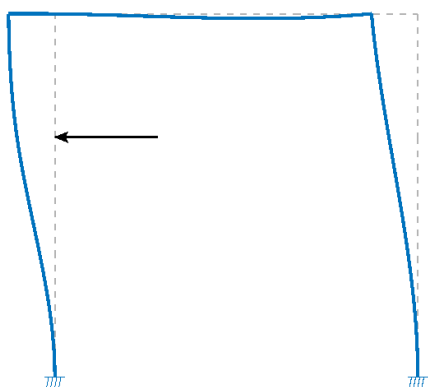


FIGURE 7.1 – Représentation du modèle du test 2

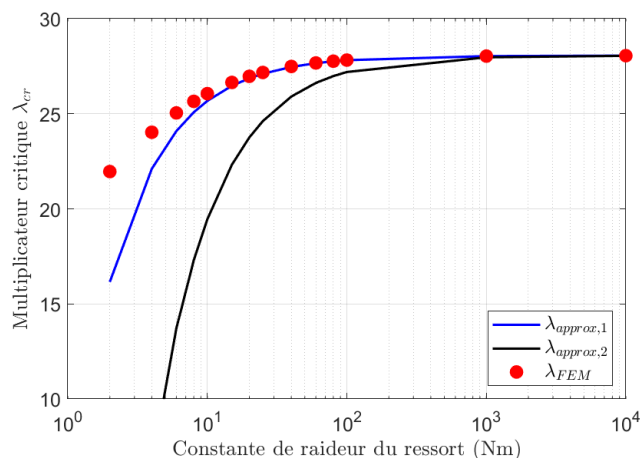


FIGURE 7.2 – Réponse test 2 formules VS hypothèse sur le mode

La réponse s'approche déjà beaucoup mieux de la réponse de référence, qui rentre au moins dans un ordre de grandeur cohérent par rapport aux résultats obtenus à la Figure (6.4) même si la solution reste loin d'être suffisante. Cependant, nous pouvons encore améliorer notre hypothèse. En examinant de près la forme réelle du mode critique, nous avons formulé une hypothèse beaucoup plus complexe :

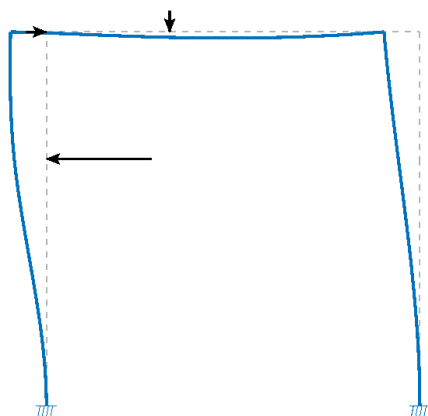


FIGURE 7.3 – Représentation du modèle du test 2

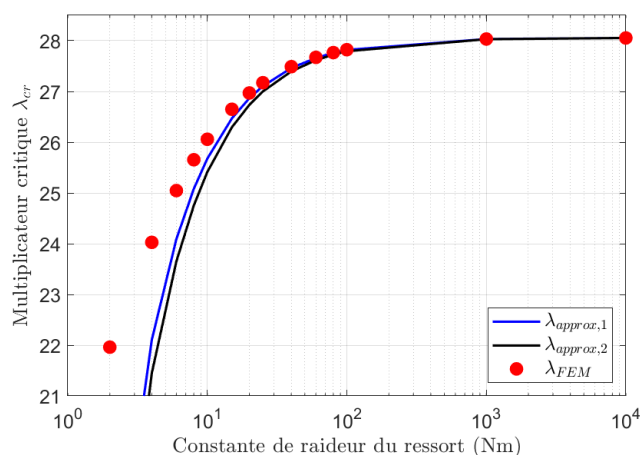


FIGURE 7.4 – Réponse test 2 formules VS hypothèse sur le mode

où, ici, nous obtenons une solution d'une grande précision comparable aux autres tests réalisés dans le chapitre précédent.

On peut conclure de ce dernier test que plus nous avons une bonne connaissance du mode critique de la structure sous chargement réel, meilleure sera notre hypothèse sur sa forme.

De plus, nous pouvons également conclure de toute cette série de tests que même si l'hypothèse sur la forme du mode critique n'est pas très précise et que nous obtenons une mauvaise approximation du multiplicateur critique, si nous restons dans des valeurs assez élevées de la constante de raideur des assemblages, cette approximation sera plutôt bonne et sécuritaire. Par conséquent, si nous nous trouvons dans un cas réel sur un chantier où l'on nous pose la question de la possibilité de réduire légèrement les exigences en termes de rigidité pour un assemblage, l'utilisation de cette méthode avec une hypothèse tout juste acceptable de la forme du mode critique sera suffisante pour fournir une réponse tant que la rigidité voulue reste grande.

## Chapitre 8

# Utilité pratique de la méthode

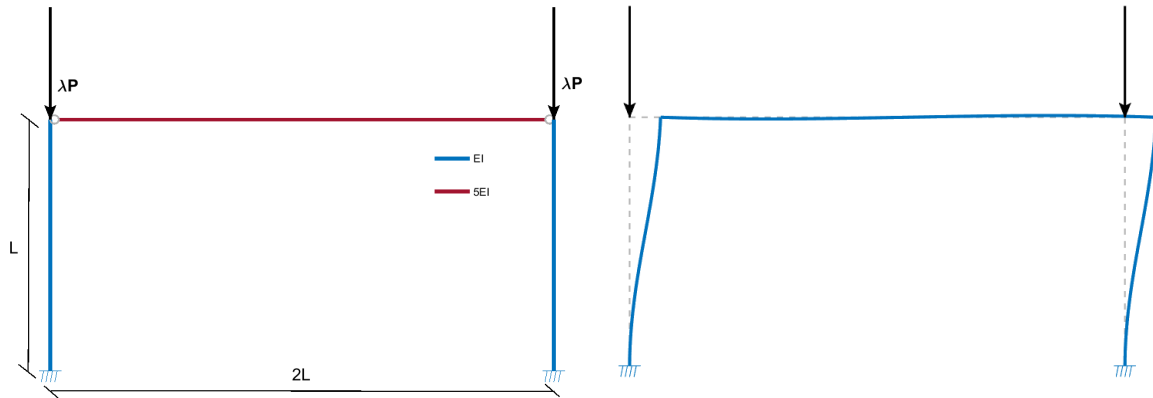
Maintenant que la validité de la méthode est établie, nous allons l'étudier sous différents angles afin d'explorer son utilité pratique. Nous commencerons par explorer une approche permettant une nouvelle classification des assemblages. Ensuite, nous l'appliquerons à un modèle de plus grande envergure pour voir comment l'utiliser sur un type de structure fréquemment rencontré dans la vie d'un ingénieur.

### 8.1 Nouvelle piste pour la classification des assemblages

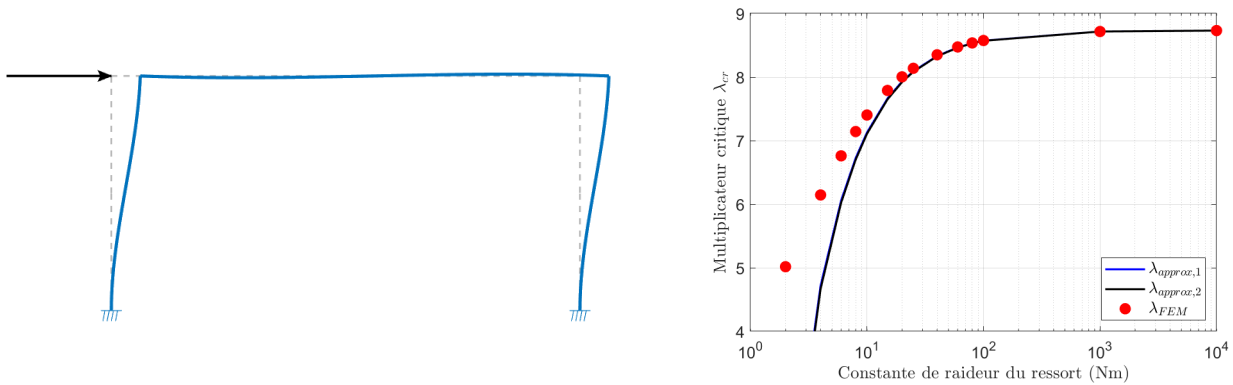
Revenons maintenant à la relation entre la première correction du multiplicateur critique et le multiplicateur critique du modèle rigide, telle qu'introduite dans l'équation (5.19). Comme nous l'avons suggéré précédemment, cette formulation sous forme de rapport pourrait nous permettre de classer l'assemblage en fonction de l'impact qu'une perturbation de sa rigidité aurait sur le multiplicateur critique par rapport au modèle rigide. Comme il est coutume de le faire dans la littérature ([4]), nous fixerons la valeur limite de ce rapport à 5%. Ainsi, dès que cette valeur est dépassée, nous considérerons que l'assemblage n'est plus considéré comme rigide.

#### 8.1.1 Cas d'un portique avec une poutre beaucoup plus rigide et plus longue que les colonnes

Pour commencer la discussion sur l'intérêt de cette forme de rapport, nous allons introduire un exemple spécifique d'un portique à une seule travée, où la poutre est deux fois plus longue que la hauteur des colonnes et cinq fois plus rigide. Ainsi, à partir de ce point, nous abandonnons les hypothèses formulées au début de ce travail, qui supposaient des longueurs et des rigidités flexionnelles unitaires. Nous conservons néanmoins l'hypothèse selon laquelle les rigidités axiales des éléments restent infinies. Vous pouvez observer la représentation graphique de cet exemple et la forme de son mode critique ci-dessous :



Avec une réponse obtenue grâce à notre nouvelle méthode et une hypothèse similaire à celle faite précédemment concernant la forme, nous pouvons observer ce qui suit.



Dans un premier temps, notons que le comportement de l'évolution du multiplicateur critique est encore une fois très précis par rapport à la réponse de référence pour ce cas un peu particulier. Ensuite, observons comment évolue le rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  :

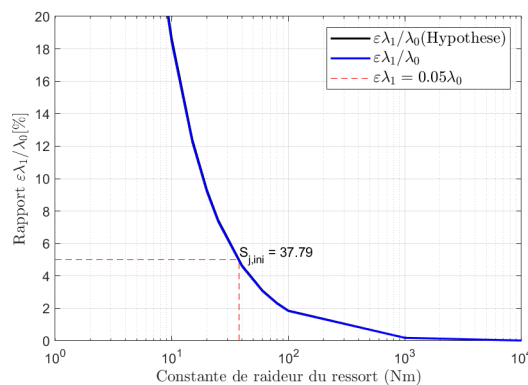


FIGURE 8.1 – Évolution du rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  en fonction de la constante de raideur du ressort

Nous pouvons voir que lorsque le rapport atteint les 5%, nous avons  $S_{j,ini} = 37,79$ . Or, comme cela est rappelé dans la section (2.3.1), selon les critères actuels de classification par rigidité des assemblages pour les structures non contreventées, un assemblage n'est plus considéré comme rigide si  $S_{j,ini} \leq X \frac{EI_b}{L_b}$  avec  $X = 25$ . En examinant les données de

notre exemple, nous avons un rapport  $\frac{EI_b}{L_b} = \frac{5}{2} = 2,5$ .

Nous pouvons ensuite effectuer le calcul pour notre limite fixée à 5% :

$$S_{j,ini} = 37,79 = 2,5 \cdot X \iff X = 15,116 < 25 \quad (8.1)$$

Et donc, pour ce cas bien précis et en prenant une tolérance de 5% pour le rapport (5.19), nous pouvons réduire la limite de rigidité de l'assemblage d'environ 40%, tout en continuant à le considérer comme rigide. Cela représente un gain considérable en termes d'utilisation d'acier et de facilité de mise en place de cet assemblage. Finalement, il est intéressant de noter plusieurs éléments :

- la méthode appliquée avec une hypothèse (très simple ici) sur le mode critique est tout aussi précise que la méthode sans hypothèse.
- jusqu'au voisinage d'une constante de raideur de l'assemblage de 37,79, notre nouvelle méthode semble presque aussi précise que la réponse par éléments finis.
- notre méthode approche la réponse des éléments finis de manière sécuritaire.

Nous pouvons donc conclure qu'il est très intéressant d'étudier la rigidité réellement nécessaire des assemblages d'extrémités dans un cas réel de portique, où la poutre est plus rigide et plus longue que les colonnes, en utilisant notre méthode tout en maintenant un niveau de sécurité conforme aux méthodes classiques. Il est à noter qu'un rapport de 5 entre les raideurs flexionnelles de la poutre et des colonnes correspondrait à l'utilisation d'une HEB 300 ou d'une IPE 400 sur des colonnes HEB 200. Bien que cela puisse sembler un peu inhabituel, ce n'est pas une situation si absurde si les colonnes ne doivent pas être dimensionnées pour résister à des forces latérales élevées.

### 8.1.2 Exemple d'un bâtiment avec des travées centrales plus rigides

Un autre exemple, plus concret cette fois-ci, concerne un bâtiment dont les travées centrales sont plus rigides. En effet, il est courant de prévoir un noyau central, plus rigide, au milieu d'une structure pour résister aux forces horizontales. Dans cette étude, nous avons jugé pertinent d'examiner une situation intermédiaire avant d'aborder le cas d'une structure parfaitement contreventée. La mise en place d'un contreventement efficace peut parfois poser des problèmes au niveau des assemblages et n'est pas toujours nécessaire pour des bâtiments de hauteur raisonnable qui ne subissent pas de charges de vent importantes. De plus, les contreventements ont également un effet bénéfique sur la stabilité d'une structure soumise uniquement à des charges verticales. Dans cette étude, nous examinerons la possibilité de s'en passer en utilisant des colonnes plus rigides au centre du bâtiment.

Pour transmettre correctement les efforts à cette colonne plus raide, il est nécessaire que les poutres horizontales soient fixées correctement avec une certaine rigidité à ces travées centrales. D'autre part, les colonnes extérieures ne sont donc là que pour reprendre des efforts verticaux et ne demandent pas une trop grande rigidité. Il n'est pas nécessaire non plus de les fixer de manière rigide aux poutres dont l'assemblage est, de ce fait, articulé. Nous lui avons appliqué un cas de chargement vertical très aléatoires à chaque niveau afin de bien représenter la réalité dans laquelle les pièces ne sont jamais toutes

chargées de la même manière. Le mode critique de la structure soumis à ce cas de charge est également représenté ci-dessous :

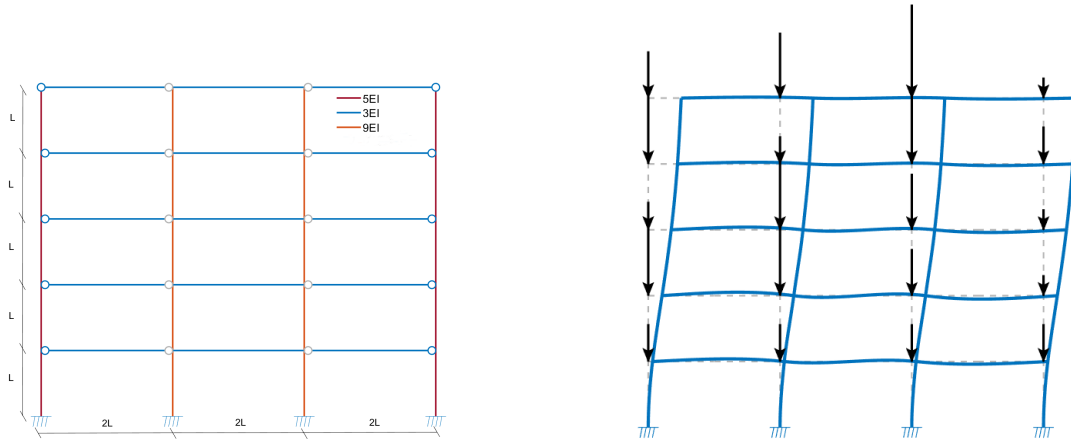


FIGURE 8.2 – Représentation du bâtiment avec les différentes raideur de chaque élément et forme du mode critique

Puisque, en pratique, nous avons une idée relativement précise de la forme du premier mode propre d’une telle structure, nous avons directement posé une hypothèse qui collait bien à cette forme et qui est représentée ici :

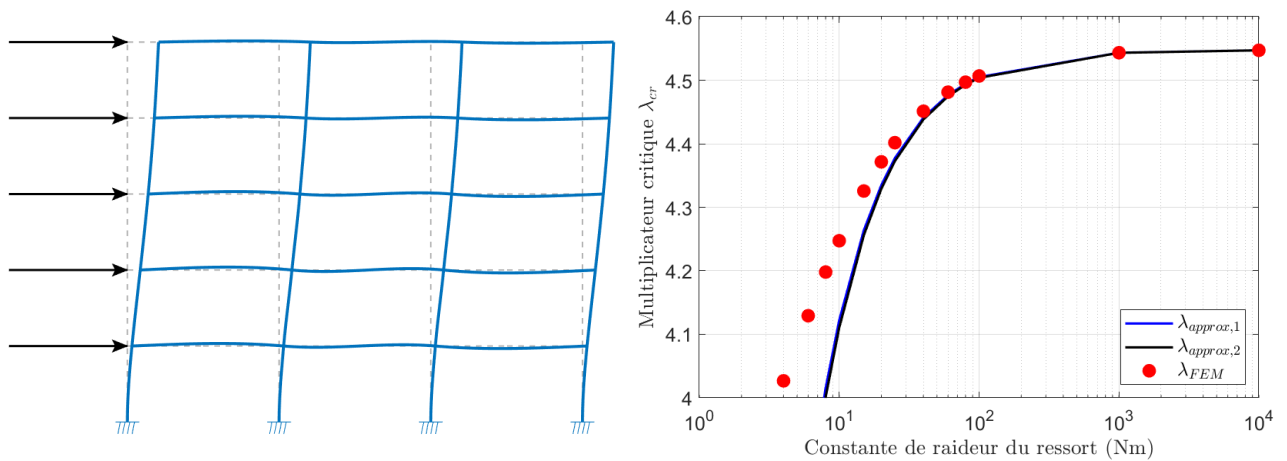
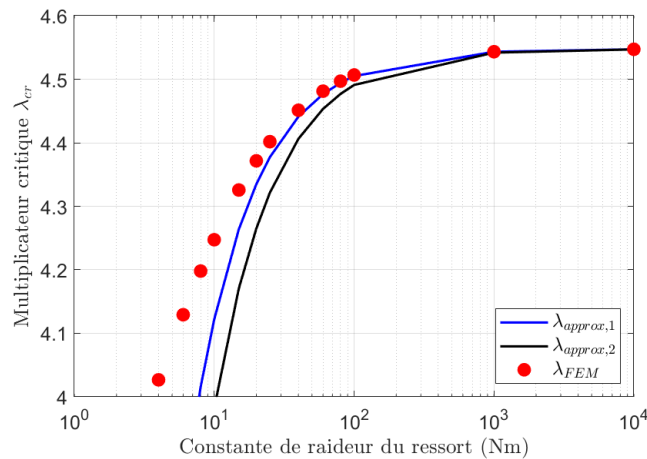


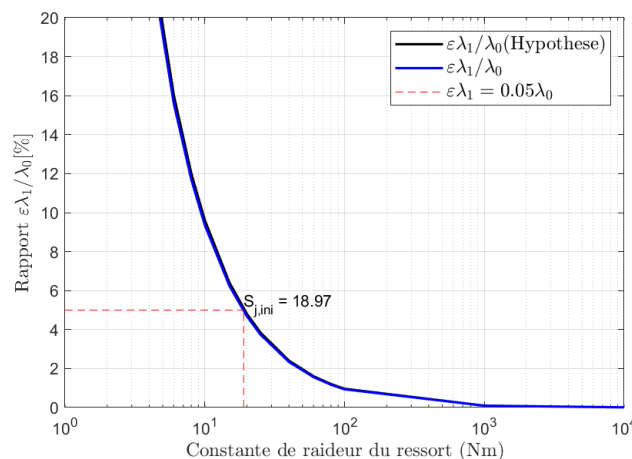
FIGURE 8.3 – Illustration des résultats obtenus pour le test d’un bâtiment avec les colonnes centrales plus raides

Si, cependant, nous avions voulu faire une hypothèse plus faible d’une simple charge horizontale pour approcher la forme du mode critique, nous aurions obtenu cette forme de comportement de la solution :



Il est évident que ce comportement est bien moins satisfaisant que celui du premier cas. Cependant, le fait de représenter la forme du mode propre de notre modèle par une seule force statique équivalente facilite grandement le calcul de l'approximation du multiplicateur critique. De plus, lorsque nous ne disposons pas de tous nos outils numériques pour effectuer un calcul précis, nous obtiendrons néanmoins une approximation du multiplicateur critique qui est à la fois proche et sécuritaire, ce qui pourrait être tout à fait suffisant sur un chantier ou lors d'une réunion.

De la même manière que pour l'exemple précédent, nous avons également tracé l'évolution du rapport (5.19) en fonction de la constante de raideur du ressort :



Toujours à l'image de l'exemple précédent, nous allons également comparer  $S_{j,ini}$  au critère de classification fixé par les Eurocodes :

$$S_{j,ini} = 18,97 = x \cdot \frac{3EI}{2L} \iff x = 12,64 \tag{8.2}$$

Pour ce cas de figure, que l'on rencontre assez régulièrement dans le dimensionnement de bâtiment, nous nous rendons compte que nous pouvons gagner jusqu'à environ 50% par rapport au critère de classification actuel par l'application rapide de notre méthode et, à nouveau, une hypothèse assez simple sur la forme du mode critique du modèle pas difficile à calculer.

Il est important de noter la facilité d'utilisation/d'implémentation de notre méthode par rapport à un calcul compliqué par éléments finis d'une structure avec plusieurs étages et plusieurs travées.

### 8.1.3 Exemple d'un bâtiment avec un contreventement efficace

Pour cet exemple, nous allons reprendre exactement le même modèle que pour l'exemple précédent mais nous lui avons appliqué des croix de Saint-André afin d'imiter le comportement qu'aurait le bâtiment avec un contreventement efficace :

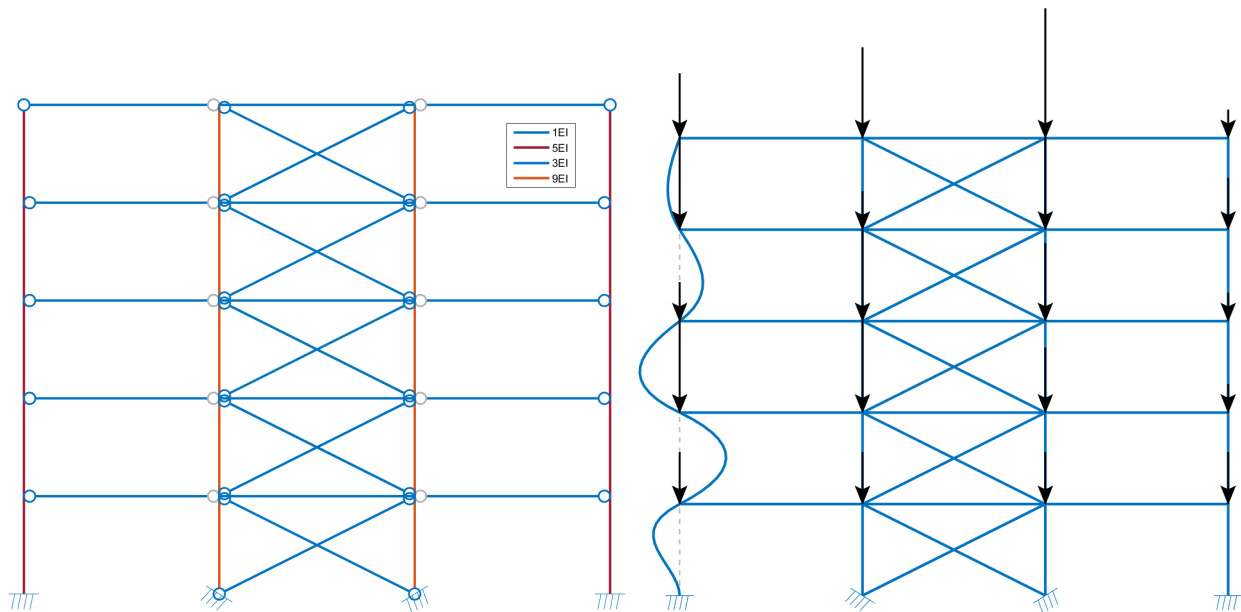


FIGURE 8.4 – Représentation du bâtiment avec les différentes raideur de chaque élément et forme du mode critique d'une structure avec un contreventement

Avant de commencer à étudier la forme qu'aura la réponse du multiplicateur critique en fonction de l'évolution de la rigidité des assemblages, on peut voir sur la forme du mode critique que, globalement, la structure ne bouge pas. En effet, la ruine se produira par une instabilité locale des colonnes extérieures du côté où les charges verticales sont les plus importantes. Cela veut dire qu'on peut s'attendre à ce que l'hypothèse de départ que l'on fait depuis le début de ces séries de tests, qui est une hypothèse sur le déplacement global de la structure, soit trop faible pour ce cas-ci. On peut même aller plus loin en disant que pour obtenir une réponse satisfaisante, il faudrait faire une hypothèse de chargement sur chaque colonne afin d'approcher la forme du mode critique. Or, ce n'est pas le but de notre méthode qui vise à être simple d'utilisation.

Nous pouvons tout de même observer ce que donnent les résultats si nous procédons à la même analyse que pour les autres cas sur la figure (8.5).



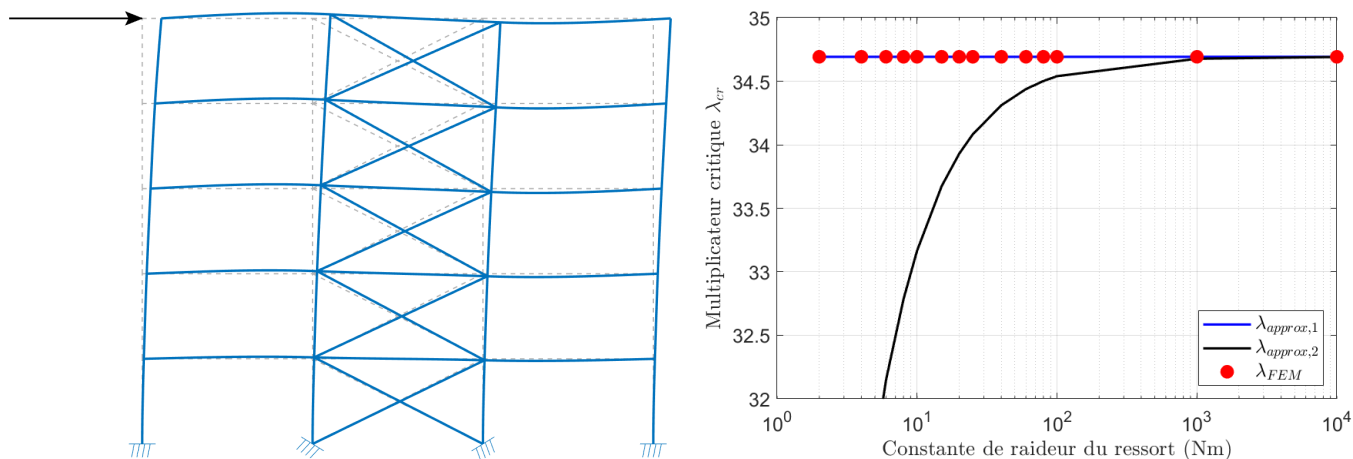


FIGURE 8.5 – Illustration des résultats obtenus pour le test d'un bâtiment avec noyau central efficace

Si on examine dans un premier temps la déformée statique induite par notre hypothèse de force statique équivalente, on remarque que, comme attendu, nous avons un déplacement transversal global de la structure ce qui est déjà très différent de la forme du mode critique réel. Ensuite, si nous regardons la réponse du multiplicateur critique, on remarque premièrement que la réponse obtenue avec notre hypothèse est médiocre, mais surtout que le multiplicateur critique réel du modèle reste constant malgré la variation de rigidité des assemblages qui relient les poutres de la travée centrale aux colonnes. En fait, ce n'est pas un résultat étonnant et surtout, ça nous ramène au problème que nous avons investigué plus tôt dans le travail lorsque nous avons étudié le cas d'un portique à nœuds presque non-déplaçables. En réalité, c'est exactement la même chose dans ce cas-ci puisque nous avons mis en place un contreventement efficace, la structure est empêchée de se déplacer transversalement et notre hypothèse sur la forme du mode critique devient donc caduque. On pourrait, effectivement, commencer à essayer d'approcher la forme du mode critique réel comme c'est le cas à la figure (7.3). Cependant, ça n'aurait aucun sens puisqu'il serait bien plus rapide de faire un calcul de stabilité locale sur la colonne la plus chargée pour connaître la charge maximum qu'elle pourrait reprendre. La dernière observation que l'on peut tirer de cette figure est que notre méthode sans poser d'hypothèse (courbe bleue sur le graphique) capte, tout de même, parfaitement le comportement du multiplicateur critique de la structure.

La grande conclusion à tirer de cet exemple est donc que notre méthode, en posant une hypothèse sur la forme du mode critique de la structure, perd toute sa puissance lorsque nous sommes dans le cas d'un modèle à nœuds non-déplaçables. On pourrait, tout de même, trouver un intérêt à utiliser la méthode sans faire d'hypothèse puisqu'elle sera moins gourmande numériquement qu'une méthode de calcul par éléments finis et offre des résultats comparables.

## 8.2 Utilisation pratique sur bâtiment de grande envergure

Pour ce dernier exemple, nous avons voulu étudier le comportement d'un bâtiment avec un grand hall open space au niveau du rez-de-chaussée, sur lequel repose le reste du

bâtiment avec des portées beaucoup plus petites. Dans un tel cas, les éléments structuraux de la base du bâtiment doivent être beaucoup plus rigides que les éléments qui composent les étages supérieurs, en particulier en ce qui concerne l'élément horizontal chargé de supporter toutes les charges provenant des niveaux supérieurs et de les transférer aux colonnes à la base. En tenant compte de ces considérations, nous avons modélisé cet exemple de la manière suivante :

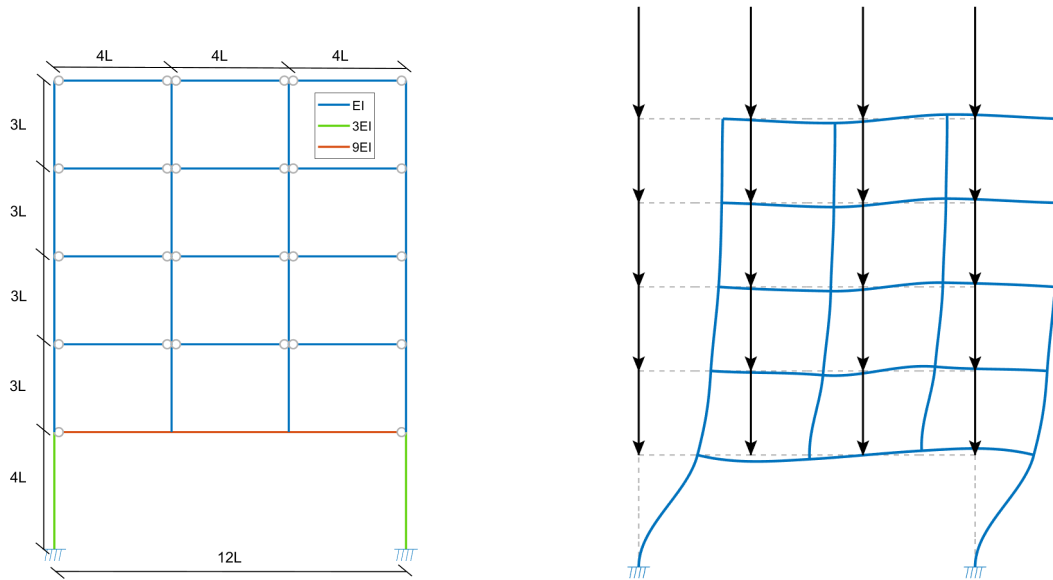


FIGURE 8.6 – Représentation du bâtiment avec les différentes raideurs de chaque éléments et représentation de la forme du mode critique

Si nous appliquons la même marche à suivre que celle utilisée pour les tests réalisés précédemment, nous aurions tendance à appliquer la force statique équivalente sur le haut de la structure et d'observer les résultats obtenus :

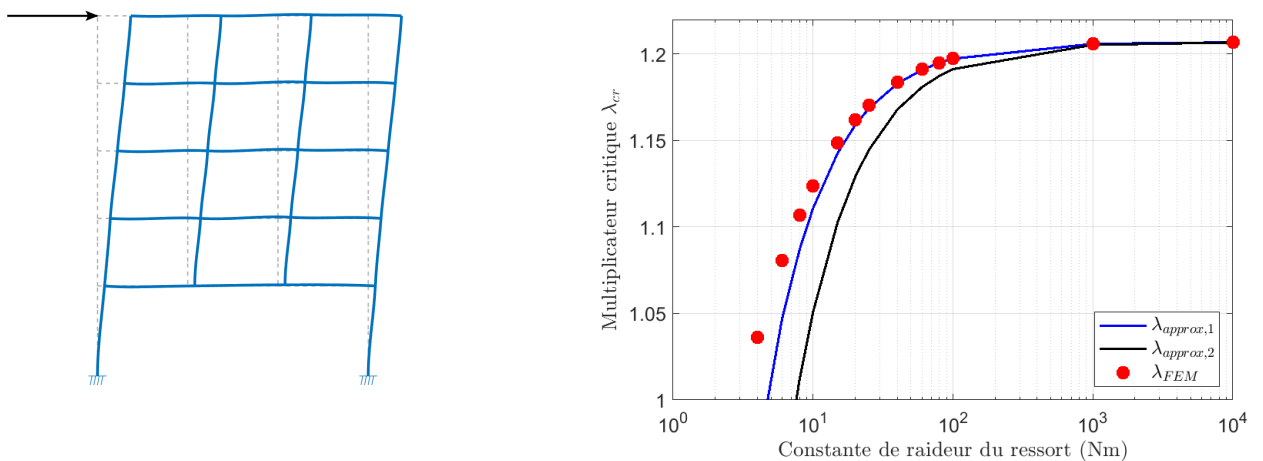


FIGURE 8.7 – Illustration des résultats obtenus pour le test d'un bâtiment avec un open space au RDC avec l'hypothèse de base

Les résultats sont globalement assez précis avec cette hypothèse, bien qu'elle ne soit

pas aussi précise si on la compare avec la forme du mode critique réel. Cependant, étant donné la forme du mode critique de la structure, nous pouvons facilement en déduire qu'il est possible de faire une autre hypothèse, tout aussi simple, qui conserve la facilité de calcul. Cette hypothèse est illustrée à la figure (8.8).

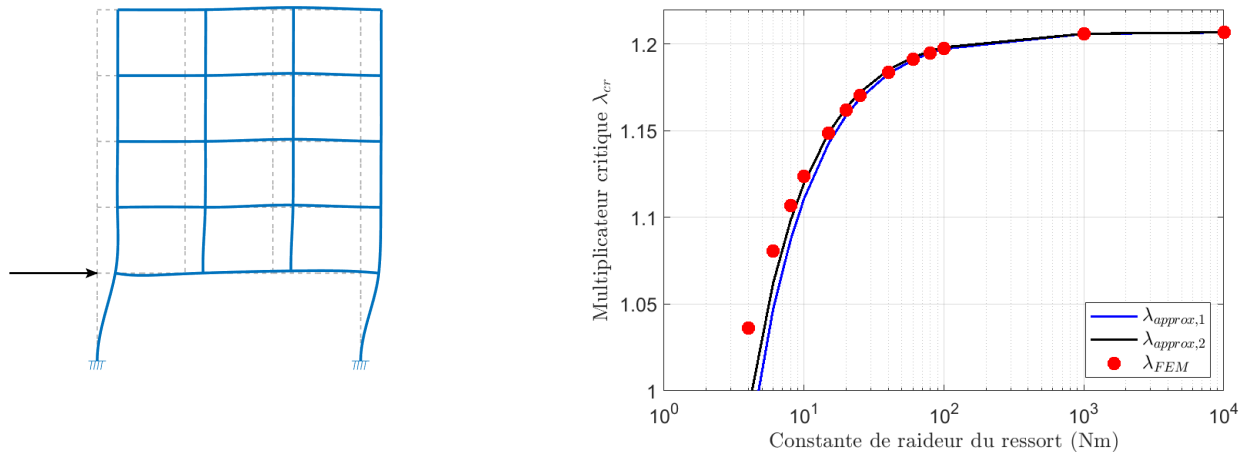


FIGURE 8.8 – Illustration des résultats obtenus pour le test d'un bâtiment avec open space au RDC avec l'hypothèse raffinée

Effectivement, la nouvelle hypothèse reste une seule force statique équivalente d'amplitude quelconque mais nous l'avons simplement appliqué à un autre nœud. Par inspection de la forme du mode critique illustré à la figure (8.6), nous avons remarqué que l'instabilité du bâtiment était provoquée par un fléchissement des colonnes au rez-de-chaussée. Si nous regardons le reste du bâtiment, il ne se déforme pratiquement pas et il se contente de se déplacer transversalement à cause de la déformation des colonnes en base. C'est pour cela que nous avons pu en déduire qu'en appliquant une force horizontale en tête des colonnes du bas, nous pourrions beaucoup mieux approcher la forme du mode critique. Et c'est bien le cas si on compare les formes représentées aux figures (8.8) et (8.6). Nous pouvons même observer que l'hypothèse est tellement bonne qu'elle épouse encore mieux la solution de référence que la solution obtenue grâce à la première formule développée au début de ce travail.

### 8.2.1 Evaluation de la contribution de $\varepsilon\lambda_1$ pour chaque élément

L'utilité ultime de cette méthode serait bien évidemment de pouvoir évaluer, par un simple calcul sur un élément donné, l'importance de la perte de rigidité d'un nœud précis par rapport au multiplicateur critique de la structure avec des nœuds infiniment rigides. Nous avons donc réalisé cet exercice pour le dernier exemple étudié, comme illustré à la Figure (8.6), afin de spécifier l'influence de la perte de rigidité de chaque nœud sur le multiplicateur critique de la structure globale. Pour ce faire, nous avons effectué le calcul en utilisant une constante de rigidité des assemblages de  $K = 100\text{Nm}$ . Cela signifie que les assemblages de chaque poutre, initialement dotés de constantes de rigidité infinies, ont

été transformés en assemblages presque rigides avec une constante de rigidité finie. Une fois tous les calculs effectués, nous avons obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1,2069 \\ \varepsilon\lambda_1 &= -7,4 \times 10^{-3} \\ \lambda_{approx} &= \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 = 1,1995 \end{aligned}$$

Ensuite, nous avons procédé à l'exercice de représenter chaque contribution à la somme de la perturbation du multiplicateur critique. Nous appellerons ces contributions  $\varepsilon\lambda_{1,i}$  où  $i$  est le numéro de l'élément. Ces contributions sont représentées sur la figure ci-dessous :



FIGURE 8.9 – Représentation de la contribution de chaque élément à la perturbation du multiplicateur critique

Par souci de lisibilité de l'image, nous avons représenté uniquement les contributions non nulles pour les éléments reliés à des assemblages presque rigides. En effet, comme nous l'avons mentionné précédemment, les éléments qui ne sont pas reliés à des assemblages semi-rigides ne contribuent pas à la perturbation du multiplicateur critique.

Le message transmis par cet exemple est significatif. En effet, nous pouvons observer que les contributions des assemblages sur la partie supérieure du bâtiment sont négligeables par rapport à la contribution totale de  $\varepsilon\lambda_1$ . En revanche, si nous nous concentrons sur les contributions des nœuds de la poutre principale inférieure, nous constatons qu'ils représentent à eux seuls :

$$-6,7 \times 10^{-03} - 3,14 \times 10^{-04} = -0,007014 \tag{8.3}$$

Cela correspond à  $\frac{-0,007014}{-0,0074} \approx 95\%$  de la perturbation totale  $\varepsilon\lambda_1$ . La conclusion pour ce type de bâtiment est donc claire : nous pouvons diminuer la rigidité des assemblages de la partie supérieure du bâtiment sans problème. En revanche, il faut être très prudent

quant à la modification de la rigidité des assemblages du premier étage, car ce sont ces nœuds qui auront le plus d'effet sur la diminution du multiplicateur critique par rapport au multiplicateur critique de la structure avec des nœuds infiniment rigides.

# Chapitre 9

## Conclusions et perspectives

### 9.1 Conclusions

Au cours de ce travail, nous avons entrepris un développement mathématique fondé sur le calcul critique des structures en utilisant la méthode des perturbations. Les théories qui en découlent reposent sur des bases mathématiques solides, ce qui les rend très fiables. Nous avons également effectué divers tests pour démontrer leur validité dans des situations plus ou moins réalistes.

Dans un premier temps, nous avons montré qu'il était possible, en connaissant le multiplicateur critique, le mode critique et les propriétés du modèle à nœuds rigides, de calculer la perturbation qu'entraînerait une baisse de la rigidité de ces nœuds sur le multiplicateur critique. Une fois cette perturbation calculée, il est alors facile de déterminer le multiplicateur critique de la structure à nœuds semi-rigides en sommant simplement le multiplicateur critique de la structure non perturbée et la perturbation du multiplicateur critique. Nous avons pu observer que cette nouvelle méthode nous fournit des résultats qui s'approchent de la précision de la méthode des éléments finis, même pour des constantes de rigidité des assemblages bien inférieures à la limite définie par les normes actuelles.

La série de tests auxquels nous avons soumis cette nouvelle théorie nous a permis de constater que plus la structure était rigide, moins l'erreur entre la solution de référence et l'approximation obtenue par notre méthode était importante. Cette observation n'est pas surprenante puisqu'une structure rigide se déplace moins transversalement et est donc moins sensible aux instabilités.

Bien que le calcul d'une structure avec des assemblages semi-rigides est une tâche ardue qui décourage souvent les praticiens de procéder à ce type d'analyse, notre calcul de la perturbation du multiplicateur critique n'utilise que des relations qui peuvent être calculées à la main même si, sous cette forme, ça reste un travail fastidieux.

Après avoir testé la validité de la première formule développée, nous nous sommes demandé s'il était possible de la simplifier pour la rendre accessible à tous. Nous souhaitons également développer une forme permettant, en connaissant uniquement le multiplicateur critique de la structure avec des assemblages rigides, de quantifier l'effet qu'aurait

la baisse de rigidité d'un assemblage spécifique sur la stabilité globale du bâtiment. Pour cela, nous avons exploité la possibilité de normaliser le mode critique et étudié la faisabilité d'une hypothèse très faible sur la forme de ce mode critique, en utilisant l'intuition et l'expérience de l'ingénieur. Cette hypothèse consiste à appliquer une charge statique équivalente nodale d'amplitude quelconque à un endroit stratégique de la structure afin que la déformation statique sous cette charge approche au mieux la forme du mode critique du modèle. Vu que nous avons démontré que la contribution de la matrice des contraintes était négligeable, nous avons uniquement besoin de la matrice de rigidité de la structure pour calculer la forme approximative du mode critique. Sachant cela, nous sommes en mesure de calculer le rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  et donc de quantifier l'influence d'une diminution de la rigidité des assemblages sur le multiplicateur critique de la structure.

Ce dernier développement nous a permis d'ouvrir une nouvelle voie en ce qui concerne la classification des assemblages selon leur rigidité. En effet, nous avons étudié la possibilité de classer un assemblage en quantifiant l'impact d'une diminution de sa rigidité sur la stabilité globale de la structure, en fixant un pourcentage donné sous la forme du rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  à ne pas dépasser afin de limiter l'impact de cette perte de rigidité sur la structure.

Enfin, nous avons montré qu'il était possible de simplifier davantage cette formule (au prix d'une précision réduite) afin de la rendre utilisable manuellement de manière relativement accessible et rapide. Pour clarifier définitivement la façon dont cette utilisation simplifiée fonctionne, voici un développement mathématique clair expliquant comment elle peut être appliquée en pratique :

1. Calculer le multiplicateur critique de la structure à nœuds infiniment rigides :  $\lambda_0$
2. Faire l'hypothèse d'une charge statique équivalente ponctuelle :  $\widehat{F}$
3. Connaissant la matrice de rigidité de la structure non perturbée  
calculer la forme approchée du mode critique :  $\widehat{\Phi}_0 = \frac{\widehat{F}}{\mathbf{K}_0}$
4. Calculer la valeur de  $\widehat{\mathbf{P}}_1$  au 3<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> DDL selon (5.15)
5. Calculer  $H_\sigma$  grâce à la relation (3.42)
6. Calculer le rapport :  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\widehat{\mathbf{P}}_1^T \widehat{\Phi}_0}{\lambda_0 H_\sigma}$
7. Comparer la valeur obtenue à la tolérance fixée

Il est possible d'effectuer le calcul localement sur la structure si nous souhaitons uniquement quantifier l'effet de la modification de la rigidité d'un seul assemblage.

Nous terminerons cette conclusion en soulignant que l'ensemble de ce travail a été réalisé dans le cadre de la théorie du calcul critique. Cependant, il est important de noter que la diminution de la rigidité d'un assemblage aura un effet négatif sur la flèche d'un élément. Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte le fait que la réduction de la rigidité d'un assemblage au niveau local peut préserver la stabilité globale de la structure, mais il est possible que les critères ELS ne satisfassent plus les exigences de

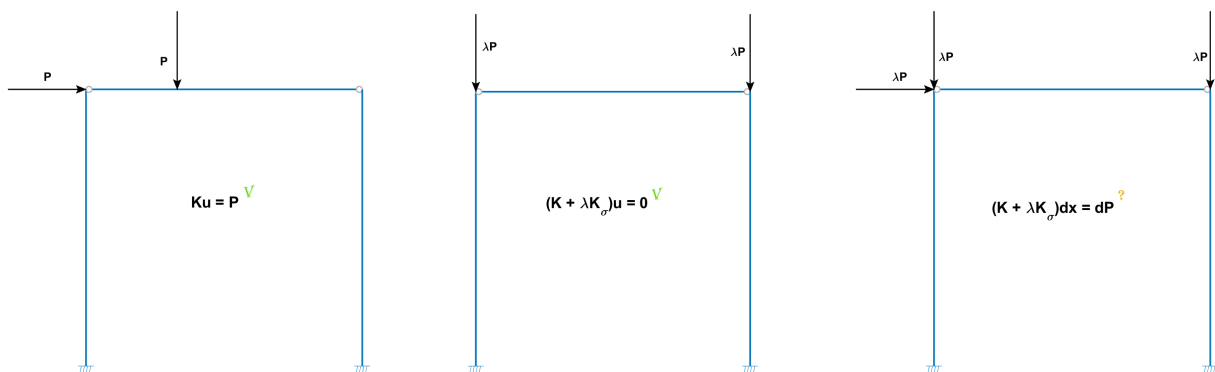
service.

## 9.2 Perspectives

Les perspectives ouvertes par les développements réalisés dans ce travail sont multiples. Bien que nous ayons introduit toute une série de théories et de méthodes visant à faciliter le calcul des structures à nœuds semi-rigides, nous nous sommes contentés d'effleurer ces théories en les testant pour prouver l'efficacité de leur fonctionnement. Il serait donc intéressant d'étendre la gamme de ces tests afin d'étudier l'évolution du multiplicateur critique de ces structures en fonction de la rigidité des assemblages sur des formes de bâtiments variées.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'expérience et l'intuition de l'ingénieur sont deux facteurs importants pour l'application de la méthode simplifiée en faisant une hypothèse sur la forme du mode critique de la structure. Par conséquent, des séries de tests supplémentaires sur différentes formes de bâtiments pourraient conduire à la rédaction d'un *memento* indiquant quelle hypothèse serait appropriée en fonction du bâtiment étudié.

De plus, tous nos développements reposent sur la résolution du problème aux valeurs propres qui exprime l'équilibre global d'une structure (3.22) à l'aide de la méthode des perturbations. Cette équation homogène permet de faire l'analyse critique des structures sous les hypothèses que les matériaux sont homogènes, isotropes et qu'il n'y a pas d'imperfections géométriques dans la structure (comportement rigide-critique). Une approche similaire a été appliquée à la résolution de l'équation régissant l'équilibre statique d'une structure  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}$ , permettant ainsi l'analyse élastique linéaire d'un modèle à assemblages semi-rigides (comportement élastique-linéaire) ([5]). Pour compléter ces recherches, il serait pertinent d'effectuer le même type de développement en étudiant la résolution de l'équation  $(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{K}_\sigma)\mathbf{dx} = \mathbf{dP}$ , qui présente la même forme que la relation (3.22), mais qui prend en compte les imperfections ainsi que les non linéarités géométriques des structures qui sont inévitables en pratique (comportement réel non linéaire). Faire ce dernier développement permettrait de boucler la boucle et de pouvoir étudier le comportement réel en prenant en compte tous les aspects qu'il est d'usage de considérer dans les analyses de structure les plus poussées ([7]).



En outre, des études plus approfondies devraient être menées concernant la proposition d'un nouveau critère de classification des assemblages en fonction de leur rigidité, basé



sur l'impact de cette rigidité sur la stabilité globale du bâtiment. En effet, nous avons démontré que, dans plusieurs des cas d'étude considérés, il était possible de considérablement réduire la rigidité de l'assemblage, en dessous des limites de rigidité recommandées par les normes actuelles, tout en maintenant une bonne stabilité de la structure. Le développement de ce nouveau critère de classification permettrait, dans de nombreux cas, de réaliser des économies substantielles d'acier, de faciliter la mise en œuvre et donc de gagner un temps considérable lors de la construction d'un bâtiment.

En dernier lieu, il convient de souligner que les théories développées dans ce travail constituent une avancée supplémentaire vers une utilisation plus répandue des assemblages semi-rigides dans le domaine de la construction. Trop souvent, la difficulté et la durée de calcul associées à ces assemblages constituent un frein à leur adoption. Nous espérons donc que les différentes pistes que nous avons explorées ici contribueront à démystifier cette catégorie de nœuds, qui peut souvent offrir une stabilité suffisante pour de nombreuses structures.

## Bibliographie

- [1] V DENOËL. “Analyse des structures II”. Cours donné aux étudiants en première année du Master en ingénieur civil des constructions à l’Université de Liège. (2017).
- [2] V DENOËL. “Développement de la théorie de la stabilité de structures à noeuds presque rigides”. Notes manuscrites partagée. (2022).
- [3] L DUCHENE. “Méthodes numériques en Génie Civil et Géologique – Introduction à la méthode des éléments fini”. (2018).
- [4] M GEUZAINÉ. “Nouvelle approche pour la classification par rigidité des assemblages poutre-colonne en construction métallique”. Travail de fin d’étude réalisé à l’Université de Liège. (2018).
- [5] Margaux GEUZAINÉ, J-P JASPART, J-F DEMONCEAU et Vincent DENOËL. “Influence of a small flexibility of connections on the elastic structural response of frames”. T. 148. 5. American Society of Civil Engineers, (2022), p. 04022033.
- [6] E.J HINCH. “Perturbation methods”. (1991).
- [7] J-P JASPART. “Idéalisation, classification, analyse et dimensionnement des structures de bâtiments en acier ; Concepts généraux”. Partie métallique du cours de construction mixte donné aux étudiants en première année du Master ingénieur civil des constructions à l’Université de Liège. (2021).
- [8] British STANDARD. “Eurocode 3—Design of steel structures—”. T. 1. (2006), p. 2005.

## Annexe A

Représentation des solutions de chaque réponses pour les tests des chapitres 6 et 8 en négligeant les termes relatifs aux deuxièmes et troisièmes degrés de libertés à chaque nœud

### A.1 Test 2 : Résultats liés à la Figure (6.3)

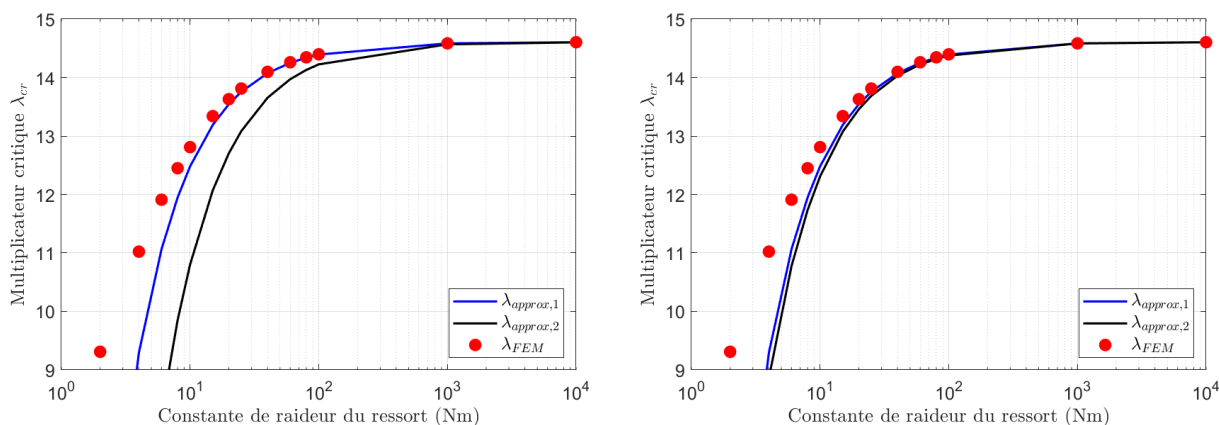


FIGURE A.1 – Comparaison entre la solution sans prendre en compte les 1<sup>er</sup> et 2<sup>eme</sup> DDL (à gauche) et en les prenant en compte (à droite)

### A.2 Test 3 : Résultats liés à la Figure (6.4)

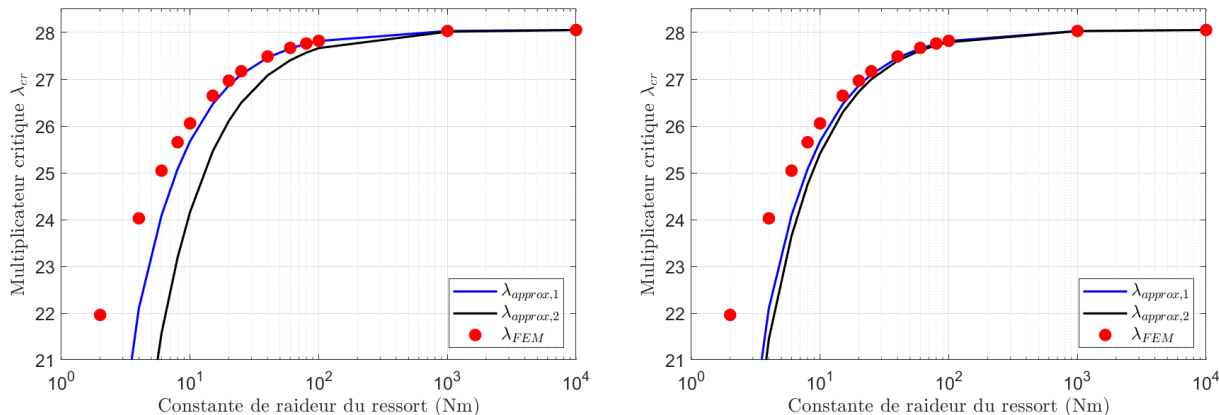


FIGURE A.2 – Comparaison entre la solution sans prendre en compte les 1<sup>er</sup> et 2<sup>eme</sup> DDL (à gauche) et en les prenant en compte (à droite)

### A.3 Test 4 : Résultats liés à la Figure (6.7)

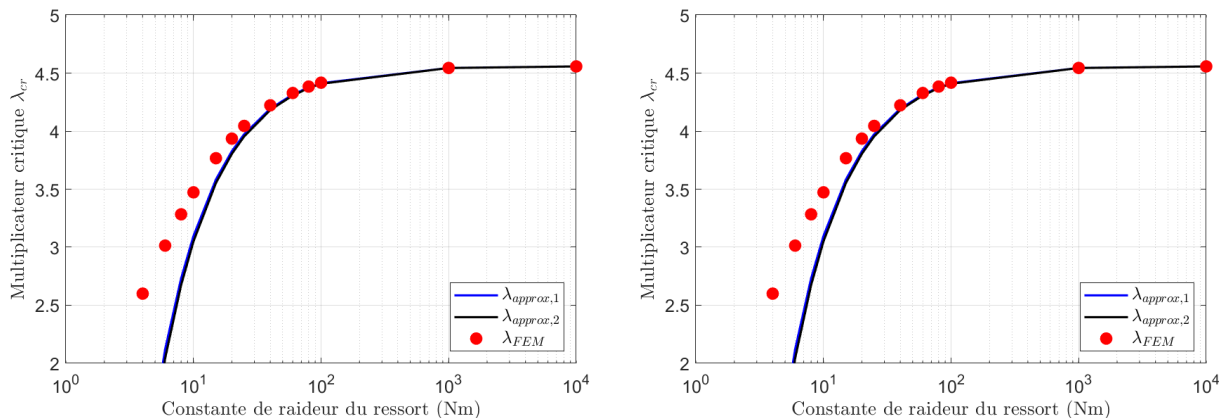


FIGURE A.3 – Comparaison entre la solution sans prendre en compte les 1<sup>er</sup> et 2<sup>eme</sup> DDL (à gauche) et en les prenant en compte (à droite)

## A.4 Test 5 : Résultats liés à la Figure (6.9)

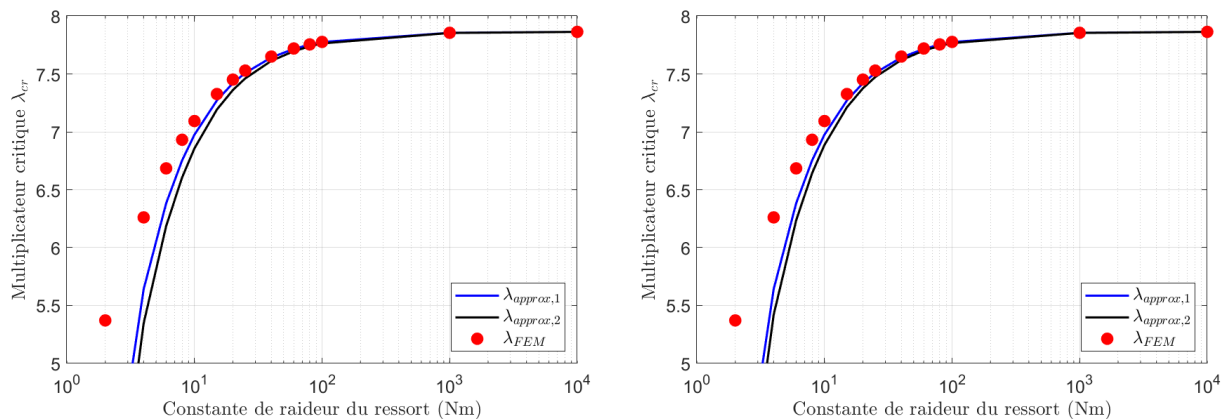


FIGURE A.4 – Comparaison entre la solution sans prendre en compte les 1<sup>er</sup> et 2<sup>eme</sup> DDL (à gauche) et en les prenant en compte (à droite)

## Annexe B

### Représentation de l'évolution du rapport $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$ pour les tests des chapitres 6 et 8

#### B.1 Test 1 : Résultat lié à la Figure (6.1)

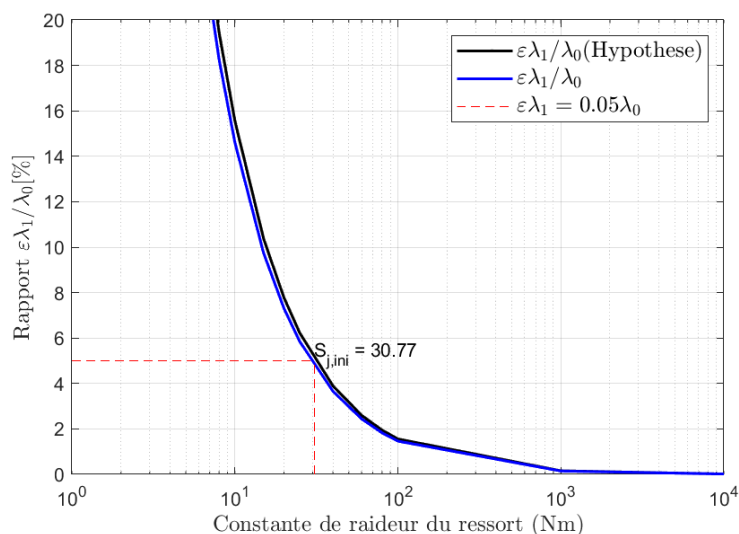


FIGURE B.1 – Représentation de l'évolution du rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  pour le test 1

## B.2 Test 2 : Résultat lié à la Figure (6.3)

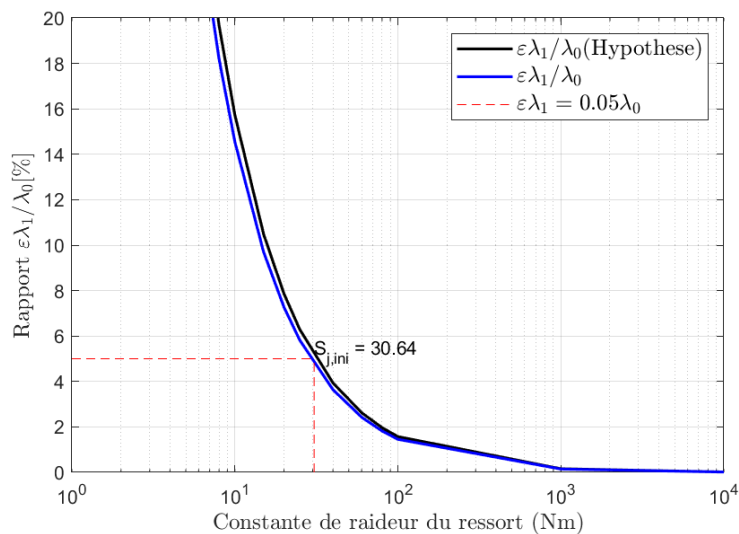


FIGURE B.2 – Représentation de l'évolution du rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  pour le test 2

## B.3 Test 3 : Résultat lié à la Figure (6.4)

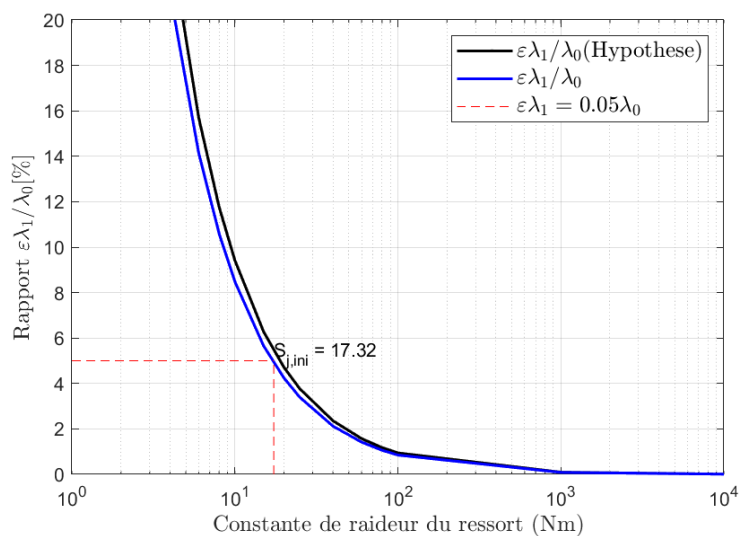


FIGURE B.3 – Représentation de l'évolution du rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  pour le test 3

## B.4 Test 4 : Résultat lié à la Figure (6.7)

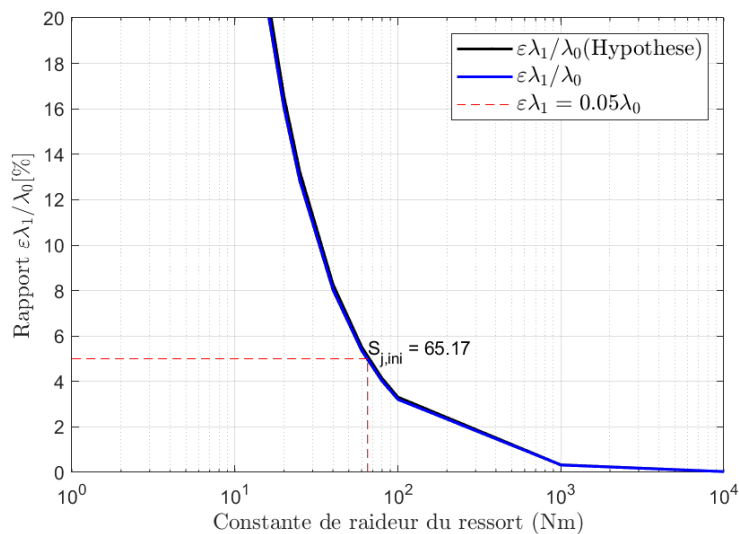


FIGURE B.4 – Représentation de l'évolution du rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  pour le test 4

## B.5 Test 5 : Résultat lié à la Figure (6.9)

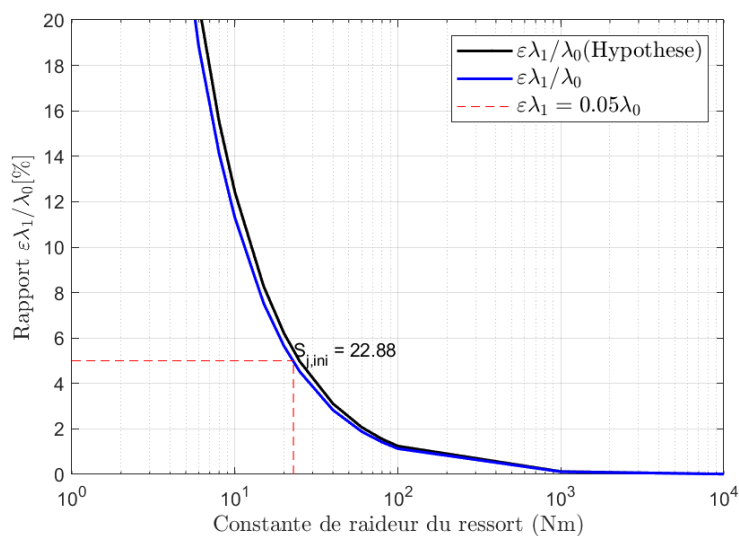


FIGURE B.5 – Représentation de l'évolution du rapport  $\frac{\varepsilon\lambda_1}{\lambda_0}$  pour le test 5



## Annexe C

### Illustration des cas de charges statiques équivalentes $P_1$ et $P_\sigma$ sur les différents modèles étudiés

#### C.1 Test 1 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.5)

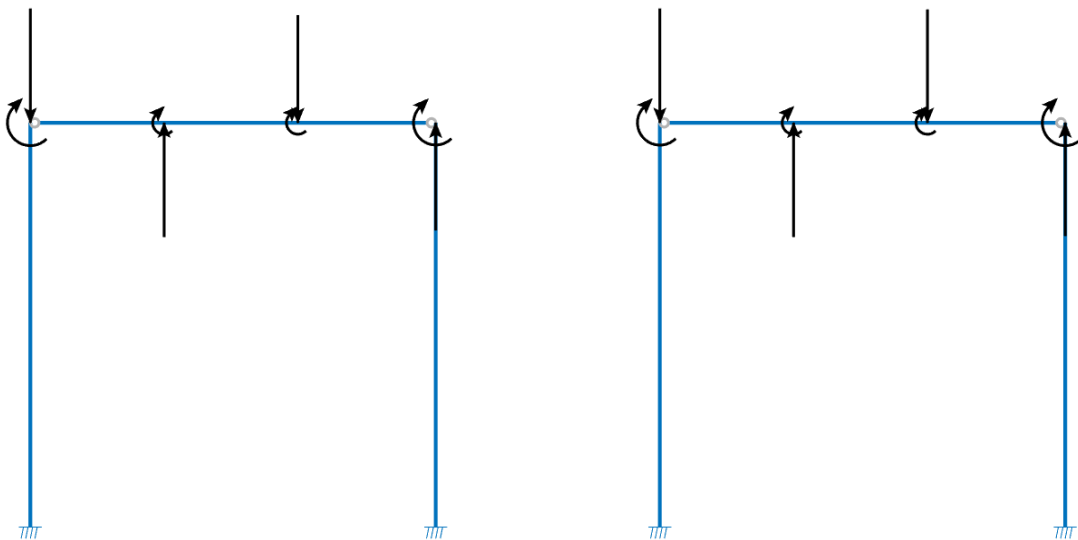


FIGURE C.1 – Illustration des charges statiques équivalentes  $P_1$  à gauche et  $P_\sigma$  à droite

## C.2 Test 2 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.6)

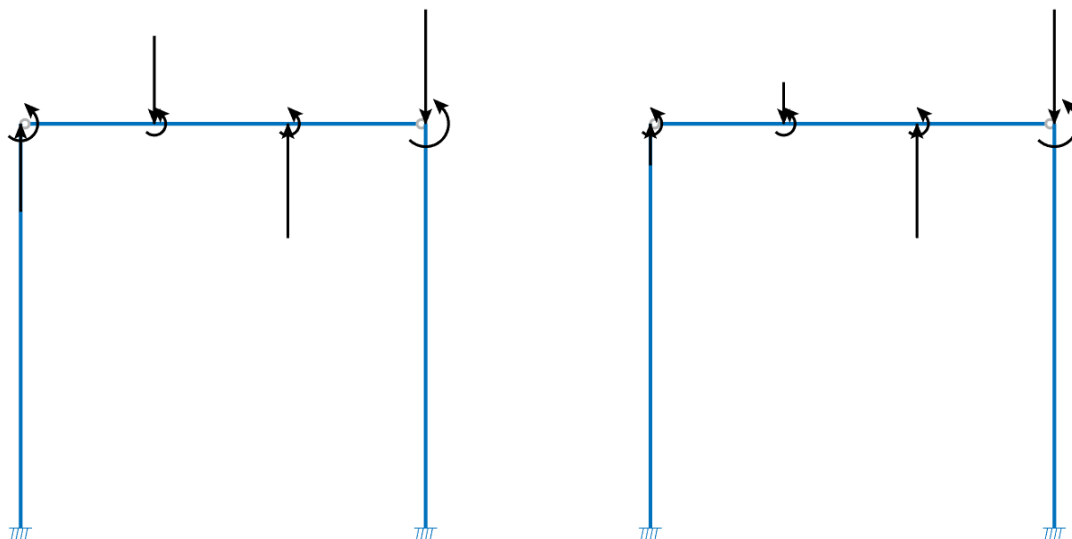


FIGURE C.2 – Illustration des charges statiques équivalentes  $P_1$  à gauche et  $P_\sigma$  à droite

## C.3 Test 3 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.7)

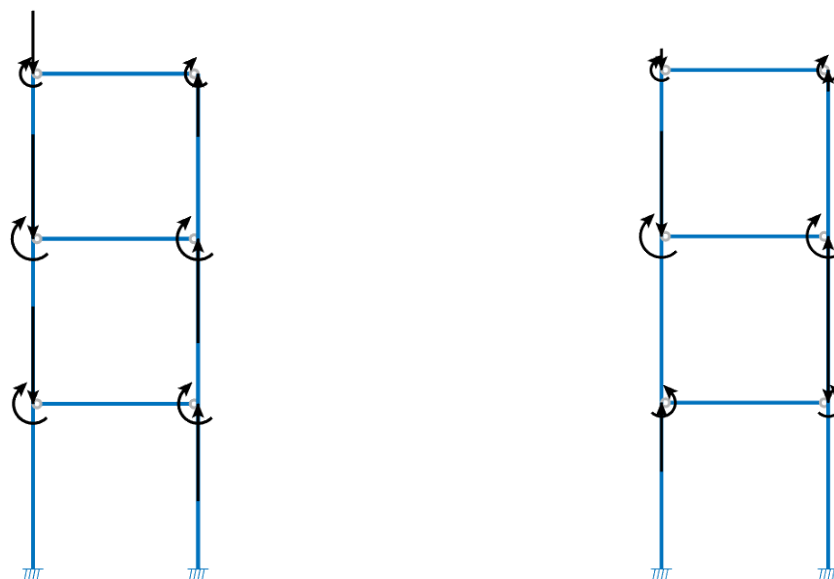


FIGURE C.3 – Illustration des charges statiques équivalentes  $P_1$  à gauche et  $P_\sigma$  à droite

### C.4 Test 4 : Résultat lié au modèle de la Figure (4.8)

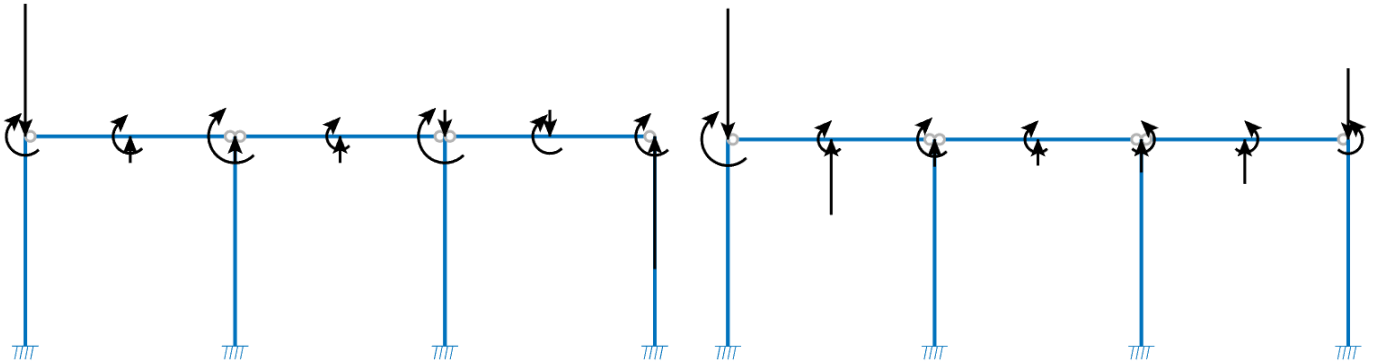


FIGURE C.4 – Illustration des charges statiques équivalentes  $P_1$  à gauche et  $P_\sigma$  à droite

### C.5 Test 5 : Résultat lié au modèle de la Figure (8.6)

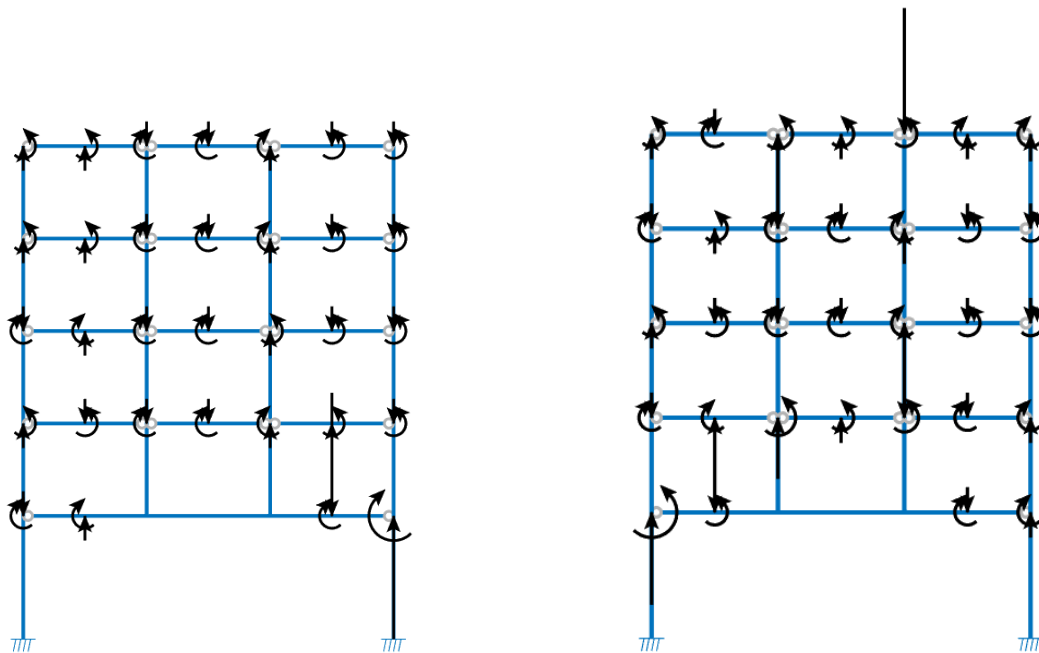


FIGURE C.5 – Illustration des charges statiques équivalentes  $P_1$  à gauche et  $P_\sigma$  à droite