
Travail de fin d'études et stage[BR]- Travail de fin d'études : Amélioration et certification d'un modèle numérique de poids lourd de 16 tonnes selon la norme EN 16303[BR]- Stage d'insertion professionnelle : GD Tech

Auteur : Gerday, Maxime

Promoteur(s) : Duysinx, Pierre

Faculté : Faculté des Sciences appliquées

Diplôme : Master : ingénieur civil mécanicien, à finalité spécialisée en mécatronique

Année académique : 2022-2023

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/17861>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



Amélioration et certification d'un modèle numérique de poids lourd de 16 tonnes selon la norme EN 16303

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de master "Ingénieur Civil Mécanicien, à finalité spécialisée en mécatronique" par **Maxime GERDAY**

CONFIDENTIEL

Promoteur académique : PIERRE DUYSINX

Promoteur industriel : JEFFREY HIMPE

Membres du jury : LUDOVIC NOELS, LAURENT DUCHENE et MARC NELIS

Université de Liège

Faculté des Sciences Appliquées

Année académique 2022-2023

Table des matières

1	Méthode des éléments finis	1
	Bibliographie	9

Table des figures

1.1	Illustration des différents concepts utilisés dans la méthode des éléments finis pour un domaine 2D	1
1.2	Modélisation d'un système continu	3
1.3	Représentation des déplacements virtuels	5
1.4	Elément de barre linéaire - Modélisation et fonctions de formes	6
1.5	Représentation des éléments de référence et physique	7
1.6	Illustration de modes de Hourglass pour des éléments quadrilatères de types Q4 et Q9	8

Chapitre 1

Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (FEM) est l'un des piliers des modèles numériques, et ce chapitre en propose un aperçu général aux lecteurs. Cette approche repose sur la discrétisation géométrique des structures et systèmes étudiés, qui sont approximés par des formes simples appelées *éléments*. Ces éléments peuvent être des lignes en 1D, des triangles ou des quadrilatères en 2D, et des tétraèdres ou des hexaèdres en 3D, par exemple. Les sommets de ces éléments sont appelés *noeuds*, et l'ensemble des éléments constitue le *maillage*. Ces concepts sont illustrés à la Figure 1.1, qui montre également qu'une augmentation du nombre d'éléments améliore l'approximation géométrique dans les cas où le domaine possède une frontière courbe. [1–3]

La discrétisation géométrique permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système, tout en fournissant une représentation et une quantification des différents champs subis par ce système, tels que les champs de contraintes et de déformations. Un autre avantage est que l'analyse peut être effectuée individuellement pour chaque élément, puis les résultats peuvent être regroupés pour obtenir le comportement de la structure entière. Cependant, si le nombre d'éléments utilisé est trop important, cet avantage est perdu, ce qui signifie qu'un compromis doit être fait. [1–3]

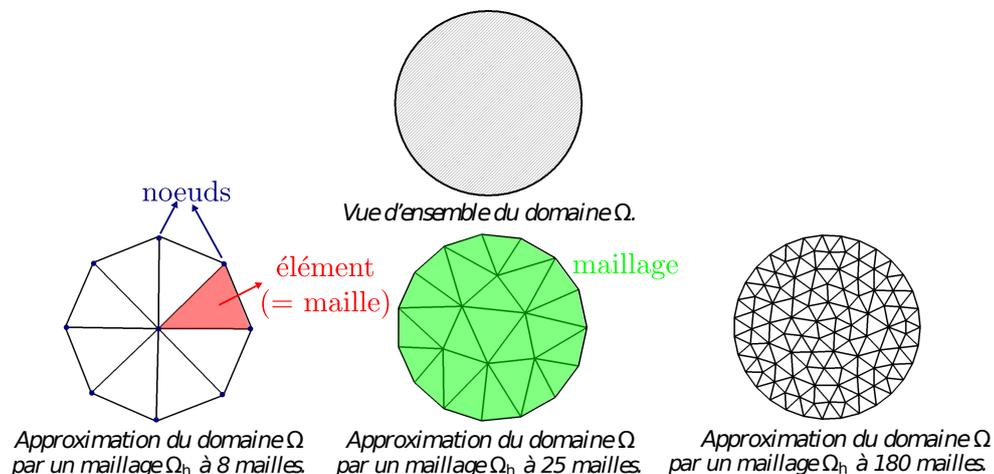


Figure 1.1 : Illustration des différents concepts utilisés dans la méthode des éléments finis pour un domaine 2D [4]

En général, tout système mécanique continu peut être décrit par un ensemble d'équations, exprimées ci-dessous sous forme indicielle. [3, 5–7]

- Le *bilan de quantité de mouvement* est décrit par les équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \bar{b}_i = \rho \ddot{x}_i \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}(t), \quad (1.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes associé à un point matériel, ayant une masse volumique ρ , repéré par le vecteur position \mathbf{x} au sein du volume de contrôle $\mathbb{V}(t)$ et subissant une accélération $\ddot{\mathbf{x}}$ pouvant être en autre causée par la présence de forces de volume $\bar{\mathbf{b}}$ (e.g. la gravité) ou de tractions de surface.

- Les *conditions aux limites statiques* sont définies par l'équation suivante, qui établit une égalité entre la projection du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sur la normale extérieure unitaire \mathbf{n} à la surface $\mathbb{S}_\sigma(t)$ et le vecteur de traction de surface $\bar{\mathbf{t}}$, pour tout point dont la position \mathbf{x} appartient à la partie $\mathbb{S}_\sigma(t)$ de la surface totale $\mathbb{S}(t)$ du volume de contrôle au temps t :

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}_\sigma(t). \quad (1.2)$$

- Les *conditions limites cinématiques* sont définies par l'équation qui suit, qui établit une égalité entre le champ de déplacement \mathbf{u} et les déplacements imposés $\bar{\mathbf{u}}$, pour tout point repéré par le vecteur position \mathbf{x} inclus dans la surface $\mathbb{S}_u(t)$ constituant une partie de la surface totale $\mathbb{S}(t)$:

$$u_i(x) = \bar{u}_i(x) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}_u(t). \quad (1.3)$$

- Dans le cadre de modèles constitutifs hypoélastiques, les lois constitutives sont définies par l'équation suivante, qui exprime le lien entre une dérivée objective du tenseur des contraintes $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ et du taux de déformation \mathbf{D} par l'intermédiaire d'un tenseur \mathbb{M} d'ordre 4, pour tout élément de volume repéré par le vecteur position \mathbf{x} compris dans le volume de contrôle $\mathbb{V}(t)$:

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \mathbb{M}_{ijkl} D_{kl} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}(t), \quad (1.4)$$

Les paramètres surmontés d'une barre horizontale représentent des grandeurs imposées. Les lois constitutives décrites par l'Equation (1.4) permettent de décrire le comportement d'un matériau élasto-(visco)plastique et sont valides pour des grandes déformations. [6, 7] Ces différents concepts ainsi que les conventions utilisées sont représentés à la Figure 1.2.

Cet ensemble de 9 équations (EDP + CL) à 9 inconnues ($\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}$) représente ce qui est appelé la forme forte ("*strong form*" en anglais) ou encore la forme locale, décrivant l'état de chaque point du volume de contrôle en tout temps. Ces équations peuvent être résolues entièrement pour seulement des cas spécifiques où la géométrie du système reste simpliste. [1–3, 5–7]

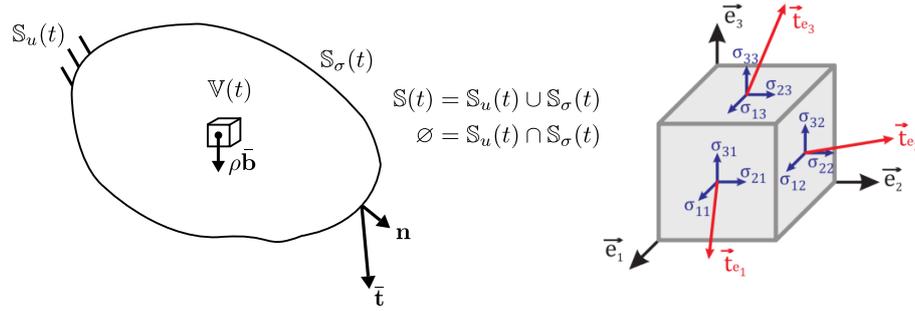


Figure 1.2 : Modélisation d'un système continu [3, 5–7]

Lorsque l'on s'intéresse à des systèmes présentant des géométries plus complexes, il devient nécessaire de recourir à des méthodes d'approximation. Il en existe deux types principaux : les *méthodes par différences finies* et les *méthodes par éléments finis*. [3]

Les *méthodes par différences finies* ont pour objectif de discrétiser la forme forte en approximant les dérivées présentes dans les EDP par des équations aux différences finies. Cependant, ces méthodes sont limitées aux géométries régulières et ne seront donc pas développées davantage dans cette section. [3]

Les *méthodes par éléments finis*, quant à elles, permettent d'approximer les champs de déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et/ou de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ en utilisant des expressions simples, généralement polynomiales. Elles remplacent ainsi les EDP par une forme intégrale, ce qui permet de traiter des géométries complexes. [1–3]

Les méthodes par éléments finis peuvent également être classées en plusieurs catégories, telles que les *méthodes d'approximation basées sur la forme globale* et les *méthodes d'approximation basées sur une forme faible* ("weak form" en anglais). Les méthodes d'approximation basées sur la forme globale consistent à intégrer les EDP sur l'ensemble du domaine d'étude. [3] Par exemple, la *méthode aux résidus pondérés* introduit le concept de résidu $\mathbb{R}(\mathbf{x})$, décrit par :

$$\mathbb{R}(\mathbf{x}) \equiv \mathbb{L}(\mathbf{u}_{\text{essai}}(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}(t), \quad (1.5)$$

où $\mathbb{L}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ est un opérateur différentiel, soit, dans le cas présent, $\mathbb{L}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \text{EDP}$, et $\mathbf{u}_{\text{essai}}(\mathbf{x})$ représente une approximation du champ de déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. L'idéal serait de déterminer le champ $\mathbf{u}_{\text{essai}}(\mathbf{x})$ tel que $\mathbb{R}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}(t)$ ce qui, en général, est difficilement faisable puisque cela reviendrait à établir la solution analytique exacte. [3]

Dès lors, la méthode des résidus pondérés propose de sélectionner le champ $\mathbf{u}_{\text{essai}}(\mathbf{x})$ telle qu'une norme dite "appropriée" du résidu soit minimisée :

$$\|\mathbb{R}(\mathbf{x})\| = \int_{\mathbb{V}(t)} \mathbb{R}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) dV, \quad (1.6)$$

où $\omega(\mathbf{x})$ représente une sorte de "poids", nommé "fonction d'essai". [3]

Il existe plusieurs façons de définir cette fonction d'essai :

1. $\omega(\mathbf{x}) = \mathbb{R}(\mathbf{x})$, ce qui correspond à la *méthode des moindres carrés*;
2. forcer $\mathbb{R}(\mathbf{x}) = 0$ uniquement en certains points discrets du domaine, ce qui correspond à la méthode de collocation;
3. $\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\text{essai}}(\mathbf{x})$, ce qui correspond à la *méthode de Galerkin*.

La méthode de Galerkin est celle qui est généralement employée. Cependant, cette méthode requiert que la solution approchée soit suffisamment régulière ce qui n'est pas toujours possible. [3]

Afin de résoudre des problèmes avec des cas présentant des discontinuités et/ou des irrégularités dans les différents champs approximés, des formes dites "*faibles*" sont introduites. Ces formes réduisent les exigences sur la régularité de la solution approchée. Les Equations (1.3) et (1.4) sont souvent supposées satisfaites, ce qui réduit les inconnues aux seuls déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ [3].

L'une de ces formes faibles est la méthode du *principe des travaux virtuels*. Supposant que les Equations (1.3) et (1.4) sont satisfaites, cette méthode consiste à intégrer les Equations (1.1) et (1.2), non satisfaites, sous leur forme locale pour le système dans sa forme courante, *i.e.* au temps t , en utilisant le concept de déplacements virtuels¹ $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, comme illustré dans la Figure 1.3. Il est important de noter que ces déplacements virtuels doivent être cinématiquement admissibles, *i.e.* continus et doivent s'annuler sur la surface $\mathbb{S}_u(t)$. [3, 5, 6] La forme globale (non faible) suivante synthétise les propos précédents :

$$\int_{\mathbb{V}(t)} \delta u_i \underbrace{\left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho(\bar{b}_i - \ddot{x}_i) \right]}_{\text{EDP} = 0} d\mathbb{V} - \int_{\mathbb{S}(t)} \delta u_i \underbrace{[\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i]}_{\text{CL} = 0} d\mathbb{S} = 0. \quad (1.7)$$

En intégrant par parties le terme $\delta u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ de l'Equation (1.7) la forme faible peut être obtenue. Après quelques simplifications, cette forme peut être exprimée sous deux versions : la version complète de l'équation suivante

$$\underbrace{\int_{\mathbb{V}(t)} \rho \delta u_i \ddot{x}_i d\mathbb{V}}_{\delta \mathcal{M}} + \underbrace{\int_{\mathbb{V}(t)} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} d\mathbb{V}}_{\delta \mathcal{W}_{\text{int}}} = \underbrace{\int_{\mathbb{V}(t)} \rho \delta u_i \bar{b}_i d\mathbb{V}}_{\delta \mathcal{W}_{\text{ext}}} + \underbrace{\int_{\mathbb{S}_\sigma(t)} \delta u_i \bar{t}_i d\mathbb{S}}_{\delta \mathcal{W}_{\text{ext}}}, \quad (1.8)$$

qui représente le principe des travaux virtuels et est valable en plasticité, lors de grandes déformations et qui tient compte de la dynamique du système, et la version compacte de

1. Les déplacements virtuels correspondent à un outil mathématique, symbolisant des variations infinitésimales hypothétiques de la position d'un système mécanique dans l'espace. Ces déplacements virtuels sont arbitraires.

l'équation qui suit

$$\delta \mathcal{M} + \delta \mathcal{W}_{\text{int}} = \delta \mathcal{W}_{\text{ext}}. \quad (1.9)$$

Dans l'Equation (1.9), $\delta \mathcal{M}$ représente le travail virtuel effectué par les forces d'inertie, tandis que $\delta \mathcal{W}_{\text{int}}$ représente le travail virtuel effectué par les forces internes. Enfin, le terme $\delta \mathcal{W}_{\text{ext}}$ représente le travail virtuel effectué par les forces extérieures appliquées. Ce terme est composé de deux parties : $\int_{\mathbb{V}(t)} \rho \delta u_i \bar{b}_i d\mathbb{V}$, qui correspond à la contribution des forces volumiques, et $\int_{\mathbb{S}_\sigma(t)} \delta u_i \bar{t}_i d\mathbb{S}$, qui correspond à la contribution des forces de surface. Il est important de noter que les Equations (1.8) et (1.9) sont valables pour tout matériau, que ce soit solide, liquide ou gazeux. [3, 6].

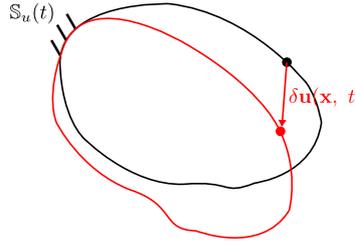


Figure 1.3 : Déplacements virtuels $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ [3]

Dans le cas élastique, voire hyperélastique, la méthode des éléments finis repose sur deux principes pour garantir que les techniques d'approximations convergent vers la solution exacte. Ces deux principes sont le *principe variationnel des déplacements* et le *principe de l'énergie potentielle minimale*, découlant du premier. [3]

Dans le cas quasi-statique notamment, le *principe variationnel des déplacements*, qui stipule que l'énergie potentielle totale $\mathcal{U} - \mathcal{P}$ (TPE pour "Total Potential Energy" en anglais) demeure stationnaire à l'équilibre, peut être exprimé mathématiquement par :

$$\delta \mathcal{W}_{\text{int}} - \delta \mathcal{W}_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{U}(\mathbf{u}) - \delta \mathcal{P}(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \delta (\mathcal{U}(\mathbf{u}) - \mathcal{P}(\mathbf{u})) = 0, \quad (1.10)$$

Dans cette équation, le champ de déplacement \mathbf{u} est le seul champ indépendant, et \mathcal{U} représente l'énergie interne de déformation tandis que \mathcal{P} représente le travail réalisé par les forces extérieures. [1, 3]

Le *principe de l'énergie potentielle minimale*, quant à lui, stipule que la TPE atteint un minimum à l'équilibre, ou encore que le champ de déplacement engendrant une TPE minimale par rapport à toutes les variations cinématiquement admissibles $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ n'est rien d'autre que la solution exacte $\mathbf{u}^{\text{exact}}(\mathbf{x})$. Ce principe est défini par l'équation suivante, dans laquelle il est supposé qu'à la fois \mathbf{u} et $\delta \mathbf{u}$ sont cinématiquement admissibles [1, 3] :

$$\delta TPE = \frac{\partial (\mathcal{U} - \mathcal{P})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial (\mathcal{U} - \mathcal{P})}{\partial \mathbf{u}} = 0 \Leftrightarrow \min_{\mathbf{u}} (\mathcal{U} - \mathcal{P}), \quad (1.11)$$

Compte tenu de la difficulté à minimiser la TPE par rapport à toutes les variations $\delta \mathbf{u}$, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'approximations. De plus, en éléments finis, le domaine d'étude est spatialement discrétisé, ce qui signifie que les valeurs du champ de déplacements ne sont connues qu'avec exactitude en certains points, appelés noeuds. Pour connaître ces valeurs dans tout l'élément, il est essentiel d'introduire le concept de "*fonctions de formes*" N (ou "*shape functions*" en anglais). Ces fonctions permettent d'interpoler les différents champs à partir de leurs valeurs aux noeuds, également appelés connecteurs ou degrés de liberté. Toutefois, pour le champ de contrainte, il existe une particularité qui sera expliquée par la suite). L'équation qui suit illustre l'interpolation du champ de déplacement local \mathbf{u} à l'aide de ces fonctions de forme et de ses valeurs aux noeuds :

$$u_i(x, y, z, t) = \sum_{I=1}^n N_I(x, y, z) u_i^I(t) \quad (1.12)$$

où $i \in \{1, 2, 3\}$ représente la direction considérée, u_i le déplacement local selon la direction i , u_i^I le déplacement au noeud I selon cette même direction, N_I la fonction de forme permettant de faire le lien entre ces deux derniers et n le nombre de noeuds dans l'élément discrétisé. Cette équation peut également être écrite sous forme matricielle comme l'illustre l'équation suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q}. \quad (1.13)$$

Le champ de déformation peut, quant à lui être approximé par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (1.14)$$

où \mathbf{B} est la matrice d'interpolation des déformations. [3]

A titre d'exemple, pour le champ de déplacement d'une barre linéaire possédant deux noeuds (cf. Figure 1.4), il est possible de l'interpoler grâce à :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2, \quad (1.15)$$

où u_1 et u_2 sont les déplacements axiaux au niveau des 2 noeuds et L la longueur de la barre. [3]

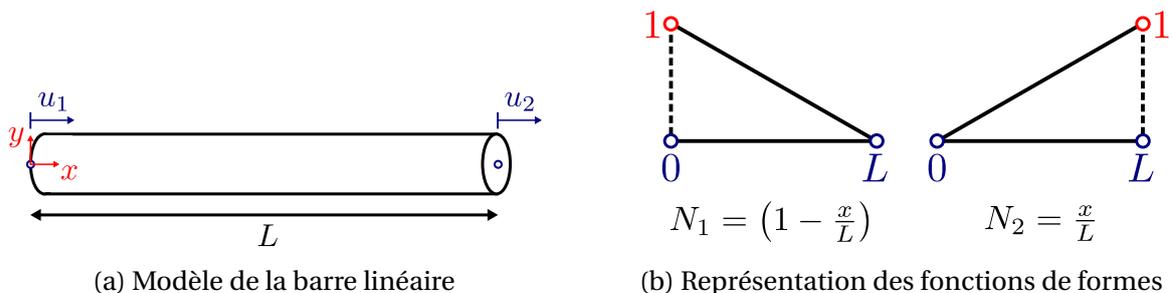


Figure 1.4 : Élément de barre linéaire [3]

Généralement, les fonctions de formes sont définies en termes de coordonnées naturelles ξ, η, ζ , qui varient dans l'intervalle $[-1; 1]$, plutôt qu'en termes de coordonnées classiques x, y, z (cf. Figure 1.5). Cette approche permet aux fonctions de formes de se soustraire de la dépendance envers la géométrie des éléments, ce qui leur donne une allure plus générale et simplifie l'analyse mathématique. Pour lier l'élément de référence, défini à l'aide des coordonnées naturelles, à l'élément physique, défini par les coordonnées classiques, il est possible d'utiliser un changement de variables. Les éléments pour lesquels les fonctions de formes sont identiques tant au niveau géométrique qu'au niveau des champs portent le nom d'*éléments isoparamétriques*. [3]

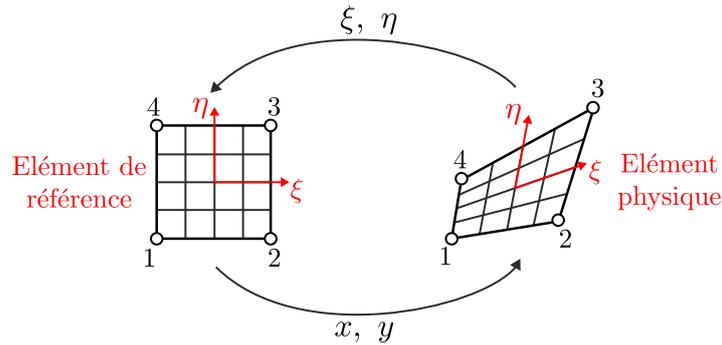


Figure 1.5 : Représentation des éléments de référence et physique

Après avoir défini les concepts nécessaires, il est possible d'obtenir une version semi-discrétisée du bilan de la quantité de mouvement, initialement défini par l'Equation (1.1), en ayant recours au principe des travaux virtuels défini par l'Equation (1.8). [3, 6] Cette version est illustrée par :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{F}^{\text{int}}(t) - \mathbf{F}^{\text{ext}}(t) = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

Dans cette équation, \mathbf{M} est la matrice de masse consistante qui est définie par :

$$\mathbf{M} = \int_{\mathbb{V}(t)} \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\mathbb{V} = \int_{\mathbb{V}_0} \rho_0 [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\mathbb{V}_0, \quad (1.17)$$

où l'indice "0" fait référence à la configuration initiale et \mathbf{N} à la matrice des fonctions de forme. [6]

Le terme \mathbf{F}^{int} correspond au vecteur des forces internes agissant aux nœuds dont l'expression est donnée par :

$$\mathbf{F}^{\text{int}} = \int_{\mathbb{V}(t)} [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} d\mathbb{V}, \quad (1.18)$$

où les accolades symbolisent la notation de Voigt. [6]

Le dernier terme \mathbf{F}^{ext} définit, quant à lui, le vecteur des forces externes agissant aux nœuds dont l'expression est donnée par [6] :

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \int_{\mathbb{V}(t)} \rho [\mathbf{N}]^T \{\bar{b}\} d\mathbb{V} + \int_{\mathbb{S}_\sigma(t)} [\mathbf{N}]^T \{\bar{t}\} d\mathbb{S}. \quad (1.19)$$

Il est à noter que dans le cas particulier de déplacements faibles et d'un matériau linéaire élastique, l'Equation (1.18) définissant le vecteur des forces internes peut être simplifiée en l'équation suivante :

$$\mathbf{F}^{\text{int}} = \underbrace{\int_{\mathbb{V}_0} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] d\mathbb{V}_0}_{\mathbf{K}} \{\mathbf{q}\}, \quad (1.20)$$

où \mathbf{K} est une matrice de raideur constante. [3, 6]

Les intégrales apparaissant dans les Equations (1.16), (1.18) et (1.19) doivent être approximée numériquement. En général, la méthode d'intégration de Gauss est employée. Succinctement, cette règle définit des points, appelés *points de Gauss* (GP), au sein de l'élément où la fonction à intégrer est évaluée. Ensuite, l'approximation de l'intégrale est réalisée en sommant ces valeurs sur ce domaine. [3]

Le nombre de points de Gauss requis pour réaliser une intégration exacte varie en fonction du type d'élément utilisé (e.g. en 2D : triangles, carrés, etc.). En outre, le coût en temps de calcul dépend directement de ce nombre de points. [3]

Une méthode dite d'intégration réduite est alors employée. Comme son nom l'indique, le nombre de points de Gauss requis est diminué, ce qui permet de gagner en temps de calculs. Cependant, il est nécessaire de garder un regard critique par rapport à cette méthode, car elle peut parfois conduire à l'apparition de comportements anormaux tels que les *modes de Hourglass*. [3]

Les modes de Hourglass correspondent à des singularités qui résultent d'une déficience au niveau du rang de la matrice de raideur \mathbf{K} . Concrètement, ces modes se manifestent par la présence de déformations qui entraînent une énergie de déformation nulle. Ceci est dû au fait qu'aucune déformation de ce type n'est vue par le point de Gauss, contrairement au reste du domaine de l'élément, comme illustré à la Figure 1.6 pour différentes sortes d'éléments. [3]

Il est donc important de tenir compte de cela lors de l'analyse des résultats de simulations de modèles numériques. Il est également à noter que les contraintes sont calculées en ces points de Gauss et sont souvent moyennées pour obtenir un champ continu. [3]

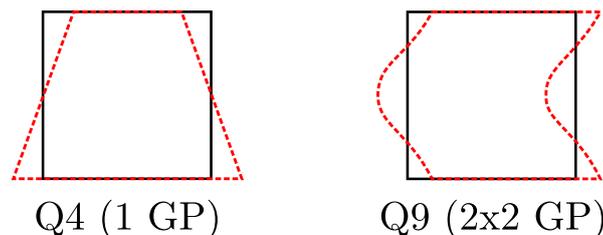


Figure 1.6 : Illustration de modes de Hourglass pour des éléments quadrilatères de types Q4 et Q9 [3]

Bibliographie

- [1] The Efficient Engineer. Understanding the Finite Element Method. <https://www.youtube.com/watch?v=GHjopp47vvQ>.
- [2] The Efficient Engineer. Understanding the Finite Element Method (article version). <https://efficientengineer.com/finite-element-method/>.
- [3] Jean-Philippe Ponthot. Finite Element Method. -, 2020-2021.
- [4] Alexandre Bérard. *Transferts de champs entre maillages de type éléments finis et applications numériques en mécanique non linéaire des structures*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2011.
- [5] Jean-Philippe Ponthot. Advanced Solid Mechanics. -, 2021-2022.
- [6] Jean-Philippe Ponthot. Large Deformation of Solids. -, 2022-2023.
- [7] Jean-Philippe Ponthot. Continuum Mechanics. -, 2022-2023.