

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

Université
de Liège



**Stabilité et résistance des ossatures de bâtiments
métalliques et mixtes – Vérification combinée
des stabilités locale et globale**

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de master
Ingénieur Civil des Constructions par Thomas JEHIN

Promoteur : Pr J.P. JASPART

Année académique 2014-2015

Université de Liège

Faculté des Sciences Appliquées

Année académique 2014-2015

Travail de fin d'études présenté par Thomas Jehin en vue de l'obtention du grade d'Ingénieur Civil des Constructions.

Stabilité et résistance des ossatures de bâtiments métalliques et mixtes – Vérification combinée des stabilités locale et globale

Le dimensionnement d'une ossature de bâtiment métallique ou mixte est une procédure dont les deux étapes principales sont l'analyse structurale et la vérification de la stabilité et de la résistance.

L'Eurocode 3 offre aujourd'hui diverses possibilités d'analyse incluant ou non la prise en compte des non-linéarités géométriques (premier ou second ordre, $P-\Delta$ ou $P-\delta$) et matérielles (élasticité, plasticité, élasto-plasticité). La mise en œuvre des vérifications dépend étroitement du type d'analyse choisi par l'ingénieur.

Quelle que soit la structure, le praticien a tendance à privilégier l'analyse élastique linéaire du premier ordre, qui autorise l'utilisation du principe de superposition afin de réduire le nombre d'analyses à effectuer.

Le but de ce mémoire est de présenter et comparer différentes méthodes d'analyse et de vérifications tenant compte des effets du second ordre $P-\Delta$ et $P-\delta$.

Plus précisément, le travail réalisé vise les méthodes d'analyse élastique au second ordre global résultant de l'amplification des résultats d'analyses élastiques au premier ordre d'une structure à nœuds fixes ou à nœuds mobiles. Les vérifications associées couvrent la stabilité locale de membrures et la résistance des sections.

La grande variété des méthodes envisageables « d'analyse/vérifications », dont certaines sont explicitement proposées par l'Eurocode 3 et l'Eurocode 4, est tout d'abord mise en évidence. Chacune d'entre elles est ensuite décrite. Les avantages et les inconvénients ainsi que le degré de précision et les limites d'utilisation sont enfin précisées. Dans la phase de vérification de la stabilité des membrures, l'élément à vérifier doit être isolé de la structure, ce qui représente une difficulté majeure pour l'utilisateur. Une attention particulière est réservée à ce problème dans le travail.

L'ensemble des résultats présentés sont comparés à ceux obtenus grâce à un logiciel aux éléments finis incluant l'ensemble des non-linéarités géométriques et matérielles.

Enfin, le travail se termine par l'énoncé de recommandations pratiques à l'usage de l'ingénieur-calculateur.

Les membres du jury

J-P.Jaspart



J-F.Demonceau



J-M.Franssen



S.Seret

Stabilité et résistance des ossatures de bâtiments métalliques et mixtes-Vérification combinée des stabilités locale et globale

Rédigé par Thomas Jehin, section Ingénieur Civil des Constructions, 2014-2015

Ce mémoire traite des méthodes d'analyse-vérifications de structures sensibles aux effets du second ordre global (P- Δ) ($\lambda_{cr} < 10$) et local (P- δ). Afin de pouvoir utiliser le principe de superposition, qui permet de réduire considérablement le nombre d'analyses à effectuer, nous nous intéressons aux méthodes réalisant une analyse élastique approchée au second ordre. Cette dernière se base sur l'analyse élastique de deux structures dites « sway » (à nœuds mobiles) et « non sway » (à nœuds fixes).

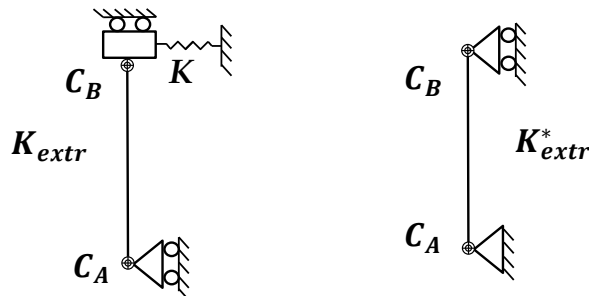
Les résultats de l'analyse élastique approchée au second ordre sont obtenus en recombinaison des résultats des analyses élastiques au premier ordre de la structure « sway » et « non sway ». Lors de la recombinaison des moments d'extrémités (M_{sway} et $M_{nonsway}$), nous multiplions les moments « sway » par des facteurs d'amplification lié au second ordre global ($1/(1-\lambda_{cr})$).

$$M_{extrémité}^{P-\Delta} = M_{nonsway} + \frac{1}{1-\lambda_{cr}} M_{sway}$$

Pour certaines méthodes, nous utilisons en plus des coefficients d'amplification lié au second ordre local (K_{extr}^* et K_{extr}) afin de déterminer les moments au second ordre global et local :

$$M_{extrémité}^{P-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{nonsway} + K_{extr} \frac{1}{1-\lambda_{cr}} M_{sway}$$

Notre recherche s'est centrée sur le développement des formules analytiques ainsi que sur les systèmes d'équations à résoudre pour déterminer ces K_{extr}^* et K_{extr} . Pour les calculer, nous avons dû tout d'abord isoler la barre de la structure en créant des modèles équivalents de barre à nœuds fixes (K_{extr}^*) et à nœuds déplaçables (K_{extr}) pour ensuite déterminer la raideur des restreintes (C) et du ressort (K).



L'étude de ces méthodes a porté sur l'ensemble du processus d'analyse et vérifications (stabilité de barre en travée et résistance des sections d'extrémités) par le calcul du multiplicateur de ruine de différents portiques à géométrie variable. Ces derniers ont été analysés pour une plage de multiplicateur critique (λ_{cr}) allant de 3 à 10. Le multiplicateur de ruine de ces méthodes a ensuite été comparé au multiplicateur de ruine obtenu avec un logiciel aux éléments finis incluant l'ensemble des non-linéarités géométriques (P- δ et P- Δ) et matérielles (comportement élasto-plastique de l'acier).

La précision des multiplicateurs de ruine obtenus est de à 5-10 % pour les méthodes déterminant le moment au second ordre global ($M_{extrémité}^{P-\Delta}$) et 0 à 5 % pour les méthodes déterminant le moment au second ordre complet ($M_{extrémité}^{P-\Delta-\delta}$).

Nous avons également étudié la méthode de l'Eurocode 3 qui propose de réaliser une analyse élastique au premier ordre avec les vérifications incluant les effets du second ordre par le biais des longueurs de flambement à nœuds mobiles ($L_{fl} > L$). La faiblesse de cette méthode est de vérifier les colonnes comme isolées les unes des autres. En effet, dans le cas où les colonnes d'un portique ne sont pas instables en même temps, nous obtenons des résultats sécuritaires avec une erreur allant de 5 % à 45%.

Stability and stiffness of steel and composite structures

Combined check of local and global stability

Author: Thomas Jehin, building civil engineering ULG, 2014-2015,

This master thesis is related to check analysis methods of frames subject to both global (P- Δ) ($\lambda_{cr} < 10$) and local (P- δ) second order effects. In order to use the principle of superposition, which reduces considerably the number of analyses to perform, we were interested by using approximate second order method of analysis. In fact, those methods are based on two separate elastic analysis related to a sway and non-sway structure.

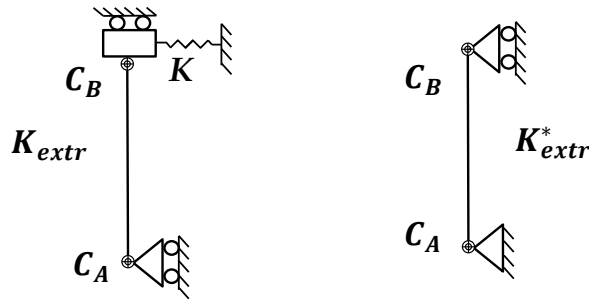
The results of this second order approach analysis are obtained by a combination of the efforts in the sway and non-sway frame. When the combination is made, we multiplied the sway end moments by an amplified factor ($1/(1 - \lambda_{cr})$) taking to account for global second order effect (P- Δ).

$$M_{ends}^{P-\Delta} = M_{nonsway} + \frac{1}{1 - \lambda_{cr}} M_{sway}$$

Moreover, for some methods, we also use amplified factors (K_{extr}^* et K_{extr}) linked to local second order effect (P- δ). Then, we obtain the second order end moments (P- δ et P- Δ).

$$M_{ends}^{P-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{nonsway} + K_{extr} \frac{1}{1 - \lambda_{cr}} M_{sway}$$

A part of our research is focused on the development of analytic formulae or solving equations system to obtain theses amplified factors (K_{extr}^* et K_{extr}). To get these factors, we create two equivalent isolated element models (one for sway frame (K_{extr}) and one for non-sway frame (K_{extr}^*)). The stiffness of the whole structure is represented by a rotational restraints (C) and spring (K)..



The comparison of various methods is based on the complete process of analysis and checks (stability of member at mid-span and stiffness in end sections). The ultimate load factor (λ_u) of frame with variability geometries and for a range of critical load factor (λ_{cr}) between 3 and 10 were obtained by the simplified methods. This ultimate load factor (λ_u) obtained is than compared with a numeric ultimate load factor determined by using a finite element software, including the geometrics (second order effect) and material (elastic-plastic behavior of steel) non linearity.

The accuracy of this ultimate load factor (λ_u) is about 5-10% for method using end moments at elements including global second order ($M_{end}^{II-\Delta}$). and 0- 5 % for methods using the end moments including the full (global and local) second order ($M_{end}^{II-\Delta-\delta}$) effects.

We also study the method of Eurocode 3 which allows to perform an elastic first order analysis and checks members (stability at mid span of member and stiffness end section) with buckling length in a sway mode. ($L_{fl} > L$). The weakness of this method is that we have to check all the columns separately. Indeed, in case of a frame where the columns are not unstable simultaneously, the results are too much safe (an error of 5% to 45 %).

Remerciements :

Tout d'abord, je tiens à remercier mon promoteur Monsieur J.P. Jaspert ainsi que Monsieur J.F. Demonceau pour tout le temps qu'ils m'ont consacré ainsi que les précieux conseils reçus tout au long de la réalisation du travail.

Je remercie également l'ensemble des membres du Jury pour l'intérêt et le temps qu'ils voudront bien consacrer à la lecture à mon mémoire.

Pour finir, je tiens à remercier mes parents pour la relecture de mon mémoire ainsi que leur soutien constant tout au long de ce travail.

Table des matières

Introduction.....	1
--------------------------	----------

Chapitre 1 : Méthodes d'analyse et de vérifications

1	Introduction.....	4
2	Analyse et vérification	4
2.1	Imperfections	5
2.2	Instabilités locale et globale	10
2.3	Non-linéarité du matériau.....	12
2.4	Résumé des méthodes d'analyse et vérification.....	15
3	Conclusion-Méthode d'analyse élastique au second ordre et vérifications associées.....	16

Chapitre 2 : Rappels théoriques

1	Introduction.....	17
2	Méthodes d'analyse exacte.....	17
2.1	Analyse au premier ordre élastique	17
2.2	Méthode des rotations.....	18
3	Détermination de λcr	23
3.1	Selon l'Eurocode 3.....	23
3.2	Avec des programme OSSA2D ou Finelg.....	24
3.3	Facteur d'amplification du second ordre $1/(1 - 1/\lambda cr)$	25
4	Coefficient d'amplification (K) et de moment équivalent (Cm) - Élément sur deux appuis simples rotulés.....	27
4.1	Coefficient d'amplification (K) - Cas général	27
4.2	Coefficient d'amplification (K) - Cas particulier.....	28
4.3	Coefficient de moment équivalent (Cm) en travée.....	30
4.4	Conclusion	30
5	Coefficient d'amplification (K) et de moment équivalent (Cm) - Élément extrait du système.....	32
5.1	Moments aux extrémités au second ordre global (P- Δ)	32
5.2	Moment aux extrémités au second ordre complet (P- Δ - δ).....	35
5.3	Calcul des coefficients Cm , <i>travée</i> et Cm , <i>appuis</i>	36

Chapitre 3 : Méthodes d'analyse élastique approchée au second ordre

1	Introduction.....	39
2	Amplified Sway Moment Method (ASMM).....	39
3	Méthode Can.....	41
4	Méthode CAM.....	42
5	Méthode B ₁ -B ₂	43
6	Conclusion.....	44

Chapitre 4 : Méthode CAM

1	Introduction.....	45
2	Création des modèles d'éléments équivalents « sway » et « non sway ».....	45
2.1	Modèle d'élément équivalent « sway » (<i>Kextr</i>).....	45
2.2	Modèle d'élément équivalent « non sway » (<i>Kextr *</i>).....	49
3	Détermination du coefficient <i>Kextr</i>	50
3.1	Portique symétrique avec poutre infiniment rigide.....	50
3.2	Portique non symétrique avec poutre infiniment rigide.....	54
3.3	Portique non symétrique avec poutre flexible.....	57
3.4	Portique non symétrique multi-étages avec poutre flexible.....	61
3.5	Cas général avec chargement transversal en travée.....	63
3.6	Détermination du coefficient (<i>Kextr *</i>).....	66
3.7	Cas général <i>Kextr *</i> avec charge transversale.....	69
4	Conclusion.....	71

Chapitre 5 : Degré de précision de l'analyse de la méthode CAM

1	Introduction.....	72
2	Portique simple.....	72
2.1	Analyse élastique 1 ^{er} ordre à nœuds fixes.....	73
2.2	Analyse élastique 1 ^{er} ordre à nœuds mobiles.....	74
2.3	Calcul du moment exact au second ordre complet.....	76
3	Degré de précision de la méthode d'analyse CAM.....	78
3.1	Multiplicateur global.....	78
3.2	Raideur de la restreinte (C) et du ressort (K).....	79
3.3	Moments d'extrémités au second ordre complet.....	80

3.4	Influence de l'effort normal	84
4	Conclusion.....	86

Chapitre 6: Méthode analyse élastique 1 ordre à nœuds mobiles

1	Introduction.....	87
2	Analyse.....	87
3	Vérifications	87
3.1	Vérifications de la stabilité de barres.....	87
3.2	Vérification de résistance des sections aux extrémités	93
4	Conclusion.....	95

Chapitre 7 : Vérifications associées aux méthodes d'analyse approchée au second ordre

1	Introduction.....	96
2	Vérifications associées à la méthode Can.....	96
2.1	Vérifications de stabilité de barres.....	97
2.2	Vérifications de résistance des sections d'extrémités	100
3	Vérifications associées à la méthode CAM.....	101
3.1	Vérifications de stabilité de barre	102
3.2	Vérifications de résistances des sections d'extrémités.....	102
4	Conclusion-Tableau récapitulatif.....	103

Chapitre 8 : Méthode d'analyse-vérifications d'un portique simple sous charge horizontale ponctuelle

1	Introduction.....	104
2	Démarche réalisée.....	104
2.1	Détermination du multiplicateur critique global (λ_{cr}).....	105
2.2	Détermination du multiplicateur de ruine (λ_u).....	105
3	Analyse et vérifications.....	107
3.1	Rapport d'inertie 1 et poutre IPE 400	107
3.2	Rapport d'inertie 5 et poutre IPE 400	114
3.3	Rapport d'inertie 10 et poutre IPE 400	117
4	Conclusion.....	119

Chapitre 9 : Méthode d'analyse-vérifications d'un portique simple sous charge horizontale répartie et ponctuelle

1	Introduction.....	120
2	Géométrie et chargement du portique	120
3	Analyse et vérifications.....	122
3.1	Application pour $\lambda_{cr} = 5$	122
3.2	Résultats complets	133
4	Conclusion.....	136

Chapitre 10 : Comparaison des méthodes

1	Introduction.....	137
2	Comparaison des méthodes.....	137
2.1	Méthode de l'Eurocode 3 avec analyse élastique au premier ordre à nœuds mobiles.....	137
2.2	Méthode Can L (alternative 1)	139
2.3	Méthode Can Lfl (alternative 2)	140
2.4	Méthode Can <i>Kextr</i> *(alternative 3).....	141
2.5	Méthode CAM	143
3	Tableau récapitulatif	144
4	Conclusions et recommandations	145

Conclusions et perspectives.....147

Bibliographie.....151

Annexes.....i

Annexe A – Application de la méthode des rotations sur un portique simple	i
Annexe B – Efforts dans les structure « sway » et « non sway » – Méthode CAM.....	iii
Annexe C – Comparaison des efforts de la méthode CAM au second ordre complet par rapport aux résultats d'OSSA2D.....	viii
Annexe D - Formule de vérification de stabilité de barre à mi-travée.....	x
Annexe E – Position de la ruine et évolution du multiplicateur de charge en fonction du déplacement	xii

Table des annotations-symboles

Lettres latines :

A, B	les nœuds respectivement en pied et tête de la colonne étudiée ;
C_A	raideur de la restrainte au nœud A [kN.m/rad] ;
C_B	raideur de la restrainte au nœud B [kN.m/rad] ;
C_m	coefficient de moment sinusoïdal équivalent [-] ;
$C_{m,extr}$	coefficient de moment sinusoïdal équivalent à l'extrémité[-] ;
$C_{m,travée}$	coefficient de moment sinusoïdal équivalent en travée[-] ;
C_{yy}	facteur d'interaction plastique entre M et N [-] ;
E	module de young de l'acier [Mpa] ;
$e_{0,d}$	excentricité de barre à mi-travée liée à l'imperfection locale [m] ;
H	hauteur d'étage, des colonnes [m] ;
I	inertie des éléments [m^4] ;
K	raideur du ressort [kN/m] ;
K_{extr}^*	coefficient d'amplification des moments d'extrémités incluant l'effet P- δ pour un élément à nœuds fixes [-] ;
K_{extr}	coefficient d'amplification des moments d'extrémités incluant l'effet P- δ pour un élément à nœuds mobiles [-] ;
L	longueur de l'élément [m];
L_{fl}	longueur de flambement [m] ;
m_{encast}	moment d'encastrement parfait avec fonctions de stabilité [[kN.m]] ; cf méthode des rotations avec fonctions de stabilité
m_{encast}^*	moment d'encastrement parfait [[kN.m]] ; cf ; méthode des rotations
m_A	moment appliqué en A [kN.m] ; cf calcul du coefficient K_{extr}^*
M^I	moment au premier ordre [kN.m] ;
$M^{II-\delta}$	moment au second ordre local [kN.m] ;
$M^{II-\Delta}$	moment au second ordre global [kN.m] ;

$M^{II-\Delta-\delta}$	moment au second ordre complet (global et local) ou exact [kN.m] ;
M_{NS}	moment d'extrémité lié à l'analyse « non sway » [kN.m] ;
M_S	moment d'extrémité lié à l'analyse « sway » [kN.m] ;
N	effort normal dans la colonne [kN] ;
$N_E = \frac{\pi EI}{L^2}$	charge critique d'Eurler [kN] ;
N_{NS}	effort normal lié à l'analyse « non sway » [kN] ;
N_S	effort normal lié à l'analyse « sway » [kN] ;
N_{cr}	charge critique locale [kN] ;
N_{Ed}^I	effort normal au premier ordre dans la colonne [kN] ;
P	charge verticale ponctuelle [kN] ;
P- δ	effet du second ordre local ;
P- Δ	effet du second ordre local ;
Q	charge horizontale ponctuelle [kN] ;
q_v	charge répartie verticale [kN/m] ;
q_h	charge répartie horizontale [kN/m] ;
R	$2EI/L$ raideur flexionnelle [kN.m] ;
R	réaction d'appuis fictive [kN] ;
S	coefficient d'amplification des moments du modèle au second ordre complet (local et global) [-];
V_{Ed}	somme des efforts verticaux [kN] ;
V_{cr}	charge critique globale ou d'ensemble [kN] ;

Lettres grecques :

α fonction de stabilité de la méthode des rotations [-];

β fonction de stabilité de la méthode des rotations [-];

Δ déplacement latéral [m] ;

$\varepsilon..$ facteur lié aux fonctions de stabilité [-];

λ multiplicateur de charge [-];

$\bar{\lambda}$ élancement réduit [-];

λ_{cr} ou $\lambda_{cr,global}$ =multiplicateur critique global [-];

λ_{cr}^* ou $\lambda_{cr,global}^*$ =multiplicateur critique du modèle équivalent [-];

$\lambda_{cr,local} = \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}$ =multiplicateur critique local [-];

λ_u multiplicateur de ruine [-];

ϕ_A rotation au nœud A [rad] ;

ϕ_B rotation au nœud B [rad] ;

ϕ_A^I rotation au nœud A au premier ordre [rad] ;

ϕ_A^{II} rotation au nœud A au second ordre [rad] ;

ϕ déviation liée à l'imperfection globale [rad] ;

ψ déviation de l'élément [rad] ;

$\psi = \frac{M_1}{M_2}$ rapport entre les moments d'extrémités [-] ; cf formule des C_m ;

Γ taux d'utilisation [-];

μ facteur lié à l'imperfection locale [-]; cf formule de vérification de stabilité de barre en travée ;

χ facteur correctif lié aux formules de flambement [-] ;

Introduction

Le dimensionnement d'une ossature métallique ou mixte est une procédure qui se réalise principalement en deux étapes. La première est l'analyse afin de déterminer les différents efforts dans la structure et la deuxième est la vérification de la résistance et de stabilité des différents éléments constituant la structure.

Il existe un grand nombre de processus différents d'analyses-vérifications qui intègrent ou en partie les différentes non-linéarités présentes dans une structure. Ces non-linéarités peuvent être matérielle (caractère élasto-plastique du matériau) ou géométrique (effet du second ordre global et/ou local). En plus de ces non-linéarités, nous devons inclure dans l'ensemble du processus des imperfections locales et globales. Ces imperfections étant liées au montage des différents éléments, à la non rectitude des colonnes ou poutres ainsi qu'aux contraintes résiduelles qui subsistent dans l'élément après le laminage.

La plupart des ingénieurs-calculateurs ont tendance à favoriser l'utilisation d'une analyse au premier ordre élastique afin de pouvoir utiliser le principe de superposition. En effet, à chaque cas de charge, nous pouvons déterminer les efforts dans la structure et puis les additionner en fonction des diverses combinaisons de charges à considérer. Si l'analyse est non linéaire (une analyse plastique, une analyse au second ordre complet ou ...), nous devons réaliser autant d'analyses que de combinaisons de charges. La tâche est donc fastidieuse pour le praticien.

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur les méthodes d'analyse -vérifications qui tiennent compte des effets du second ordre global et local. Les analyses réalisées sont des analyses élastique et les vérifications se basent sur les résistances plastique de sections. En effet, nous travaillons avec des éléments de section de classe 1. Nous distinguons deux catégories parmi ce type d'analyse-vérifications.

La première catégorie est constituée de méthodes réalisant une analyse élastique au second ordre global approché avec imperfection globale. En réalité, ce type d'analyse se base sur deux analyses élastiques au premier ordre. L'une considère la structure à nœuds fixes (structure « non-sway ») et l'autre considère la structure à nœuds mobiles (structure « sway »). Les efforts de cette deuxième analyse sont ensuite amplifiés afin d'inclure les effets du second ordre. Ensuite, les effets du second ordre étant intégrés dans l'analyse, nous pouvons considérer la structure à nœuds fixes et réaliser les vérifications. Pour chaque élément, nous devons alors vérifier la stabilité de l'élément en travée (en incluant l'imperfection initiale) et vérifier la résistance des sections d'extrémités de l'élément.

La deuxième catégorie se base sur une méthode où une analyse élastique linéaire au premier ordre est réalisée. Ensuite, pour les vérifications, nous considérons la structure à nœuds mobiles afin de bien inclure les effets du second ordre global et local.

En outre, l'ensemble de ces résultats sont comparés à ceux obtenus grâce à un logiciel aux éléments finis (FINELG) qui servira de référence. En effet, ce type de programme nous permet d'inclure l'ensemble des non-linéarités géométrique et matérielle.

Dans un premier temps, nous rappelons la démarche à suivre pour dimensionner une structure. Par après, nous regarderons plus en détails les différentes types d'analyse et vérifications qui existent en insistant notamment sur les concepts d'imperfections (local et global) et les effets du second ordre (global (P- Δ) et local (P- δ)).

Dans second temps, nous réaliserons une série de rappels théoriques de différentes méthodes ou notions qui sont utilisées dans la suite du mémoire. Nous nous attarderons sur la méthode des rotations qui peut être aménagée afin d'intégrer les effets P- Δ et P- δ pour déterminer les moments aux extrémités des barres. Nous discuterons également du calcul du multiplicateur critique. Nous finissons ces rappels théoriques avec la définition des coefficients d'amplification et de moment équivalent (en travée et aux extrémités) afin de tenir compte des effets P- δ pour déterminer les moments maxima en travée et aux extrémités. L'utilisation de ces coefficients est nécessaire afin d'extraire au mieux la barre de la structure.

Par après, nous nous attarderons sur la première catégorie des méthodes analysées. Pour rappel, cette catégorie de méthode réalise une analyse au second ordre approchée. Nous choisirons les méthodes les plus pertinentes pour une analyse plus approfondie.

Ensuite, nous nous attardons plus particulièrement sur la partie analyse de la méthode CAM qui fait partie de cette première catégorie. Cette méthode qui a été développée en partie dans deux mémoires précédents (référence [6] et [9]) se base sur la création d'un modèle qui représente l'élément isolé de structure. Ce modèle nous permet notamment de déterminer les moments au second ordre complet (local et global) de l'élément isolé.

Dans le chapitre suivant, nous analyserons le degré de précision de l'analyse de la méthode CAM en l'appliquant sur une étude de portique simple à géométrie symétrique ou dissymétrique. Cette méthode est étudiée pour une certaine gamme de multiplicateurs critiques ($3 \leq \lambda_{cr} \leq 10$). Nous étudierons l'influence de la dissymétrie et du multiplicateur critique sur la précision des résultats de l'analyse ainsi que l'influence des effets P- δ sur la détermination des moments d'extrémités.

Dans ce travail, nous examinerons également la deuxième catégorie des méthodes qui ne se base en fait que sur une seule méthode. Cette méthode consiste à faire une analyse élastique au premier ordre et puis à réaliser les vérifications de barres en considérant la structure à nœuds mobiles .i.e. que nous devons utiliser les longueurs de flambement à nœuds mobiles ($L_{fl} \geq L$). La partie analyse de cette méthode étant assez simple, nous analyserons plus en profondeur la partie vérification de cette méthode d'un point de vue

théorique afin d'en comprendre ses limites. Nous rappellerons la formulation de la vérification de la stabilité des barres et de la vérification des sections d'extrémités afin de comprendre l'ensemble des termes intervenant dans ces équations de vérifications.

Comme nous le verrons, nous étudierons la partie vérification des méthodes de la première catégorie pour les méthodes sélectionnées. Nous analysons donc la partie vérification de la méthode CAN et la méthode Can sous trois variantes (avec un degré de précision différent).

Ayant défini les parties analyses et vérifications des deux catégories de méthodes, nous pouvons les comparer en déterminant le multiplicateur de ruine sur un exemple de portique. En fait, ces méthodes seront appliquées sur deux exemples de portique à géométrie non symétrique et en balayant la plage de multiplicateurs critiques admissibles pour ces méthodes ($3 \leq \lambda_{cr} \leq 10$). Sur le premier, nous appliquerons un chargement vertical classique (charges ponctuelles et répartie) et une charge horizontale ponctuelle en tête de poteau. Sur le deuxième, nous appliquerons un chargement vertical classique et une charge horizontale répartie en travée.

Dans le dernier chapitre, nous comparerons (avantages-inconvénients) l'ensemble des méthodes au niveau du processus complet d'analyse-vérifications sur base de critères tel que le domaine d'application, la complexité et la précision de la méthode. Pour conclure, nous donnerons des recommandations pratiques à l'ingénieur en définissant les méthodes qui ressortent du lot.

Chapitre 1 : Méthodes d'analyse et de vérifications

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous reprenons tout d'abord la méthodologie pour dimensionner une ossature métallique. Ensuite, nous décrivons l'ensemble des différents processus d'analyse et de vérifications existants. Ces différentes méthodes traitent des non-linéarités (géométrique et matérielle) avec notamment la prise en compte des différentes imperfections. Enfin, nous citons les différentes méthodes d'analyse élastique et les vérifications associées qui incluent les effets du second ordre.

2 Analyse et vérification

Pour dimensionner une structure, nous devons suivre un certain nombre d'étapes et l'ensemble de celles-ci se retrouve sur la Figure 1.1.

Dans un premier temps, nous faisons un pré-dimensionnement de la structure sur base de notre expérience et de nos connaissances acquises.

Dans un second temps, nous pouvons réaliser l'analyse de la structure afin de déterminer les efforts dans ses composants, efforts issus des différents cas de charges (vent, neige, charge d'exploitation, poids propres ...). En outre, la distribution des efforts dans la structure dépend non seulement du cas de charge mais aussi de la géométrie des différents éléments utilisés (lorsque la structure est hyperstatique) ce qui est le cas de la grande majorité des structures de type portique à travées et étages multiples sont hyperstatiques. Par après, nous reviendrons plus en détails sur les différentes méthodes d'analyse pertinentes.

Dans un troisième temps, nous réalisons l'ensemble des vérifications de résistance et de stabilité des éléments sur base des efforts obtenus. Les différentes méthodes de vérifications associées à la méthode d'analyse appropriée sont reprises dans une prochaine section.

Si la vérification des éléments est correcte, nous pouvons alors dimensionner les différents assemblages en fonction des hypothèses réalisées lors de l'analyse (encastrement, rotule, assemblages semi-rigide,...). A contrario, si les éléments ne sont pas assez résistants, nous devons recommencer le processus en réalisant un second dimensionnement, une seconde analyse-vérification,... Le processus peut donc être itératif afin de réaliser un dimensionnement économique.

A noter que le processus peut être doublement itératif lors de la présence d'assemblages semi-rigides. Lors de l'analyse, les assemblages semi-rigides sont déjà déterminés afin de calculer leur rigidité. Cette rigidité influence la répartition des efforts lors de l'analyse. Si la vérification est réalisée et que les assemblages ne sont pas assez résistants, nous recommandons un processus itératif car dans la majorité des cas, la résistance de l'assemblage est fortement liée à sa rigidité. Si la rigidité est modifiée, l'analyse l'est également. Cependant, nous ne tiendrons pas compte du problème des assemblages semi-rigides pour éviter de complexifier le problème étudié.

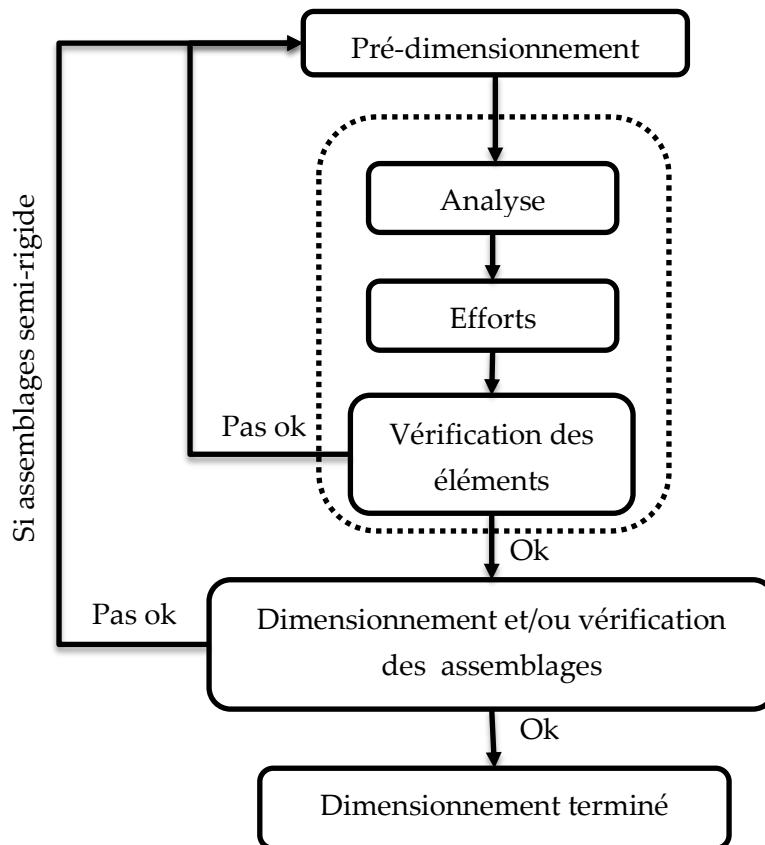


Figure 1.1 - Schéma de principe du dimensionnement d'une structure

Dans le cadre de ce travail de fin d'étude, nous allons nous attarder plus particulièrement sur les méthodes d'analyse et de vérifications (cadre en pointillé).

2.1 Imperfections

Nous ne pouvons pas envisager l'analyse et la vérification d'une ossature sans parler des imperfections de structures qui sont non seulement géométriques (défaut de hors aplomb lors du montage) mais aussi liées au processus de production lors du laminage (défaut de courbure et contraintes résiduelles).

Pour les imperfections liées au montage et donc à l'ensemble de la structure, nous les définissons comme les imperfections globales. Les imperfections liées à l'élément isolé sont définies comme les imperfections locales. Ces imperfections locales et globales doivent être incluses dans l'analyse et la vérification de toute structure sauf si elles peuvent être négligées.

2.1.1 Imperfections globales

Le défaut initial d'aplomb est défini par l'Eurocode 3 (référence[1]) comme étant :

$$\phi = \phi_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_M \quad (1.1)$$

Avec

- $\phi_0 = \frac{1}{200}$ = hors aplomb de référence ;
- $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}}$ ($\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1$) avec h = hauteur de la structure ;
- $\alpha_M = \sqrt{0.5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$ avec m = le nombre de poteaux par étage dans le plan étudié

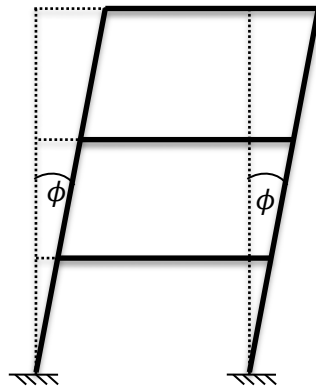


Figure 1.2- Imperfection globale

Le défaut initial d'aplomb doit toujours être inclus dans l'analyse de la structure. A noter, que ce défaut d'hors-aplomb peut-être atténué lors de la mise en œuvre des différents étages en essayant, pendant le montage, de corriger l'imperfection de l'étage précédent. Ce défaut est donc appliqué étage par étage et peut être pris en compte de deux manières possibles :

- lors de la modélisation, les éléments de type poteau sont inclinés d'étage à étage dans un même sens ou en sens opposé.
- par le biais de forces horizontales équivalentes qui sont définies comme :

$$H_{equi} = \phi \cdot V_i \quad (1.2)$$

avec $V_i = \sum$ efforts verticaux à l'étage i

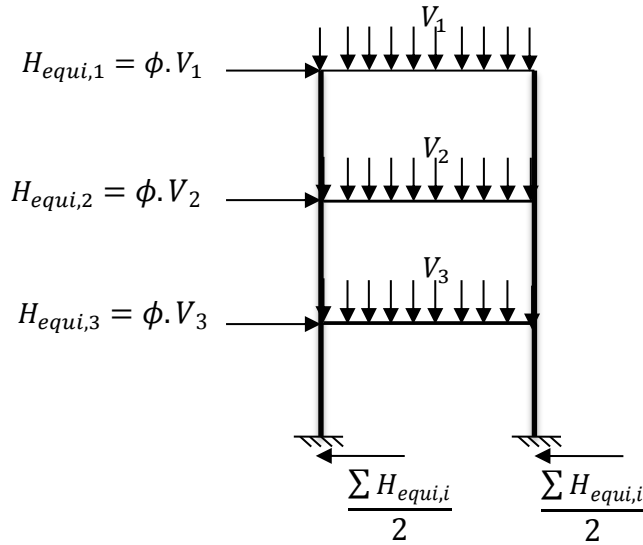


Figure 1.3 - Forces horizontales équivalentes

Cette imperfection globale de la structure peut être négligée si et seulement si le critère suivant est vérifié :

$$H_{ED} \geq 0.15 V_{ED} \quad (1.3)$$

En effet, les imperfections sont négligées lorsque les efforts verticaux liés aux actions extérieures (\$V_{ED}\$) sont petits vis-à-vis des efforts horizontaux liés aux actions extérieures (\$H_{ED}\$). Si nous prenons une imperfection globale égale à \$\phi_0 = 1/200\$ et que nous utilisons les équations (1.2) et (1.3), nous obtenons des efforts horizontaux équivalents qui sont inférieurs à \$1/30\$ des efforts horizontaux liés aux charges sollicitantes. Dans ce cas, les efforts horizontaux équivalents liés à l'imperfection globale sont donc négligeables vis-à-vis des efforts horizontaux sollicitants.

$$H_{equi} \leq \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{0.15} H_{ED} = \frac{1}{30} H_{ED} \quad (1.4)$$

Dans la littérature, nous remarquons que selon les différents pays, ce type d'imperfection est souvent défini par un hors plomb de \$1/200\$ de la hauteur d'étage ou des forces horizontales équivalentes égales à \$0,5\%\$ des efforts verticaux par étage. Ces deux imperfections sont en fait équivalentes (référence[3]).

2.1.2 Imperfection locale

L'imperfection locale est une imperfection qui est liée à la courbure de l'élément mais aussi aux contraintes résiduelles lors de la phase de laminage. Dans la plupart des méthodes de dimensionnement, ces contraintes résiduelles sont déterminées par une imperfection initiale locale équivalente à \$1/1000\$ de la longueur de l'élément.

Comme pour l'imperfection globale, cette imperfection doit être intégrée dans l'ensemble du processus. Cependant, contrairement à l'imperfection globale, elle peut être incluse soit dans l'analyse globale, soit dans la vérification de l'élément.

2.1.2.1 *Prise en compte dans l'analyse globale*

L'imperfection locale, représentée sous la forme de pré-courbure ou d'arc d'une barre, peut être prise en compte de deux manières différentes.

a) Lors de la modélisation, les éléments de la structure sont modélisés avec une pré-courbure locale équivalente ($e_{0,d}/L$). Cette imperfection, qui modélise le défaut de rectitude de l'élément ainsi que les contraintes résiduelles, dépend des courbes de flambement européennes associées à l'élément considéré (paramètre d'imperfection α) mais également de l'analyse effectuée (plastique ou élastique). Pour rappel, ce paramètre α dépend du type de laminage (chaud, froid) et du type de profilé ainsi que de sa géométrie. Ce défaut varie entre 1/150 et 1/350 $e_{0,d}/L$ (référence [1]).

b) Par le biais de forces horizontales équivalentes qui sont définies dans l'Eurocode 3 (référence [1]).

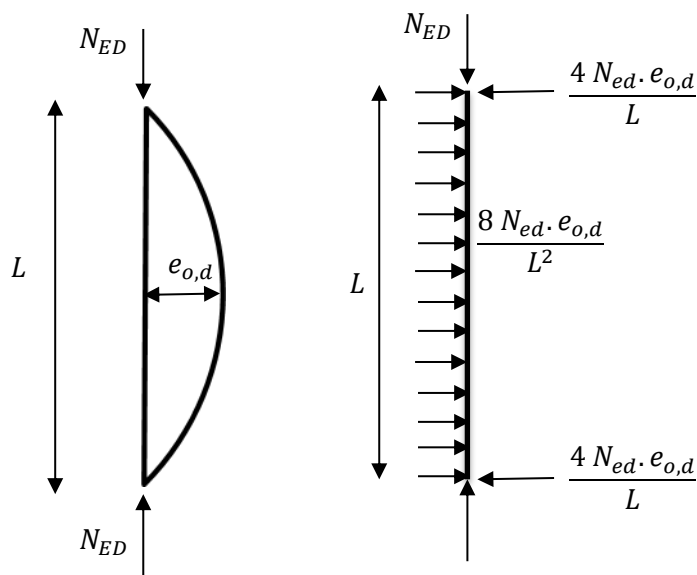


Figure 1.4 - Imperfection locale et forces horizontales équivalentes

Lorsque cette imperfection locale en arc est prise en compte dans l'analyse, il faut modéliser les imperfections en arc sur chaque élément afin d'avoir le cas le plus défavorable pour l'ensemble de la structure. Nous remarquons donc que, pour des structures à plusieurs travées et multi-étages, le nombre de combinaisons possibles et dès lors le nombre d'analyses à effectuer devient assez important. Pour éviter cette tâche fastidieuse, les imperfections locales sont en général intégrées dans la phase de vérification.

Remarquons également que lors d'une analyse en 3D, s'il y a un risque de déversement, il faut tenir compte d'une imperfection locale selon l'axe faible de l'élément considéré. Dans notre cas, le problème ne se pose pas car nous ne travaillons que dans le plan.

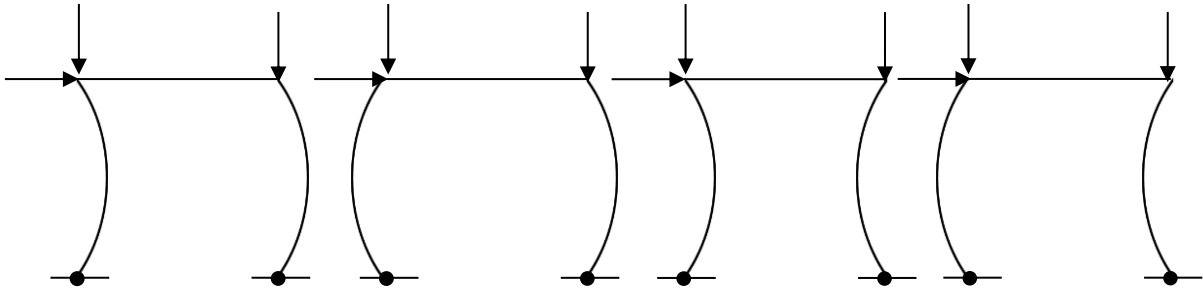


Figure 1.5 – Différents cas pour la mise en place de l'imperfection initiale

2.1.2.2 Prise en compte dans la vérification de l'élément

Les imperfections locales sont intégrées au niveau des formules de vérification des barres aux instabilités. En effet, les défauts locaux sont inclus au niveau de la résistance en prenant en compte le paramètre d'imperfection (α) adéquat, lié aux courbes de flambement européennes. De plus, le moment provenant de l'analyse globale (M_{Ed}) à mi-travée est augmenté par un moment supplémentaire ($N_{Ed} \cdot e_{0,d}$) lié à la compression dans la barre (N_{Ed}) et à l'excentricité ($e_{0,d}$). Le moment total à mi-travée vaut donc $M = M_{Ed} + N_{Ed} \cdot e_0$.

L'imperfection locale de la structure est négligée si et seulement si le critère suivant est vérifié :

$$\bar{\lambda} > 0.5 \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{ED}}} \quad (1.5)$$

ce qui est équivalent à

$$N_{ED} > 0.25 N_E \text{ avec } N_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_{epure}^2} \quad (1.6)$$

Ce critère montre que lorsque l'effort normal N_{ED} devient grand par rapport à l'effort normal critique d'Euler, l'influence de la déformée initiale devient négligeable.

2.1.3 Imperfections globale et locale

Les imperfections locale et globale peuvent être prises en compte en même temps dans l'analyse en définissant une déformée initiale résultant de l'amplification du premier mode de flambement critique élastique de la structure.

Cette méthode est souvent utilisée afin de déterminer le comportement réel d'une structure en intégrant dans l'analyse les imperfections locale et globale ainsi que les effets du second ordre (instabilités locale et globale).

2.2 Instabilités locale et globale

Comme pour les imperfections, nous devons inclure à un moment donné, dans le processus d'analyse-vérification, les instabilités de barre (locale, effet P- δ) et de la structure (globale, effet P- Δ). De ces deux instabilités résultent des efforts supplémentaires appelés également efforts du second ordre. Une structure est toujours sensible à l'effet du second ordre local mais peut être beaucoup moins sensible à l'effet du second ordre global (lorsque la structure est dite à nœuds fixes). Cependant, dans ce travail de fin d'études, nous ne nous intéresserons qu'aux structures sensibles à ces deux types d'effet du second ordre.

Les effets du second ordre apparaissent lorsque les déformations de la structure dans son ensemble (effet P- Δ) et dans l'élément (effet P- δ) sont prises en compte pour déterminer les efforts. Ces effets du second ordre sont une non-linéarité géométrique

L'analyse globale au second ordre est négligeable si les déformations ont une faible influence sur l'augmentation des efforts dans la structure en général. Dans ce cas, nous négligeons l'effet de l'instabilité globale (effet P- Δ). La structure est définie comme à nœuds fixes (structure « non-sway ») mais il y a toujours un risque d'avoir une instabilité locale, de barres (effet P- δ) entre ces nœuds fixes. Dans ce cas, nous parlons d'une analyse au premier ordre global où les efforts sont calculés sur base de la géométrie initiale. A noter que cette géométrie initiale peut contenir les imperfections globale ou/et locale.

2.2.1 Instabilité globale

Lorsque nous parlons d'instabilité globale, nous parlons plus généralement de la prise en compte des effets P- Δ .

Ces effets sont définis comme le déplacement par rapport aux extrémités des membres, qui résultent de la déformation initiale (imperfections globales) et des déplacements dus au chargement. Ces déplacements latéraux sont engendrés par la présence d'un chargement horizontal ou causés par une dissymétrie soit au niveau du chargement vertical ou soit au niveau de la géométrie de la structure.

Selon l'Eurocode 3 (référence [1]), nous pouvons réaliser une analyse élastique au premier ordre global (effet P- Δ non inclus) de la structure si le critère suivant (équation (1.7)) est vérifié :

$$\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{V_{ED}} \geq 10 \text{ pour une analyse élastique} \quad (1.7)$$

$$\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{V_{ED}} \geq 15 \text{ pour une analyse plastique} \quad (1.8)$$

Où λ_{cr} = multiplicateur critique élastique global. C'est le coefficient par lequel la charge verticale V_{ED} doit être multipliée afin de provoquer l'instabilité élastique de la structure dans un mode global :

V_{ED} = charge verticale appliquée sur la structure ;

V_{cr} = charge critique élastique d'instabilité globale de la structure.

Nous reviendrons par la suite sur la méthodologie afin de déterminer cette charge critique globale V_{cr} ou bien le multiplicateur critique global λ_{cr} .

Prenons l'exemple de la Figure 1.6, si les déplacements latéraux (Δ) et/ou l'effort de compression (P) dans un poteau encastré sont importants, nous voyons que le moment d'encastrement est fortement augmenté (augmentation de $P\Delta$ sur la Figure 1.6). A noter que la valeur de l'amplification est principalement liée aux efforts verticaux. Si les charges verticales sont nulles (cas de charge du vent) et, même si la déformée de la structure est grande, il n'y a pas d'efforts supplémentaires engendrés.

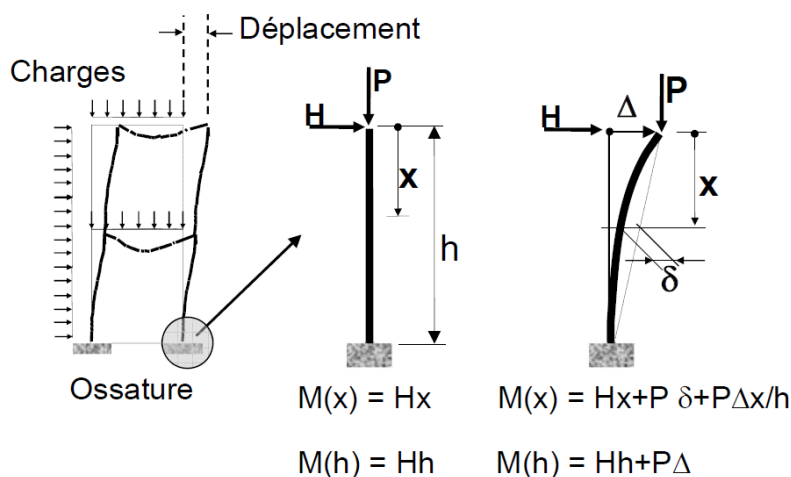


Figure 2.6 - Effet du second ordre ($P-\Delta$ et $P-\delta$) (référence [2])

Nous discuterons par la suite des différentes possibilités afin d'intégrer cet effet du second ordre global (lié à l'instabilité globale de la structure) dans le processus d'analyse-vérification de la structure.

2.2.2 Instabilité locale

Pour les instabilités locales, nous parlons plus souvent de la prise en compte des effets $P-\delta$.

Ces effets sont définis comme le déplacement par rapport à la corde qui joint les deux extrémités d'un même élément (voir Figure 1.6). Ce déplacement résulte de la déformation initiale (imperfection locale en arc) et des déplacements latéraux dus au chargement de l'élément. Ces déplacements latéraux peuvent être le résultat d'un chargement horizontal sur l'élément et/ou de l'application de moments d'extrémités qui déforment la barre.

Prenons l'exemple de la figure 1.6 : si les déplacements latéraux (δ) par rapport à la corde et/ou l'effort de compression (P) dans l'élément sont importants, nous voyons que le moment à mi-travée est augmenté (augmentation de $P.\delta$). Notons que la valeur de l'amplification est principalement liée aux efforts de compression dans l'élément. Plus l'effort normal de compression est grand, plus importante sera la déformée et donc les effets consécutifs.

Comme pour l'instabilité globale, nous discuterons dans une prochaine section de l'intégration de cet effet du second ordre local (lié l'instabilité locale) dans le processus d'analyses/vérifications de la structure.

2.3 Non-linéarité du matériau

Dans cette section, nous discutons des types d'analyses-vérifications que nous pouvons réaliser en fonction du matériau. En effet, l'acier est un matériau qui a une relation non-linéaire entre la contrainte et la déformation. Nous parlons de non-linéarité matérielle. C'est la deuxième non-linéarité qui intervient dans le processus d'analyses/vérifications après la non-linéarité géométrique.

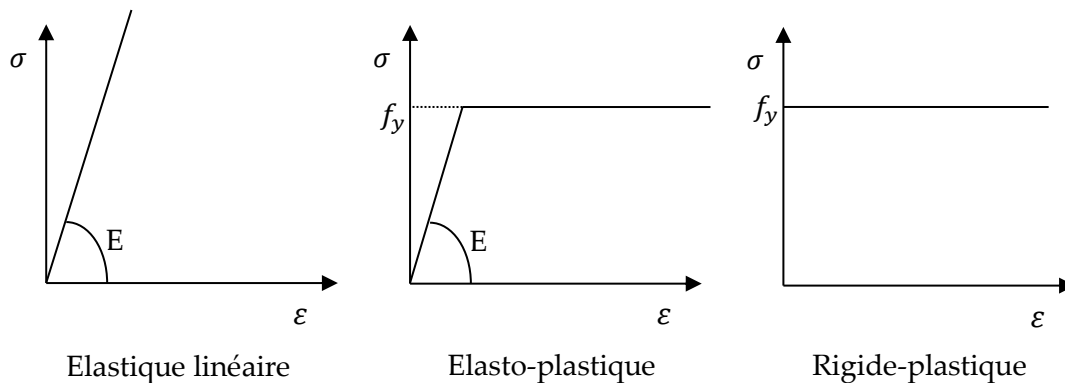


Figure 1.7 - Comportements du matériau

2.3.1 Analyse globale élastique

Une analyse globale élastique peut être réalisée dans tous les cas. Il n'y a aucune restriction. Nous réalisons donc l'analyse en supposant que le matériau (acier) est indéfiniment élastique.

La prise en compte du premier ordre ou du second ordre dans cette analyse élastique dépend de la déformabilité de la structure et notamment du critère de l'équation (1.7) mais aussi du type de vérification réalisé (à nœuds fixes ou déplaçables).

Il est à noter que faire une analyse élastique n'empêche pas de réaliser une vérification qui se base sur la résistance plastique en section. En effet, le type de vérification (élastique ou plastique) de la résistance en section ne dépend que des classes de section. Ces

classes de section sont définies dans l'Eurocode 3(référence [1]) sur base des élancements des parois qui constituent la section ainsi que du type d'appui de celles-ci. Dans la suite du travail, nous travaillons principalement avec des profilés de classe 1 en compression et en flexion, ce qui nous autorise à réaliser une vérification plastique de résistance en section.

L'analyse élastique linéaire au premier ordre est la plus utilisée car simple à réaliser via des programmes basés sur la méthode des déplacements. Cette analyse permet surtout l'utilisation du principe de superposition car nous restons dans le domaine élastique sans non-linéarité géométrique. Afin de déterminer les diagrammes enveloppes des efforts sollicitant une structure, l'ingénieur calcule l'ensemble des efforts pour chaque cas de charge et les additionne afin de réaliser les différentes combinaisons des cas de charges. Lorsqu'une analyse élastique au premier ordre est réalisée, si la structure est « sway » (critère de l'équation (1.7) non vérifié) , la vérification des éléments se fait par le biais de formules à nœuds déplaçables. Par contre, si la structure est définie comme « non-sway » (critère de l'équation (1.7) vérifié), la vérification des éléments se fait par le biais de formules à nœuds fixes.

Dans ce mémoire, pour la plupart des méthodes analysées, nous réalisons une analyse élastique du premier ordre qui sera amplifiée afin de tenir compte du second ordre global pour ensuite réaliser les vérifications sur base des formules à nœuds fixes.

2.3.2 Analyse globale plastique

Nous n'allons pas nous attarder sur les méthodes d'analyse plastique étant donné que ce travail de fin d'étude se base sur une analyse élastique. Dans la pratique, l'analyse plastique est généralement peu utilisée sauf dans certains pays Anglo-Saxons où cette approche est courante.

L'analyse plastique nécessite des sections ayant une capacité de rotation suffisante pour redistribuer pleinement les moments. Les sections des profilés doivent être ductiles et donc obligatoirement de classe 1.

Les analyses plastiques sont définies au nombre de trois dans l'Eurocode 3 (référence [1]).

2.3.2.1 Analyse rigide plastique

Cette analyse néglige le comportement élastique des barres entre les rotules plastiques formées. Elle ne peut être réalisée qu'à condition que les effets du second ordre soient négligés i.e. que l'équation (1.8) doit être vérifiée.

Ce type d'analyse se base sur la réalisation de mécanismes plastiques afin de déterminer le multiplicateur plastique λ_p minimum en réalisant une approche cinématique (approche par le haut, insécuritaire) ou en réalisant une approche statique afin de déterminer le multiplicateur plastique λ_p maximum (approche par le bas, sécuritaire)(voir référence [4]).

2.3.2.2 Analyse plastique non linéaire

Ce genre d'analyse se base sur la prise en compte de la plastification partielle le long des barres (non-linéarité matérielle) et de la déformation de la structure afin de déterminer les efforts (non-linéarité géométrique). En plus, si les imperfections globale et locale sont incluses dans la géométrie initiale, nous pouvons déterminer le comportement réel de la structure. Il n'y a donc aucune vérification à faire car tout est pris en compte dans l'analyse.

Ce genre de méthode servira de référence afin de comparer les méthodes d'analyse et de vérifications étudiées dans ce travail. Ce type d'analyse intégrant toutes les non-linéarités n'est possible que par l'utilisation de programme d'éléments finis tel que FINELG.

2.3.2.3 Analyse élastique-plastique

Une analyse élastique (1 ordre ou second ordre) est réalisée jusqu'à l'apparition de diverses rotules plastiques. Ensuite, une analyse plastique est effectuée afin de déterminer la redistribution des efforts dans la structure en tenant compte de ces rotules plastiques. Les efforts sont ensuite recombinaés afin de déterminer le multiplicateur ultime de ruine λ_u qui tient compte du comportement non-linéaire géométrique (second ordre) et matériel (élasto-plastique).

2.4 Résumé des méthodes d'analyse et vérification

Il existe un grand nombre de méthodes d'analyses et de vérifications. Ces méthodes dépendent de deux non-linéarités dont l'une est géométrique (effet du second ordre, lié aux instabilités) et l'autre est matérielle (comportement élasto-plastique). Nous pouvons donc répartir les méthodes en 4 sous-groupes (voir Figure 1.8).

		Comportement du matériau	
		Elastique	Plastique
Influence de la géométrie	1 ^{er} ordre	Analyse élastique linéaire 1 ^{er} ordre - principe de superposition - λ	Analyse rigide plastique - mécanisme de ruine - λ_p
	2 ^{ième} ordre	Analyse élastique linéaire second ordre – non-linéarité géométrique- λ_{cr}	Analyse élasto-plastique second ordre – non-linéarités géométrique et matérielle - λ_u

Figure1.7 - Classification des méthodes d'analyse

Pour chaque méthode d'analyse et de vérifications, nous ne devons pas oublier d'inclure les effets de l'instabilité globale de la structure (négligés si l'analyse au premier ordre est licite) et locales des barres mais aussi des imperfections locale et globale. L'ensemble de ces effets et imperfections doivent impérativement être pris en compte dans l'analyse ou dans la vérification des éléments.

3 Conclusion-Méthode d'analyse élastique au second ordre et vérifications associées

Dans cette section, nous allons étudier plus en détail l'ensemble des méthodes d'analyse et de vérifications qui se base sur une analyse élastique au second ordre et sur une vérification de résistance des éléments en section plastique (Classe 1 ou 2). Nous devons donc tenir compte des effets P- Δ et P- δ et des imperfections (locale et globale). Nous avons déjà intégré la méthode développée dans ce mémoire, une méthode du premier ordre avec amplification des moments « sway » (moments dûs aux efforts horizontaux). Dans cette catégorie, nous nous sommes permis d'inclure la méthode d'analyse élastique au premier ordre avec les longueurs de flambement à nœuds mobiles car cette dernière est aussi analysée. Le prochain chapitre fait l'objet de rappels théoriques.

Analyse Élastique (dans le plan)	1 ^{er} ordre	1 ^{er} ordre avec amplification des charges horizontales (H_{ED} et $V_{ED} \cdot \phi$) $\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_{cr}}}$ (effet P- Δ) ($3 < \lambda_{cr} < 10$)	1 ^{er} ordre avec amplification des moments « sway » (effet P- Δ) ($3 < \lambda_{cr} < 10$)	2 ^{ème} ordre exact (effet P- Δ et P- δ)
	Imperfection globale			Imperfection globale et locale
Vérifications des instabilités de barres dans le plan	Effet P- Δ et P- δ avec L_{fl} à nœuds mobiles	Effet P- δ avec L_{fl} à nœuds fixes ¹	Effet P- δ avec L_{fl} à nœuds fixes ¹	aucune
	Imperfection locale			
Vérifications des instabilités hors plan	A faire			
Vérification de la résistance des sections d'extrémités	A faire sous les efforts du 1 ^{er} ordre avec amplifications	A faire sous les efforts du second ordre exact ou 1 ^{er} ordre amplifié		

Figure 1.9 - Résumé des méthodes d'analyse - vérification

¹ Selon l'EC 3, il n'est pas explicitement écrit que nous puissions utiliser les longueurs de flambement à nœuds fixes lorsque sont pris en compte des effets du second ordre global ainsi que les imperfections globales. Il est écrit : « la vérification peut-être basé sur une longueur de flambement égale à la longueur d'épure ». (référence [1] partie 1-1 5.2.2 (7) b), p37)

Chapitre 2 : Rappels théoriques

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons une série de rappels théoriques sur les méthodes d'analyse élastique et notamment sur la méthode des rotations qui est améliorée afin de déterminer les moments au second ordre complet (effets P- δ et P- Δ). Ensuite, nous indiquons comment obtenir le multiplicateur critique (λ_{cr}) et développons l'origine du facteur d'amplification $\left(\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}\right)$ tenant compte des effets du second ordre. Nous terminons sur la détermination des coefficients des moments équivalents (C_m en travée et sur appuis).

2 Méthodes d'analyse exacte

2.1 Analyse au premier ordre élastique

Il existe diverses méthodes d'analyses élastique au premier ordre qui peuvent être réalisées manuellement. Pour rappel, l'analyse au premier ordre ne tient compte que de la géométrie initiale de la structure où les efforts extérieurs sont équilibrés par les efforts internes.

Les méthodes courantes d'analyse au premier ordre sont :

- La méthode des forces
- La méthode des déplacements
- La méthode des rotations
- La méthode de Cross

Outre la simplicité d'application de ces méthodes en général, le principal avantage réside dans l'utilisation du principe de superposition (l'analyse étant élastique au premier ordre).

La méthode des déplacements est utilisée dans la plupart des logiciels pour réaliser une analyse élastique au premier ordre car elle est systématique et donc, plus facile à mettre en œuvre.

La méthode des rotations est en fait une simplification de la méthode des déplacements où les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant sont négligées devant les déformations dues aux moments de flexion. Nous nous attardons plus particulièrement sur cette méthode des rotations car elle sera utilisée par la suite.

La méthode des rotations présente l'avantage de pouvoir être modifiée afin de tenir compte du second ordre local (P- δ) et global (P- Δ). Les effets P- δ sont inclus via l'utilisation des fonctions de stabilité et les effets P- Δ sont pris en compte en utilisant la méthode des rotations aménagée.

2.2 Méthode des rotations

2.2.1 Méthode classique des rotations

Les inconnues de la méthode des rotations sont les rotations (ϕ) à chaque nœud lorsque la structure est à nœuds fixes. Si la structure est à nœuds mobiles, les inconnues sont les rotations (ϕ) aux nœuds et les déviations (ψ) de la corde des barres.

Rappelons que seule la déformabilité due aux moments en flexion est prise en compte. Les déformations liées à l'effort tranchant et à l'effort normal sont négligées. Cette hypothèse implique que, lorsque la structure étudiée est un portique plan, les déviations (ψ) des poutres sont considérées comme nulles et les déviations (ψ) des colonnes d'un même étage sont supposées identiques.

La méthode des rotations permet de définir les moments aux extrémités des barres i.e. aux nœuds. Les équations constitutives de la méthode des rotations qui définissent les moments aux extrémités d'une barre AB sont :

$$\begin{aligned} M_{BAB} &= m_{BAB} + R_{AB} (2 \cdot \phi_B + \phi_A - 3\psi_{AB}) \text{ avec } R_{AB} = \frac{2E I_{AB}}{L_{AB}} \\ M_{AAB} &= m_{AAB} + R_{AB} (2 \cdot \phi_A + \phi_B - 3\psi_{AB}) \text{ avec } R_{AB} = \frac{2E I_{AB}}{L_{AB}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les moments m_i sont les moments d'encastrement liés au chargement transversal appliqués sur la barre i.

L'équilibre de rotation aux nœuds B est défini comme

$$\sum_i M_{Bi} + M = 0 \quad (2.2)$$

Avec M_{Bi} les moments définis par la méthode des rotations au nœud B avec i les barres liées au nœud B et M le moment extérieur concentré appliqué au nœud B.

Nous obtenons donc autant d'équations aux nœuds que d'inconnues de rotations ϕ . Il convient donc d'établir autant d'équations supplémentaires qu'il y a de déviations (ψ) i.e. d'étages. Pour rappel, nous avons fait l'hypothèse que les déviations des colonnes d'un même étage sont identiques.

Dès lors, l'équilibre horizontal au-dessus de chaque étage est établi pour obtenir les équations complémentaires nécessaires à la détermination des déviations (ψ). Etant donné que nous n'utilisons la méthode des rotations uniquement pour un élément isolé, nous ne nous attarderons pas plus sur la formulation de cet équilibre horizontal.

2.2.2 Méthode des rotations avec fonction de stabilités (P- δ)

L'effet P- δ traduit l'influence de l'effort normal sur la rigidité des barres. Cet effet est pris en compte par l'utilisation des paramètres α et β devant les coefficients de rigidité assignés aux différents déplacements (rotations et déviations). L'effet P- δ influence également les moments d'encastrement (m) qui dépendent du type de chargement transversal.

Les équations constitutives de la méthode des rotations deviennent

$$\begin{aligned} M_{BAB} &= m_{BAB} + R_{AB} (\alpha \cdot \phi_B + \beta \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi_{AB}) \\ M_{AAB} &= m_{BAB} + R_{AB} (\alpha \cdot \phi_A + \beta \cdot \phi_B - (\alpha + \beta) \cdot \psi_{AB}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les paramètres α et β dépendent d'un paramètre ε qui tient compte de l'effort normal (compression ou traction). Ce dernier paramètre est défini comme :

$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{N}{EI}} = \sqrt{\frac{N}{\frac{EI}{L^2}}} \quad (2.4)$$

Ce paramètre exprime le rapport entre l'effort normal et une charge $\left(\frac{EI}{L^2}\right)$ qui est assez similaire à la charge critique d'Euler d'une barre ($N_E = \frac{\pi^2 EI}{L}$) au terme π^2 près. En réalité, nous avons $\varepsilon = \pi \sqrt{\frac{N}{N_E}}$ et donc $\frac{N}{N_E} = \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}$. Si l'effort normal N tend vers la charge critique d'Euler (N_E), alors le paramètre ε tend vers la valeur de π .

Dans le cas d'un élément comprimé (la raideur diminue), les paramètres α et β sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon \cdot (\sin \varepsilon - \varepsilon \cdot \cos \varepsilon)}{2(2 - 2 \cdot \cos \varepsilon - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon)} \\ \beta(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2(2 - 2 \cdot \cos \varepsilon - \varepsilon \cdot \sin \varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

En analysant ces deux fonctions, nous remarquons que si ε tend vers 0 i.e. si l'effort normal est faible, les paramètres α et β tendent respectivement vers 2 et 1 qui sont les valeurs des équations constitutives de la méthode classique des rotations.

Sur les deux graphiques suivants, nous pouvons voir l'évolution des paramètres α et β en fonction du paramètre ε et N/N_E pour un élément comprimé.

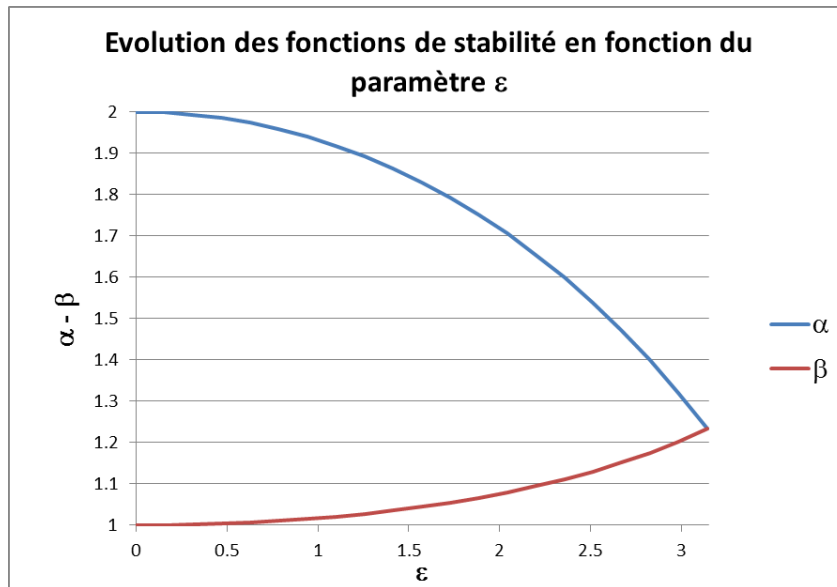


Figure 2.1- Evolution des paramètres de stabilité en fonction de ε

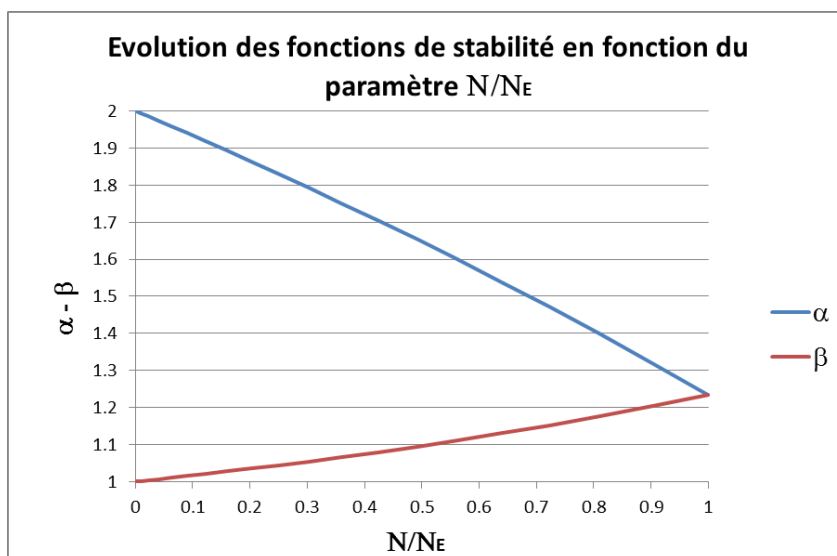


Figure 2.2 – Evolution des paramètres de stabilité en fonction de N/N_E

Dans le cas d'un élément tendu (la raideur augmente), les paramètres α et β sont définis par :

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon \cdot \cosh \varepsilon - \sinh \varepsilon)}{2(2 - 2 \cdot \cosh \varepsilon + \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon)} \quad (2.6)$$

$$\beta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \cdot (\sinh \varepsilon - \varepsilon)}{2(2 - 2 \cdot \cosh \varepsilon + \varepsilon \cdot \sinh \varepsilon)}$$

Dans le cas d'un élément comprimé et si nous considérons une charge répartie (q) sur l'élément (AB) de longueur (L), les moments d'encastrement (m_A et m_B) sont définis comme :

$$m_B = -m_A = \frac{q \cdot L^2}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2 \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right) \quad (2.7.a)$$

Nous remarquons également que lorsque le paramètre ε tend vers 0, nous retombons bien sur la valeur des moments d'encastrement de la méthode classique des rotations à savoir $\frac{q \cdot L^2}{12}$. En général, les efforts de compression étant relativement faibles dans les poutres, nous pouvons négliger l'influence de l'effort N sur les moments d'encastrement et les rigidités.

2.2.3 Méthode des rotations aménagée avec les fonctions de stabilité (P- δ et P- Δ).

Cette méthode nous permet d'inclure l'ensemble des effets du second ordre (global et local) en ajoutant la prise en compte des effets du second ordre global. L'intégration de ces effets P- Δ est réalisée en modifiant l'équation d'équilibre horizontal à chaque étage afin d'obtenir les déviations (ψ).

En fait, cette équation horizontale ne décrit plus l'équilibre de la structure dans sa configuration initiale mais bien dans sa configuration déformée pour tenir compte des effets P- Δ (voir Figure 2.3 et équation (2.7.b)). Pour rappel, les charges déforment la structure et engendrent des rotations de nœud et des déviations de barre. Les déviations (ψ) entraînent des déplacements latéraux entre étage et donc l'apparition d'effets du second ordre global en raison des charges normales (N) présentes en tête de colonnes.

Comme nous n'utilisons cette méthode que pour un élément isolé de la structure, nous pouvons simplement écrire l'équation d'équilibre de moments de l'élément dans sa configuration déformée.

En regardant la Figure 2.3, nous pouvons écrire l'équation supplémentaire (2.7.b) en réalisant l'équilibre de moment autour du nœud A.

$$M_A + M_B + Q_A \cdot H + N \cdot \psi \cdot H = 0 \quad (2.7.b)$$

Dans cette équation, le terme supplémentaire lié au moment du second ordre est donc $N \cdot \psi \cdot H$. En écrivant cette équation, nous faisons l'hypothèse de petites déformations en supposant que $\sin \psi$ tend vers ψ et que $\cos \psi$ tend vers 1.

2.2.4 Conclusion

Par le biais de la méthode des rotations aménagée avec les fonctions de stabilité, il est possible de déterminer les efforts au second ordre global et local d'un portique multi-étages et travées en tenant compte des hypothèses associées à cette méthode des rotations.

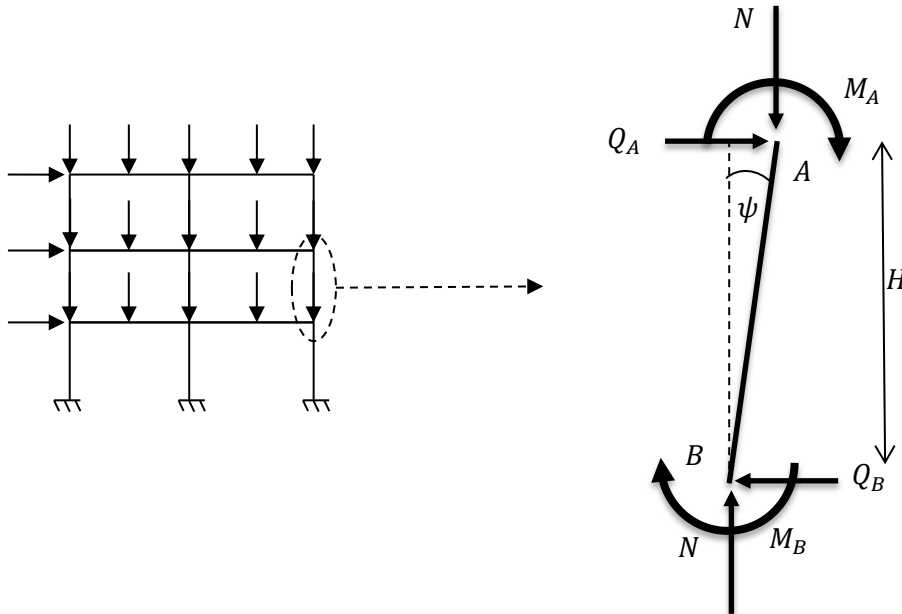


Figure 2.3-Equation d'équilibre dans la configuration déformée d'une barre isolée

Bibliographie : voir références [4] , [5] et [6]

3 Détermination de λ_{cr}

Nous allons discuter brièvement de la détermination du multiplicateur critique du premier mode d'instabilité globale de la structure. La détermination de ce paramètre est assez importante étant donné que la valeur du multiplicateur détermine l'amplification des moments « sway » ou des efforts horizontaux.

Pour rappel, le facteur d'amplification est

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} = \frac{V_{cr}}{V_{cr} - V_{ED}} \quad (2.8)$$

Nous remarquons immédiatement que plus le λ_{cr} est petit et plus l'amplification est grande. Pour $\lambda_{cr} = 10$, nous avons une amplification de 1.11 (une augmentation de 11 % des moments « sway » du premier ordre) et pour $\lambda_{cr} = 3$, nous avons une amplification de 1.5 (une augmentation de 50 % des moments « sway » du premier ordre).

3.1 Selon l'Eurocode 3

Dans l'Eurocode 3 (référence [1]) pour les ossatures planes de bâtiments de type poutre-poteau et si la compression dans les poutres n'est pas significative, nous pouvons calculer l' λ_{cr} comme suit:

$$\lambda_{cr} = \frac{H_{ED} \cdot h}{V_{ED} \cdot \delta_{HED}} \quad (2.9)$$

Où

H_{ED} est la résultante des forces horizontales au niveau inférieur de l'étage qui équilibre les charges horizontales réelles ou fictives appliquées au-dessus de l'étage considéré.

V_{ED} est la résultante totale des forces verticales au niveau de la partie inférieure de l'étage.

δ_{HED} est le déplacement horizontal relatif entre la partie inférieure et supérieure du niveau considéré. Ce déplacement est déterminé sur base d'une analyse élastique linéaire au 1^{er} ordre.

h est la hauteur de l'étage.

Nous comprenons mieux les différents paramètres de la formule (2.9) en regardant la Figure 2.4.

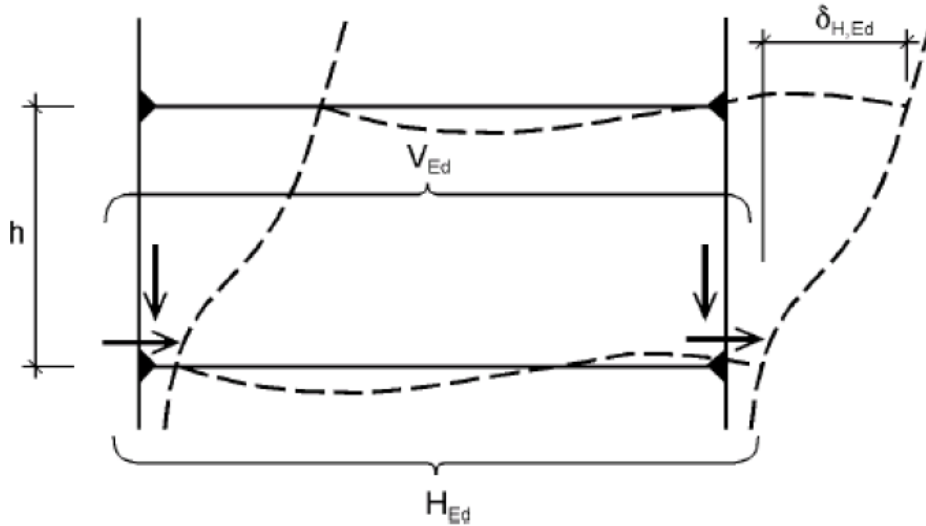


Figure 2.4-Schéma de structure déformée pour le calcul du multiplicateur critique global(référence[1])

Nous comprenons assez rapidement le sens de ce rapport comme étant le rapport entre le moment du premier ordre ($H_{ED} \cdot h$) et le moment supplémentaire dû au second ordre ($V_{ED} \cdot \delta_{H_{ED}}$) qui est lié à la déformation de la structure et à la charge verticale. Nous pouvons donc écrire selon l'Eurocode que ;

$$\lambda_{cr} = \frac{M_I}{M_{II}} \quad (2.10)$$

Nous constatons que plus le moment M_{II} est important par rapport à M_I et plus λ_{cr} diminue. Un faible λ_{cr} signifie que la structure est fort sensible à l'effet du second ordre global et que l'amplification des moments est grande.

A noter également que λ_{cr} est indépendant du chargement horizontal H_{ED} . En effet, le rapport $\frac{H_{ED}}{\delta_{H_{ED}}}$ caractérise la raideur de la structure lorsqu'une charge est appliquée de manière latérale.

3.2 Avec des programme OSSA2D ou Finelg

Nous pouvons aussi établir le λ_{cr} du premier mode d'instabilité d'ensemble de la structure en utilisant des programmes tel que OSSA2D ou un programme aux éléments finis tel que FINELG.

Les valeurs des multiplicateurs critiques des premiers modes d'instabilité sont en fait les valeurs propres de la matrice de rigidité qui constitue l'ensemble de la structure. Les programmes cités utilisent la méthode des déplacements pour résoudre l'ensemble de la structure. Chaque barre étant discrétisée en un certain nombre d'éléments, nous pouvons

déterminer, avec une certaine précision la valeur du multiplicateur critique du premier mode d'instabilité globale de la structure.

Dans la suite du mémoire, nous constaterons que les multiplicateurs critiques fournis respectivement par Finelg et OSSA2D sont assez proches l'un de l'autre. Tandis que le multiplicateur calculé selon l'Eurocode, nous fournis une valeur supérieure de λ_{cr} et donc un coefficient d'amplification (des moments « sway » ou charges horizontales) inférieur (insécuritaire).

3.3 Facteur d'amplification du second ordre $\left(\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}\right)$

La résolution au second ordre global d'une colonne encastree, soumise à une charge verticale (N) et horizontale (H) (voir la Figure 2.5) où le déplacement obtenu à l'équilibre au second ordre est Δ , s'établit comme suit :

Le moment au premier ordre est :

$$M^I = H.L \quad (2.11)$$

Le moment au second ordre est :

$$M^{II-\Delta} = H.L + N.\Delta = \frac{\tan \varepsilon}{\varepsilon} . M^I \text{ avec } \varepsilon = L \sqrt{\frac{N}{EI}} = \pi \sqrt{\frac{N}{N_E}} \text{ et } N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.12)$$

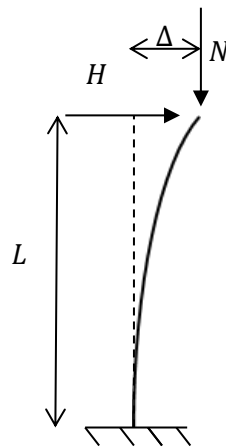


Figure 2.5 – Colonne encastree avec déformée à l'équilibre au second ordre

Le terme $\frac{\tan \varepsilon}{\varepsilon}$, facteur d'amplification du second ordre, peut être développé en série ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\tan \varepsilon}{\varepsilon} &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{2\varepsilon^4}{15} + \dots = 1 + \frac{\pi^2 N}{3 N_E} + \frac{2 \cdot \pi^4}{15} \left(\frac{N}{N_E}\right)^2 + \dots \\ &= 1 + 3.2899 \frac{N}{N_E} + 12.988 \left(\frac{N}{N_E}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le multiplicateur critique λ_{cr} vaut dans ce cas :

$$\lambda_{cr} = \frac{N_{cr}}{N} = \frac{\pi^2 EI}{L_f l^2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N_E}{4N} \text{ car } L_f l^2 = 2L \text{ (barre encastrée - libre)} \quad (2.14)$$

Le terme $\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}$ peut également être formulé comme une suite

$$\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}} = 1 + \frac{N}{N_{cr}} + \left(\frac{N}{N_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_{cr}}\right)^3 \dots = 1 + 4\frac{N}{N_E} + 16\left(\frac{N}{N_E}\right)^2 \quad (2.15)$$

Nous remarquons en fait que $\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}$ est une approximation sécuritaire du facteur $\frac{\tan \varepsilon}{\varepsilon}$ et ce développement établit l'origine du facteur d'amplification $\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}$.

Bibliographie : voir références [1] et [5]

4 Coefficient d'amplification (K) et de moment équivalent (C_m) - Élément sur deux appuis simples rotulés.

Dans cette section, nous allons définir les coefficients d'amplification K et de moment équivalent C_m en travée, afin de déterminer les moments au second ordre en travée incluant les effets P- δ d'un élément à nœuds fixes soumis aux actions extérieures.

4.1 Coefficient d'amplification (K) - Cas général

Soit un élément sur deux appuis simples rotulés et de longueur L. Cet élément est soumis à une charge transversale répartie non linéaire ainsi qu'à deux moments d'extrémités M_1 et M_2 . De plus, cet élément est sollicité axialement par un effort N.

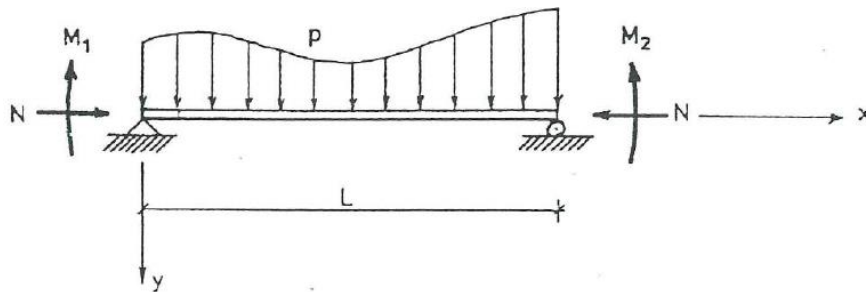


Figure 2.6- Élément bi-rotulé soumis à un chargement quelconque (référence [7])

Nous définissons le diagramme de moment primaire de l'élément créé par les forces extérieures, en considérant l'élément dans sa configuration initiale i.e non déformée. La configuration initiale peut inclure une imperfection de barre ($e_{0,d}$).

Ensuite, nous déterminons le diagramme de moment secondaire de l'élément créé par les forces extérieures qui agissent sur l'élément dans sa configuration déformée. En effet, le diagramme de moment primaire vient déformer l'élément. Cette déformation engendre des moments secondaires ($N.v(x)$, voir équation (2.16)) qui déforment l'élément et ainsi de suite jusqu'à trouver un nouvel équilibre entre les efforts intérieurs de l'élément (lié à la déformée de l'élément) et les forces, moments extérieurs.

Les nœuds étant fixes, nous nous rendons compte que le moment secondaire est en fait un moment du second ordre qui tient compte de l'instabilité de barre et donc de l'effet P- δ .

Nous pouvons obtenir le moment secondaire en considérant l'équation suivante :

$$M^{II-\delta}(x) = M^I(x) + N.v(x) = -EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (2.16)$$

Avec $M^I(x)$ étant le diagramme primaire sous la charge $p(x)$, les moments M_1 et M_2 et $v(x)$ (déformée finale à l'équilibre).

En dérivant deux fois, nous obtenons une équation différentielle du second ordre en termes de moments :

$$\frac{d^2 M^{II-\delta}(x)}{dx^2} + k^2 M^{II-\delta}(x) = \frac{d^2 M^I(x)}{dx^2} \text{ avec } k^2 = \frac{N}{EI} \quad (2.17)$$

La solution de l'équation se présente sous la forme suivante (avec la partie homogène et particulière).

$$M^{II-\delta}(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) + f(x) \text{ avec } k^2 = \frac{N}{EI} \quad (2.18)$$

Nous résolvons cette équation différentielle en déterminant les coefficients A et B sur base de la résolution de l'équation homogène ($\frac{d^2 M^{II-\delta}(x)}{dx^2} + k^2 M^{II-\delta}(x) = 0$) et grâce aux conditions limites. Nous réintégrons l'équation (2.18) (avec les coefficients A et B calculés) dans l'équation (2.17) pour obtenir la fonction $f(x)$.

Ensuite, nous obtenons le moment maximum en dérivant l'équation (2.18)

$$\frac{dM^{II-\delta}(x)}{dx} = Ak \cdot \sin(kx) + Bk \cdot \cos(kx) + \frac{df(x)}{dx} \quad (2.19)$$

Lorsque l'abscisse x du moment maximum est trouvée, nous obtenons le coefficient d'amplification K en faisant le rapport entre le moment maximum secondaire et le moment maximum primaire.

$$M_{max}^{II-\delta} = K \cdot M_{max}^I \quad (2.20)$$

4.2 Coefficient d'amplification (K) - Cas particulier

Nous allons étudier le cas d'un élément avec une courbure initiale

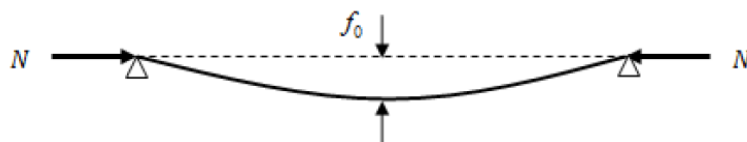


Figure 2.7 Elément bi-rotulé avec imperfection initiale à mi-travée (référence [7])

La déformée initiale ($v^I(x)$) peut être définie comme étant

$$v^I(x) = f_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ et donc } M_{max}^I = N \cdot f_0 \quad (2.21)$$

La déformée finale ($v(x)$) peut s'écrire comme suit

$$v(x) = f_{tot} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ et donc } M_{max}^{II-\delta} = N \cdot f_{tot} \quad (2.22)$$

Nous utilisons à nouveau l'équation (2.16) utilisée précédemment :

$$M^I(x) + N \cdot v(x) = -EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \text{ avec } M^I(x) = -EI \frac{d^2 v^I(x)}{dx^2} \quad (2.23)$$

Nous obtenons dès lors :

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{N}{EI} \cdot v(x) = EI \frac{d^2 v^I(x)}{dx^2} \quad (2.24)$$

En résolvant l'équation et en tenant compte des conditions limites, nous obtenons

$$f_{tot} = \frac{f_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \text{ avec } N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \quad (2.25)$$

et finalement :

$$M_{max}^{II-\delta} = K \cdot M_{max}^I \text{ avec } K = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (2.26)$$

En fonction du type de chargement, nous allons donc avoir des formulations de K différentes. Nous avons pris un autre exemple en considérant une poutre bi-rotulées soumise à deux moments d'extrémités. Il existe des tables avec différents coefficients d'amplification (référence[7])

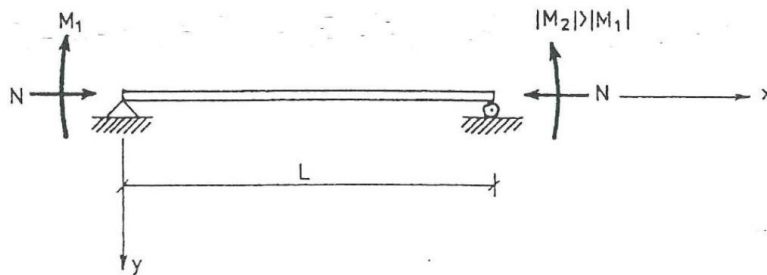


Figure 2.8-Élément bi-rotulés soumis aux moments d'extrémités (référence [7])

Le moment au second ordre local (effet P- δ) et le coefficient d'amplification sont :

$$M_{max}^{II-\delta} = K \cdot M_{max}^I = \text{avec } K = \frac{1 - \frac{2M_1}{M_2} \cos\left(\sqrt{\frac{N}{EI}}L\right) + \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{N}{EI}}L\right)} \text{ et } M_{max}^I = M_2 \quad (2.27)$$

4.3 Coefficient de moment équivalent (C_m) en travée

Nous précisons maintenant la notion de coefficient du moment équivalent C_m en travée. Afin de faciliter la détermination du moment secondaire maximum en travée, nous allons définir un coefficient équivalent C_m qui nous permet de nous ramener toujours au formalisme du K obtenu pour une poutre avec une déformation initiale sinusoïdale ($K = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$)

La définition du coefficient de moment équivalent C_m en travée est la suivante :

$$M_{max}^{II-\delta} = K \cdot M_{max}^I = \frac{C_m \cdot M_{max}^I}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (2.28)$$

Il est peut-être plus simple de comprendre la démarche en regardant la Figure 2.9. En effet, quelle que soit la forme du diagramme obtenu par l'application des actions extérieures, nous définissons un moment équivalent sinusoïdal plus simple ($M_{equi} = C_m \cdot M_{max}^I$) de telle manière que le moment maximum secondaire obtenu soit équivalent.

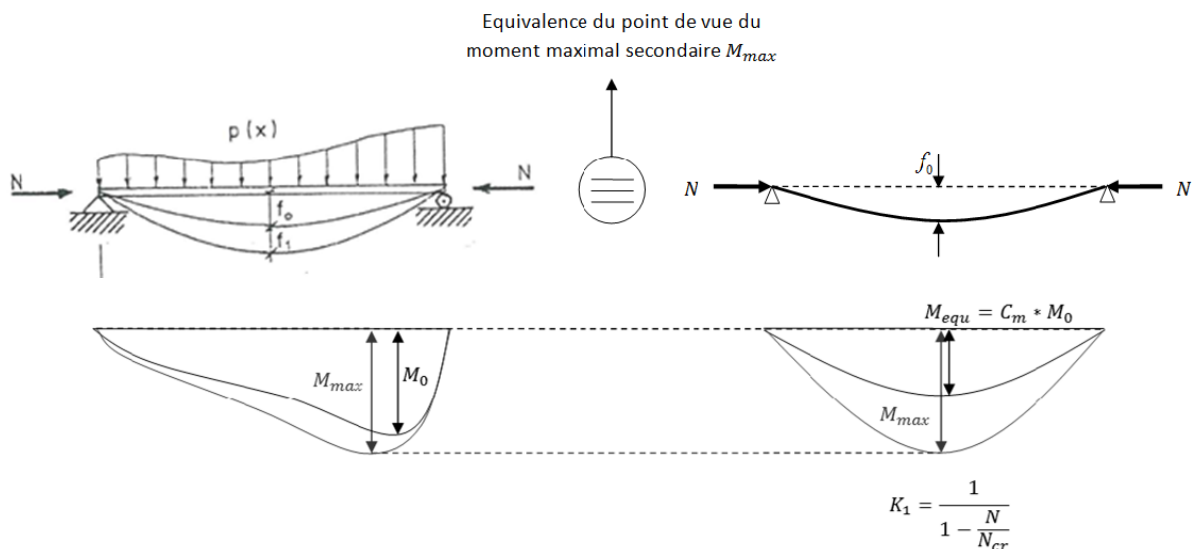


Figure 2.9-Schéma de principe de la définition du coefficient de moment équivalent (ref[7])

Sur la Figure 2.10, nous retrouvons l'ensemble des coefficients d'équivalence en travée pour les différents diagrammes des moments primaires possibles et pour un élément bi-rotulé sur appuis simples.

4.4 Conclusion

Pour déterminer le moment maximum en travée au second ordre local (effet P- δ) pour un élément bi-appuyé, nous utilisons la formulation suivante :

$$M_{max}^{II-\delta} = K \cdot M_{max}^I = \frac{C_{m,travée} \cdot M_{max}^I}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (2.29)$$

Où M_{max}^I est le moment maximum primaire agissant sur l'élément

$C_{m,travée}$ est le coefficient de moment équivalent qui est fonction du diagramme de moment primaire afin de se ramener à un moment équivalent sinusoidale ($M_{equi} = C_m \cdot M_{max}^I$).

$\frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$ est le coefficient d'amplification associée à un moment sinusoidal

Il est intéressant de remarquer que le moment primaire maximum (M_{max}^I) agissant sur l'élément peut provenir d'une analyse au second ordre globale approchée (effet P-Δ) lorsque le moment maximum primaire est un moment d'extrémité. Dans ce cas, lorsque nous appliquons l'amplification en travée (effet P-δ), nous obtenons le moment maximum en travée au second ordre complet (effet P-δ et P-Δ) :

$$M_{max}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m,travée} \cdot M_{max}^{II-\Delta}}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (2.30)$$

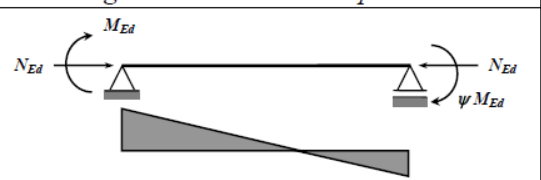
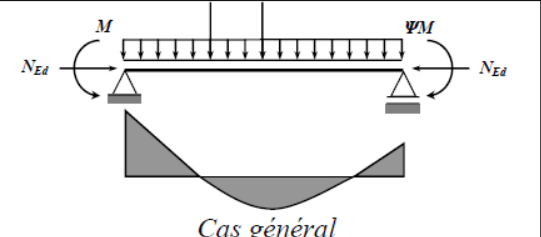
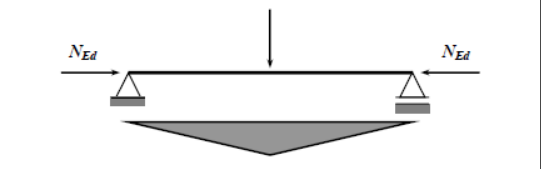
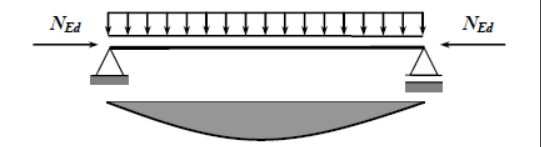
Diagramme des moments primaires	Coefficient d'équivalence
	$C_{mi} = 0,79 + 0,21\Psi_i + 0,36(\Psi_i - 0,33) \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$
 <p style="text-align: center;"><i>Cas général</i></p>	$C_{mi} = 1 + \left(\frac{\pi^2 EI_i \delta }{ M_{i,Ed}(x) L^2} - 1 \right) \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$ <p>$M_{i,Ed}(x)$ est le moment primaire maximum ($M_{y,Ed}$ ou $M_{z,Ed}$ pour $C_{m_y,0}$ et $C_{m_z,0}$ respectivement) δ est la flèche maximale due au diagramme de moment primaire (respectivement δ_z et δ_y pour $C_{m_y,0}$ et $C_{m_z,0}$)</p>
	$C_{mi} = 1 - 0,18 \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$
	$C_{mi} = 1 + 0,03 \frac{N_{Ed}}{N_{cr,i}}$

Figure 2.10- Coefficient de moment équivalent (référence [7])

Bibliographie : voir référence [7]

5 Coefficient d'amplification (K) et de moment équivalent (C_m) - Élément extrait du système

En réalité, lorsque nous étudions une structure, nous devons réaliser tout d'abord une analyse élastique de la structure. Cette analyse se fait au premier ordre ou au second ordre en fonction de la vérification du critère ($\lambda_{cr} \leq 10 \rightarrow \text{second ordre}$) ou non.

Si nous prenons en compte le second ordre, nous déterminons donc les moments aux extrémités au second ordre. En fonction du type de méthode d'analyse utilisé, nous pouvons déterminer les moments au second ordre global (P- Δ) ou complet (P- Δ et P- δ). Ensuite, nous réalisons une vérification des stabilités des barres isolées à nœuds fixes et une vérification des sections d'extrémités.

5.1 Moments aux extrémités au second ordre global (P- Δ)

La plupart des méthodes d'analyse au second ordre approché déterminent les moments aux extrémités des éléments en tenant compte de l'effet P- Δ . Il y a notamment la méthode Can, l'« amplified sway moment method » décrite par la suite, dans un chapitre ultérieur.

5.1.1 Élément sur appuis rotulés à nœuds fixes – $L_{fl}=L$ épure

En règle générale, lorsque nous isolons ces barres, nous supposons qu'elles sont bi-articulées avec une longueur de flambement égale à la longueur d'épure. C'est la manière habituelle utilisée par le praticien mais celle-ci n'est pas parfaitement correcte, nous en expliciterons la raison par la suite. Au niveau du chargement, nous avons les moments d'extrémités au second ordre global, l'effort normal qui provient de l'analyse au premier ordre ainsi que le chargement en travée de l'élément.

La représentation en est la suivante :

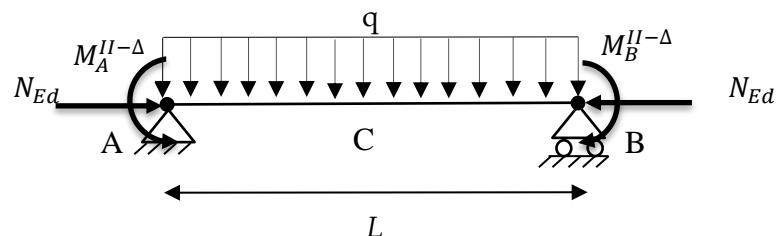


Figure 2.11-Extraction de l'élément comme bi-rotulés

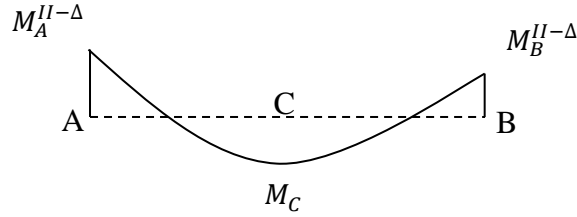


Figure 2.12-Diagramme de moment sollicitant dû aux efforts sollicitants

En travée, nous obtenons le moment maximum en utilisant la formule :

$$M_{max, travée}^{II-\Delta-\delta} = K \cdot M_{max} \text{ avec } K = \frac{C_{m, travée}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (2.31)$$

Avec $M_{max} = \max(|M_A^{II-\Delta}|; |M_B^{II-\Delta}|; |M_C|)$.

N_{Ed} = effort axial de compression

$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2}$ avec $L_{fl} = L$ car les appuis sont rotulés

$C_{m, travée}$ associé au diagramme de moment (voir Figure 2.10)

L'effort axial N_{Ed} provient soit de l'analyse élastique au premier ordre, soit de l'analyse élastique au second ordre. En réalité, tout dépend de la méthode utilisée.

Le $M_{max, travée}^{II-\Delta-\delta}$ est utilisé pour la vérification de la stabilité des barres.

Sur appuis, aux extrémités de la barre, nous avons donc le $M_{max, extrémité}^{II-\Delta} = \max(|M_A^{II-\Delta}|; |M_B^{II-\Delta}|)$ qui est utilisé pour la vérification des sections d'extrémités. En effet, les appuis étant rotulés, il n'y a aucune amplification sur appuis à cause de l'effet P- δ .

5.1.2 Élément sur appuis rotulés à nœuds fixes – $L_{fl} \neq L$ épure

En réalité, lorsque nous isolons l'élément de la structure, nous devons tenir compte des restraints (C_A et C_B), aux extrémités de l'élément, apportées par les jonctions des extrémités de celui-ci avec d'autres éléments de type poutre ou colonne. Étant donné que nous avons déterminé les moments d'extrémités au second ordre global (P- Δ), nous pouvons utiliser la longueur de flambement à nœuds fixes.

Dans ce cas, les effets (P- δ) liés à la déformée sous les actions extérieures et à l'effort normal vont influencer les moments aux extrémités ainsi que les moments en travée. Dans ce cas, nous devons déterminer un coefficient de moment équivalent pour la travée ($C_{m, travée}$) et un pour chaque extrémité ($C_{m, extr, A}$ et $C_{m, extr, B}$).

Schéma d'un élément de type

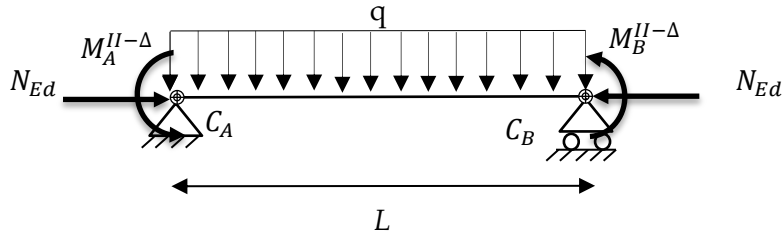


Figure 2.13 - Extraction de l'élément avec conditions d'appuis réelles (restreintes)

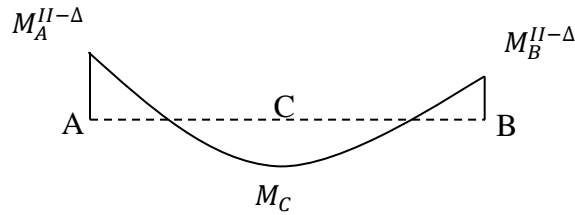


Figure 2.14 - Diagramme de moment dû aux efforts sollicitants

En travée, nous obtenons le moment maximum au second ordre complet :

$$M_{max, travée}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m, travée} \cdot M_{max}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (2.32)$$

Avec $M_{max} = \max(|M_A^{II-\Delta}|; |M_B^{II-\Delta}|; |M_C|)$.

N_{Ed} = effort axial de compression de l'analyse élastique

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \text{ avec } L_{fl} \text{ à noeuds fixes}$$

Aux extrémités de la barre, nous avons donc le moment maximum au second ordre complet

$$M_{max, extr, A}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m, extr, A} \cdot M_A^{II-\Delta}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (2.33)$$

Avec $M_A^{II-\Delta}$ = moment d'extrémité au second ordre global provenant de l'analyse ; N_{Ed} = effort axial de compression de l'analyse élastique et $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2}$ avec L_{fl} à noeuds fixes

Nous remarquons qu'avec cette méthode plus complexe, nous déterminons de manière plus précise les moments en travée et aux extrémités. En effet tous les effets du second ordre sont inclus tout en tenant compte des liaisons de l'élément avec d'autres éléments tel qu'une poutre-colonne.

Cependant, un problème survient au moment où nous devons calculer les coefficients de moments équivalents ($C_{m,travée}$, $C_{m,extr}$), difficiles à calculer car ils dépendent notamment de la raideur des restraints (C_A et C_B) et la détermination de ces dernières n'est pas non plus toujours aisée. Le calcul de ces paramètres ($C_{m,travée}$, $C_{m,extr}$) est le propos de la section 5.3.

5.2 Moment aux extrémités au second ordre complet (P- Δ - δ)

Certaines méthodes approchées d'analyse élastique au second ordre déterminent les moments aux extrémités des éléments en tenant compte de l'effet P- Δ et P- δ . Parmi celles-ci, il y a notamment la méthode CAM.

Dans le cas envisagé, lorsque nous isolons l'élément, nous supposons que les barres sont bi-articulées avec une longueur de flambement égale à la longueur d'épure. Les moments aux extrémités étant définis au second ordre complet, il n'y a donc plus aucune amplification à prendre en compte au niveau des extrémités.

Nous avons donc un élément de type

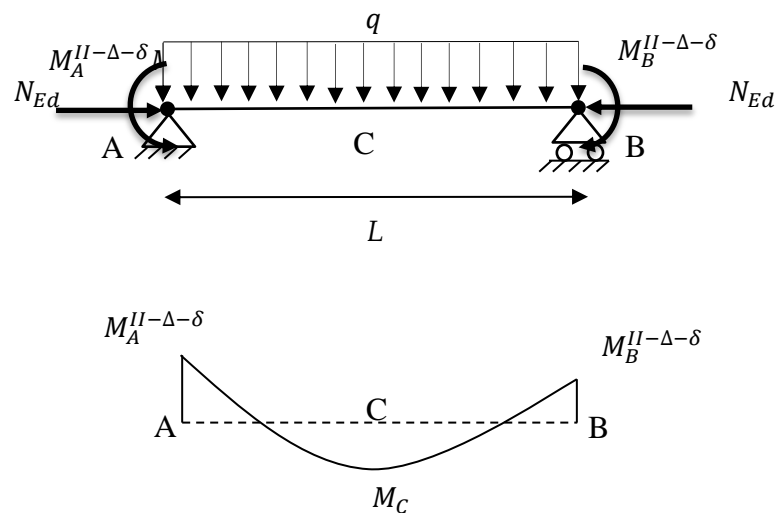


Figure 2.15 - Extraction de l'élément comme bi-rotulés et diagramme de moment sollicitant

En travée, nous obtenons le moment maximum en utilisant la formule :

$$M_{max, travée}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m, travée} \cdot M_{max}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \quad (2.34)$$

Avec $M_{max} = \max(|M_A^{II-\Delta-\delta}|; |M_B^{II-\Delta-\delta}|; |M_C|)$.

N_{Ed} = effort axial de compression de l'analyse élastique.

$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2}$ avec $L_{fl} = L$ car les appuis sont rotulés

$C_{m, travée}$ associé au diagramme de moments (voir tableau Figure 2.10)

Sur appuis, nous avons donc $M_{max, appuis}^{II-\Delta} = \max(|M_A^{II-\Delta-\delta}|; |M_B^{II-\Delta-\delta}|)$.

5.3 Calcul des coefficients $C_{m, travée}$ et $C_{m, appuis}$

Dans la littérature, il existe une grande quantité de coefficient C_m pour une barre articulée associée à divers diagrammes de moment (voir référence[7]). Il existe également toute une série de coefficient $C_{m, travée}$ et $C_{m, appuis}$ mais, à nouveau, pour des conditions d'appuis bien définies (articulé-encasté, bi-encasté, ...). Il est très rare d'en trouver pour une barre avec deux restraints car le coefficient C_m dépend de la valeur de chacune des deux restraints (C_A et C_B) et évidemment du facteur $n_{cr} = N_{Ed}/N_{cr}$.

5.3.1 Détermination sur base d'éléments finis

Nous avons repris le cas suivant issu de (référence [8])

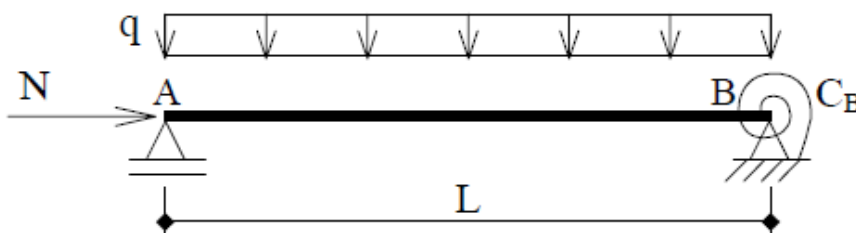


Figure 2.16-Barre sur un appui rotulé et un restreint (reference [8])

La Figure 2.17 représente les coefficients $C_{m, travée}$ et $C_{m, appuis}$ en fonction du rapport $n_{cr} = N_{Ed}/N_{cr}$. Plusieurs courbes sont tracées en fonction du $c_B = C_B L/EI$ qui varie de 0 ; 3 ; 10 ; 20 ; ∞ . Dans le cas où $c_B = 0$, l'élément est donc simplement bi-appuyé et quand $c_B = \infty$, l'élément est donc simplement appuyé à une extrémité et encasté à l'autre. Pour rappel, en fonction du c_B , la longueur de flambement varie de L ($c_B = 0$) à 0.7 L ($c_B = \infty$).

Le graphique ci-après est généré sur base d'une modélisation par éléments finis en faisant varier le rapport n_{cr} ainsi que la restrainte C_B .

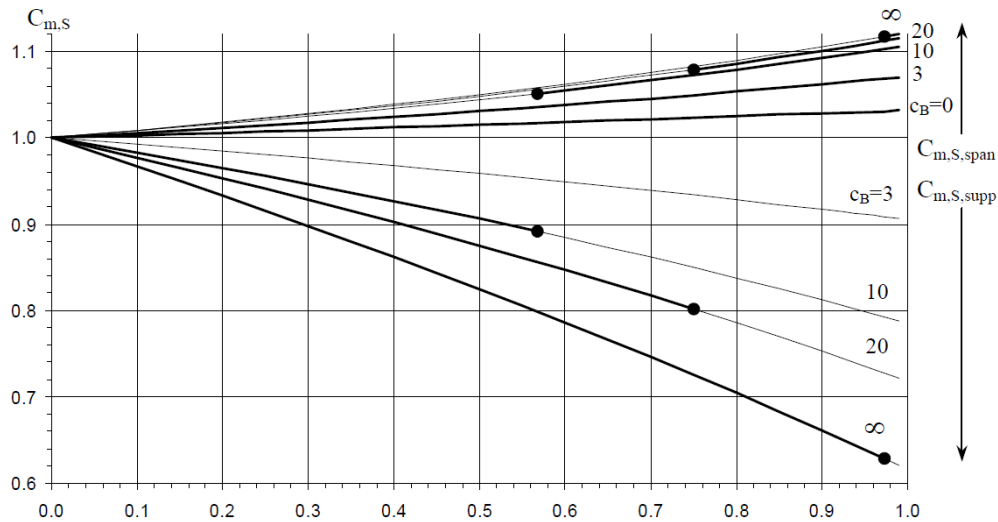


Figure 2.17- Evolution des coefficients ($C_{m,span}$ et $C_{m,supp}$) en fonction de $n_{cr} = N_{Ed}/N_{cr}$ (reference [8])

Pour rappel, les coefficients de moments équivalents sont définis comme étant :

$$C_{m,travée} = \frac{M_{max,travée}^{II}}{M_{max,travée}^I} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right) \quad (2.35)$$

$$C_{m,extr} = \frac{M_{max,extr}^{II}}{M_{max,extr}^I} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right) \quad (2.36)$$

Avec M_{max}^{II} = moment secondaire qui tient compte de l'effet P- δ par rapport au moment primaire et M_{max}^I = moment primaire qui peut être un moment du premier ordre ou du second ordre global (effet P- Δ) .

Dans le cas d'un chargement donné et d'appuis sans restraints, les courbes sont générées comme sur la Figure 2.17 et sont ensuite interpolées afin de définir une formule analytique qui varie selon N_{ED}/N_{cr} (voir Figure 2.10)

5.3.2 Détermination sur base de la méthode des rotations

Il est possible de déterminer les $C_{m,extr}$ en utilisant la méthode des rotations aménagées avec fonctions de stabilité. Cependant, cette méthode ne permet pas de définir les $C_{m,travée}$.

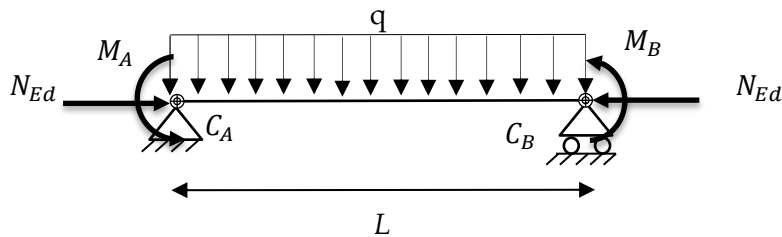


Figure 2.18 - Extraction de l'élément avec conditions réelles d'appuis (restreintes)

Nous ne réalisons pas les détails de la démarche, celle-ci étant explicitée dans le chapitre suivant, nous n'en reprenons que le résultat final :

$$K_{extr} = \frac{M_{max,extr}^{II}}{M_{max,extr}^I} = \frac{-(M_B + m_{enc,qB}) + \frac{C_B}{R_1} \frac{(M_B + m_{enc,qB}) - \frac{\beta \cdot (M_A + m_{enc,qA})}{C_A/R_1 + \alpha}}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_A/R_1 + \alpha}}}{-(M_B + m_{enc,qB}^*) + \frac{C_B}{R_1} \frac{(M_B + m_{enc,qB}^*) - \frac{(M_A + m_{enc,qA}^*)}{C_A/R_1 + 2}}{C_B/R_1 + 2 - \frac{1}{C_A/R_1 + 2}}} \quad (2.37)$$

Le coefficient K_{extr} est le coefficient d'amplification du moment d'extrémité qui inclut les effets P- δ . Nous pouvons obtenir $C_{m,extr}$ en utilisant la formule :

$$C_{m,extr} = K_{extr} \cdot \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right) \quad (2.38)$$

Dans lequel :

- α et β sont les paramètres liés aux fonctions de stabilité et dépendants de $\varepsilon = L \sqrt{\frac{N_{Ed}}{EI}}$
- $m_{enc,qA}$ et $m_{enc,qB}$ les moments d'encastrement liés à la charge q et aux fonctions de stabilité.
- $m_{enc,qA}^*$ et $m_{enc,qB}^*$ les moments d'encastrement liés à la charge q
- C_A et C_B les restreintes du modèle
- $R_1 = 2 \frac{EI}{L}$ la raideur flexionnelle de l'élément

Dans le cas d'une charge q transversale répartie, nous avons

$$m_{enc,qA} = \frac{q \cdot L^2}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2 \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right) \quad (2.39)$$

$$m_{enc,qB} = -\frac{q \cdot L^2}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2 \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right) \quad (2.40)$$

$$m_{enc,qA}^* = +\frac{q \cdot L^2}{12} \quad (2.41)$$

$$m_{enc,qB}^* = -\frac{q \cdot L^2}{12} \quad (2.42)$$

Bibliographie : voir reference [5],[7] et [8]

Chapitre 3 : Méthode d'analyse élastique approchée au second ordre

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons examiner les méthodes d'analyse élastique approchées au second ordre décrites dans les codes ou dans la littérature. Les méthodes présentées sont l'« Amplified Sway Moment Method » (ASMM), la méthode Can ainsi que la version modifiée de cette méthode que nous nommons CAM, cette dernière ayant fait l'objet d'un mémoire (référence [6]). Pour finir, nous présenterons brièvement la méthode B1-B2.

2 Amplified Sway Moment Method (ASMM)

Afin de déterminer les efforts approchés au second ordre dans une structure, nous considérons dans un premier temps une première structure à nœuds fixes (« non sway ») ayant ajouté un appui à chaque étage afin de bloquer latéralement les nœuds de la structure (voir Figure 3.1). Ensuite, nous calculons les réactions R présentes à chaque appui ainsi que les moments « non sway » (M_{NS}) sous l'ensemble du chargement (vertical et horizontal) sur base d'une analyse au premier ordre.

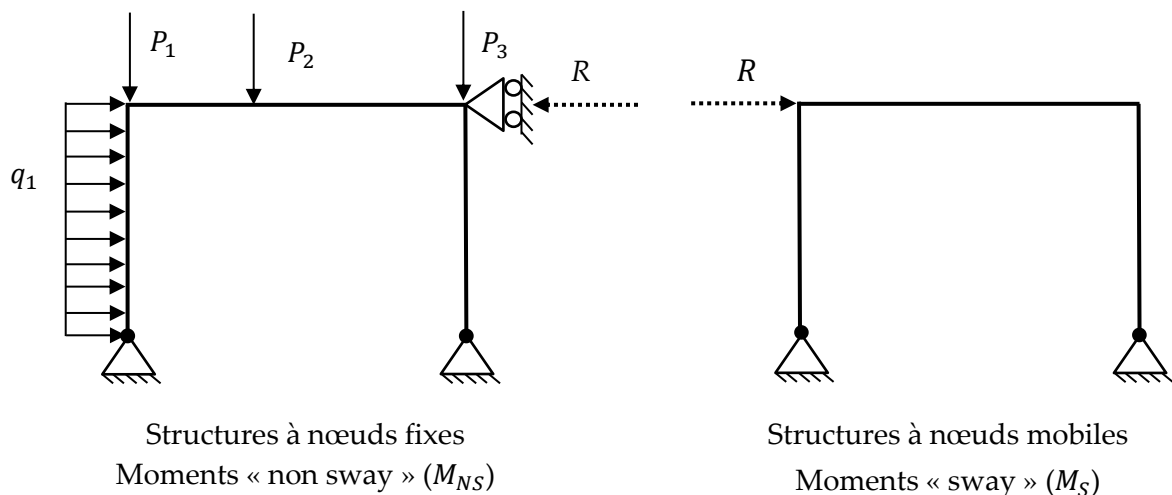


Figure 3.1- Chargement de la structure « sway » et « non sway » de la méthode ASMM

Les réactions R tiennent compte de l'ensemble des charges horizontales mais aussi des efforts horizontaux qui sont induits lorsque le chargement et/ou la géométrie sont non-symétriques.

Dans un second temps, nous analysons la structure à nœuds mobiles (« sway ») sur laquelle nous venons d'appliquer uniquement les réactions R horizontales à chaque étage. Les

réactions R déforment latéralement la structure et engendrent les effets du second ordre global.

Les moments calculés sous ces réactions sont définis comme étant les moments « sway » (M_S), la structure étant à nœuds mobiles (« sway »). Pour les déterminer, nous réalisons une analyse élastique au premier ordre. Afin de prendre en compte les effets du second ordre, ces moments « sway » sont amplifiés par le facteur suivant :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{V_{Ed}}{V_{cr}}} \quad (3.1)$$

Le multiplicateur critique utilisé est bien le multiplicateur critique associé au premier mode d'instabilité d'ensemble. Pour rappel, la valeur du multiplicateur critique d'ensemble est liée au chargement vertical et à la raideur latérale de la structure (voir équation (2.9)).

Au final, nous combinons linéairement les moments des deux analyses (« sway » et « non sway ») afin d'obtenir les moments au second ordre dans la structure. Nous pouvons additionner ces analyses car nous réalisons deux analyses élastiques au 1^{er} ordre et donc le principe de superposition est licite. Les moments au second ordre global dans la structure sont définis comme :

$$M_{II}^{P-\Delta} = M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \cdot M_S \quad (3.2)$$

Où

$$3 \leq \lambda_{cr} \leq 10$$

Le domaine de validité de la méthode est assez large. En effet, lorsque le multiplicateur critique est plus grand que 10, une analyse au second ordre n'est pas nécessaire. Si le multiplicateur critique est inférieur à 3, l'analyse élastique exacte au second ordre avec un programme élément fini tel que FINELG est requise. Cependant, il est assez rare de travailler avec des structures aussi élancées ou fortement chargées.

Remarquons également, qu'au lieu de multiplier les moments « sway » par le facteur d'amplification, il est possible de directement multiplier la réaction R par ce facteur afin d'obtenir les moments « sway » amplifiés. Les deux approches sont similaires en raison du principe de superposition.

Bibliographie : voir références [1] et [6]

3 Méthode Can

La méthode Can est une méthode qui vient du code Canadien et qui se rapproche fortement de « l'amplified moment sway method » définie dans l'Eurocode. Cette méthode permet de déterminer les efforts au second ordre global dans une structure.

Tout d'abord, nous définissons une structure à nœuds fixes (« non sway ») qui n'est plus soumise à l'ensemble du chargement mais seulement au chargement vertical gravitaire. La réaction R est donc nulle sauf si le chargement ou/et la géométrie sont non-symétriques. Ensuite, nous considérons une deuxième structure à nœuds mobiles (structure sway) sur laquelle nous appliquons l'ensemble du chargement horizontal et les réactions R en tête de chaque étage.

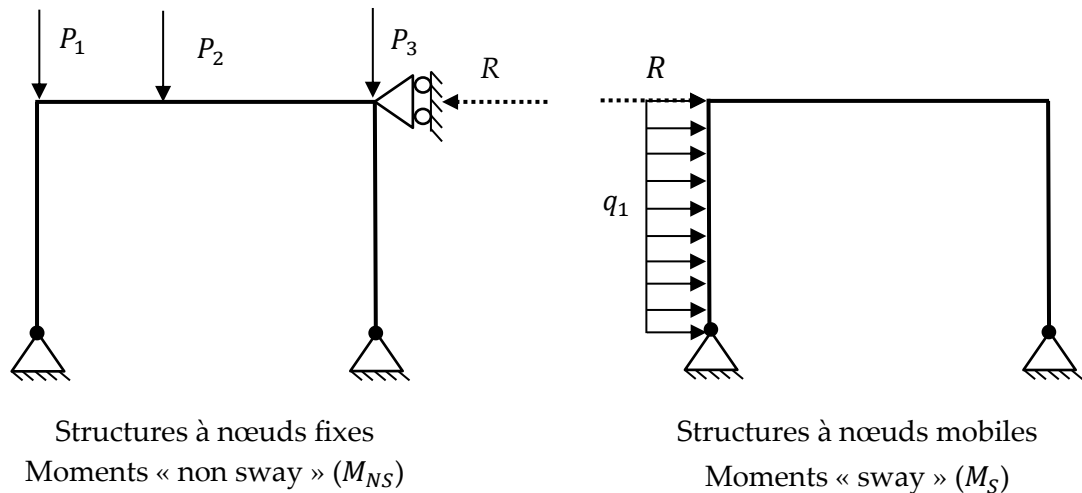


Figure 3.2 Chargement de la structure « sway » et « non sway » de la méthode ASMM

Pour les deux cas de charges, nous réalisons une analyse élastique au premier ordre. En les additionnant et en multipliant les moments de la structure « sway » par le coefficient d'amplification du second ordre global, nous obtenons les moments dûs au chargement de la structure au second ordre global (effet P- Δ).

$$M_{II}^{P-\Delta} = M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (3.3)$$

Cette dernière méthode semble plus précise que l'ASMM car, lorsque les efforts horizontaux sont sous la forme d'une charge répartie, ils ne sont pas concentrés en une seule réaction ponctuelle (qui est amplifiée par le multiplicateur critique) au contraire de l'ASMM.

Bibliographie : voir référence [6]

4 Méthode CAM

La méthode CAM est une méthode d'analyse au second ordre complet qui se base sur la méthode Can. Cette méthode Can est modifiée afin d'inclure, en plus de l'effet du second ordre global (effet P- Δ), les effets du second ordre local (effet P- δ) en vue d'obtenir les moments aux extrémités de manière exacte. La détermination de ces moments a fait l'objet de l'ensemble du travail de fin d'étude de Mr T.Hansoulle (référence [6]).

La méthode d'analyse est similaire à la méthode Can. Nous réalisons deux analyses élastiques au premier ordre que nous combinons linéairement afin d'obtenir les moments sway et non sway. Les moments sway sont amplifiés par le facteur $\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_{cr}}}$ afin de tenir compte du second ordre global.

En utilisant cette méthode, apparaissent deux coefficients d'amplification K_{extr}^* et K_{extr} qui multiplient respectivement les moments sway et non sway afin de tenir compte des effets P- δ . En effet, le second ordre local influence bien les moments aux extrémités d'une structure à nœuds fixes ou mobiles. La formule permettant l'obtention des moments au second ordre complet est la suivante :

$$M_{II}^{P-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{NS} + K_{extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (3.4)$$

Pour déterminer les coefficients d'amplification K_{extr}^* et K_{extr} , nous définissons deux modèles d'éléments équivalents dont le premier est à nœuds fixes (pour l'amplification des moments « non sway ») et le second est à nœuds mobiles (pour l'amplification des moments « sway »). Les modèles équivalents créés nous permettent, par le biais de la méthode des rotations aménagées avec fonctions de stabilité, de déterminer les moments aux extrémités de l'élément en tenant compte des effets P- Δ et P- δ et, in fine, de calculer les coefficients d'amplification K_{extr}^* et K_{extr} . L'explication détaillée de cette méthode sera décrite dans le chapitre suivant.

Il est important de noter que les coefficients K_{extr}^* et K_{extr} sont donc différents pour chaque barre de la structure et que cette méthode nécessite de les déterminer pour toutes les barres qui la constituent, afin d'obtenir les moments au second ordre complet aux deux extrémités de la barre.

Bibliographie : voir référence [6] et [9]

5 Méthode B1-B2

Cette méthode qui provient du code Américain (AISC), est assez similaire à la méthode CAM au niveau de sa formulation. Cette méthode tient également compte des effets du second ordre local et global.

A nouveau, la méthode d'analyse est similaire à la méthode Can. Nous réalisons deux analyses élastique au premier ordre afin d'obtenir les moments « sway » et « non sway » (Figure 3.3).

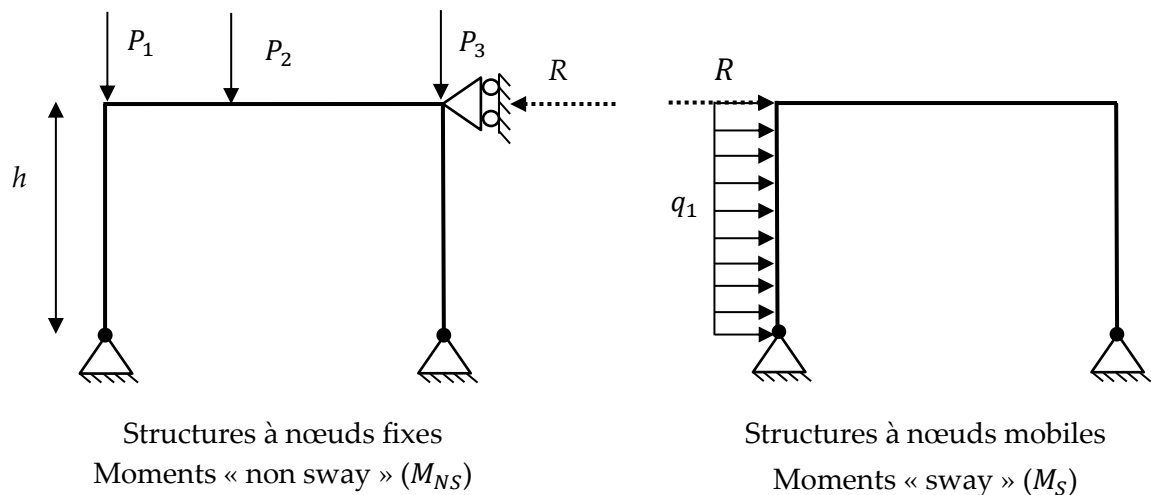


Figure 3.3-Chargement de la structure « sway » et « non sway » de la méthode B1-B2

La recombinaison des moments est faite avec la formule suivante :

$$M_{II}^{P-\Delta-\delta} = B_1 \cdot M_{NS} + B_2 \cdot M_S \quad (3.5)$$

Avec

$$B_1 = \frac{C_M}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \geq 1 \text{ avec } C_M = 0,6 + 0,4 \cdot \frac{M_1}{M_2} \quad (3.6)$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta \sum N}{h \sum F}} \quad (3.7)$$

Le terme B_2 est un terme fort similaire au terme $\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}$ où le multiplicateur critique est calculé comme $\lambda_{cr} = \frac{h \sum F}{\Delta \sum N}$ avec h la hauteur d'étage, Δ le déplacement latéral relatif entre les deux niveaux de l'étage considéré, $\sum F$ la somme des efforts horizontaux et $\sum N$ la somme des efforts verticaux. Cette formulation ressemble beaucoup au calcul du multiplicateur critique λ_{cr} selon l'Eurocode 3 (voir équation(2.9)). Ce terme inclut les effets du second ordre global sur la détermination des moments « sway » d'extrémités mais n'inclut pas les effets P- δ .

Le terme B_1 est un terme fort similaire à celui utilisé dans les méthodes de vérification de stabilité d'éléments afin d'obtenir le moment maximum en travée (et non aux extrémités...) sur base d'une structure à nœuds fixes. Nous avons le terme $\frac{1}{1-N/N_{cr}}$ qui tient compte de l'amplification du moment dû à l'effet P- δ car N_{cr} est calculé avec les longueurs de flambement à nœuds fixes. Ensuite, il y a le terme C_m qui est un coefficient de moment équivalent qui tient compte de la forme du diagramme des moments par le biais de $\psi \left(= \frac{M_1}{M_2} \right)$ tel que $(-1 \leq \psi \leq 1)$ et $M_1; M_2$ étant les moments aux extrémités de l'élément.

Comme pour la méthode Can, le coefficient B_1 est différent pour chaque barre car il dépend de la forme du diagramme des moments, de l'effort normal (N) et de la charge critique axiale (N_{cr}) de la barre. Il est donc nécessaire de les déterminer pour chaque barre qui constitue la structure afin d'obtenir les moments au second ordre complet à chaque extrémité de barre.

Bibliographie : voir référence [6] et [9]

6 Conclusion

Nous remarquons qu'il existe un certain nombre de méthodes d'analyse élastique approchées au second ordre. Au chapitre suivant, nous investiguerons plus en profondeur la méthode CAM. Nous utiliserons également la méthode Can qui sera déclinée sous la forme de trois variantes lors de la phase de vérification.

La méthode ASMM ne sera pas retenue car elle est fort similaire à la méthode Can qui semble plus précise car elle ne concentre pas l'ensemble des efforts horizontaux en une charge ponctuelle.

De même, la méthode B1-B2 ne sera pas considérée car fort proche de la méthode CAM. En outre, celle-ci ne tient pas compte des effets du second ordre local sur la détermination des moments « sway » au contraire de la méthode CAM.

Chapitre 4 : Méthode CAM

1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la méthode CAM, permettant de déterminer les moments aux extrémités des éléments en tenant compte des effets P- Δ et P- δ .

Pour rappel, nous obtenons les moments d'extrémités au second ordre complet en utilisant la formule :

$$M_{II}^{P-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{NS} + K_{extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (4.1)$$

Avec M_S = moment d'extrémité provenant de l'analyse élastique au premier ordre de la structure sway (à nœuds mobiles)

M_{NS} = moment d'extrémité provenant de l'analyse élastique au premier ordre de la structure non-sway (à nœuds fixes)

$$\frac{1}{1 - 1/\lambda_{cr}} = \text{coefficient d'amplification des moments d'extrémités lié à l'effet P-}\Delta$$

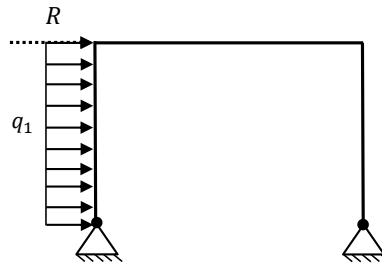
Dans ce chapitre, nous allons examiner les modèles d'éléments équivalents « sway » (à nœuds mobiles) et « non-sway » (à nœuds fixes) en vue de déterminer les coefficients d'amplification K_{extr}^* et K_{extr} liés à l'effet P- δ .

2 Création des modèles d'éléments équivalents « sway » et « non sway »

Nous devons isoler chaque poteau de la structure en définissant un modèle équivalent. Nous allons progressivement complexifier la structure afin de comprendre le rôle tenu par chaque élément du modèle. La structure étudiée est soumise à un chargement vertical symétrique et à un chargement horizontal modélisé par une charge répartie.

2.1 Modèle d'élément équivalent « sway » (K_{extr})

Nous allons déterminer le modèle d'élément équivalent « sway » (à nœuds mobiles) pour spécifier les coefficients d'amplification (K_{extr}). Pour rappel, ce coefficient multiplie les moments « sway » (M_S) obtenus par une analyse élastique du premier ordre de la structure comprenant les charges horizontales appliquées et la réaction R (Figure 4.1).



Structures à nœuds mobiles
Moments « sway » (M_S)

Figure 4.1 – Chargement horizontal de la structure sway

2.1.1 Portique symétrique avec poutre infiniment rigide

Le portique étant symétrique au niveau du chargement et les colonnes étant de même inertie, nous pouvons définir un élément équivalent qui reprend la moitié des charges verticales et horizontales. La poutre infiniment rigide peut être modélisée par un encastrement sur rouleaux car l'angle de rotation de la jonction colonne-poutre est nul.

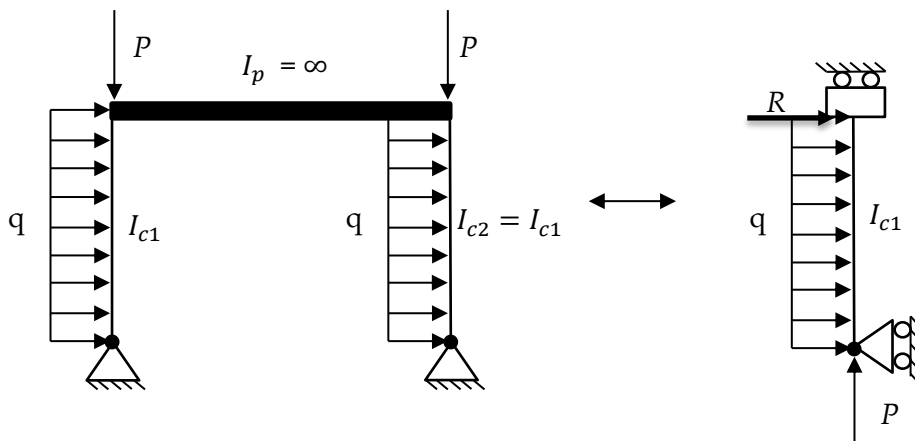


Figure 4.2 –Modèle sway avec poutre infiniment rigide et colonnes de même inertie

Sur le modèle, nous appliquons comme chargement horizontal, la charge répartie q et la charge R . Cette charge R est la réaction d'appui de l'étage provenant de l'analyse de la structure non sway.

2.1.2 Portique non-symétrique avec poutre infiniment rigide

Le portique étant constitué de colonnes d'inertie inégale, l'effort horizontal se répartit entre les deux colonnes au prorata de leurs raideurs latérales. Pour tenir compte de la raideur de la colonne 2, nous définissons un ressort K équivalent à la raideur latérale de la colonne 2 étant donné que la poutre est infiniment rigide. L'inertie de la colonne 2 étant plus importante que celle de la colonne 1, une plus grande partie de l'effort horizontal est repris par la colonne 2, la raideur appelant l'effort.

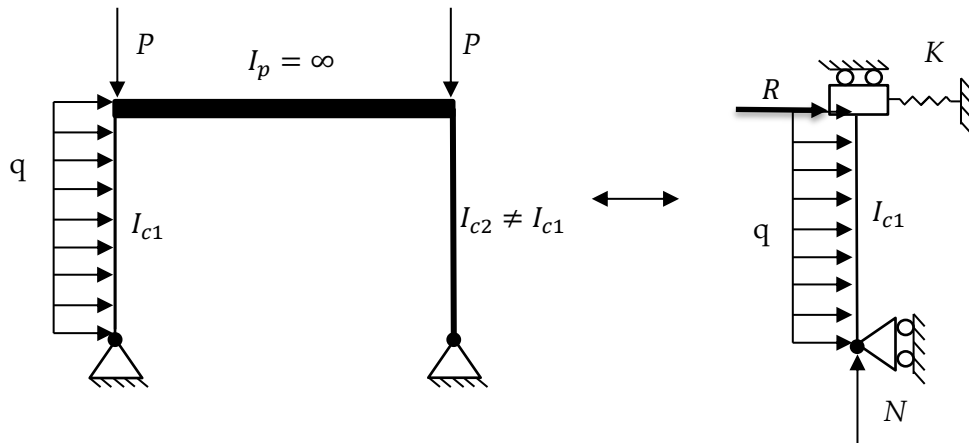


Figure 4.3 - Modèle sway avec poutre infiniment rigide et colonnes d'inertie différente

Une modification d'inertie de la colonne 2 entraîne un changement de raideur du ressort. Nous pouvons dès lors définir une inertie assez importante pour la colonne 2 afin de modéliser un portique à travées multiples où K représente la raideur latérale de l'ensemble de la structure moins la raideur latérale de la colonne du modèle. Cette approche nous permet de simplifier l'analyse en substituant le portique à travées multiples par un portique à une seule travée.

2.1.3 Portique non-symétrique avec poutre flexible

La poutre étant flexible, l'angle de rotation de la liaison colonne-poutre varie et nous ajoutons un élément de restrainte (C_1) à notre modèle. La valeur de cette restrainte est liée à la flexibilité de la poutre et à l'inertie de la colonne 2. Pour rappel, nous supposons que les connections sont rigides entre les différents éléments. Si elles étaient semi-rigides, elles réduiraient la valeur de la restrainte (C_1).

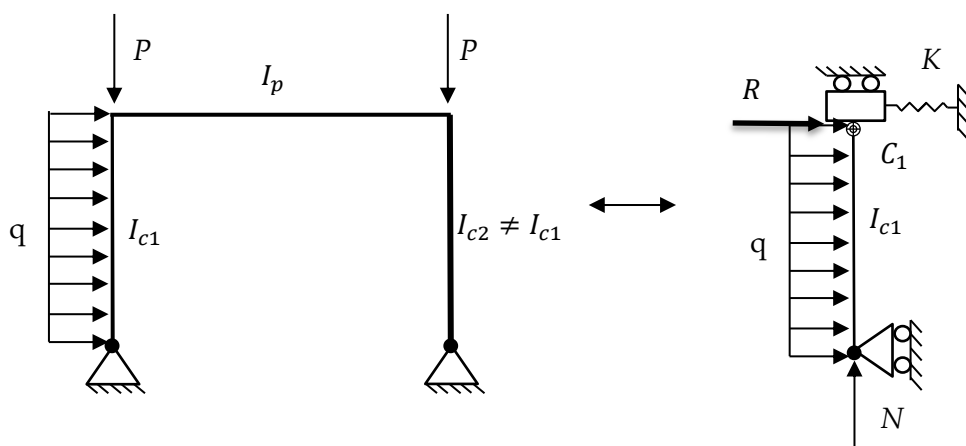


Figure 4.4 - Modèle sway avec poutre flexible et colonnes d'inertie différente

2.1.4 Portique multi-étages non-symétrique avec poutre flexible

En définissant un portique multi-étages avec poutres flexibles, nous ajoutons dans ce cas une deuxième restreinte (C_2) en pied de colonne selon que nous étudions une colonne du premier ou du deuxième étage. La raideur du ressort est définie comme étant la raideur de l'ensemble de l'étage étudié moins la raideur transversale de la colonne du modèle.

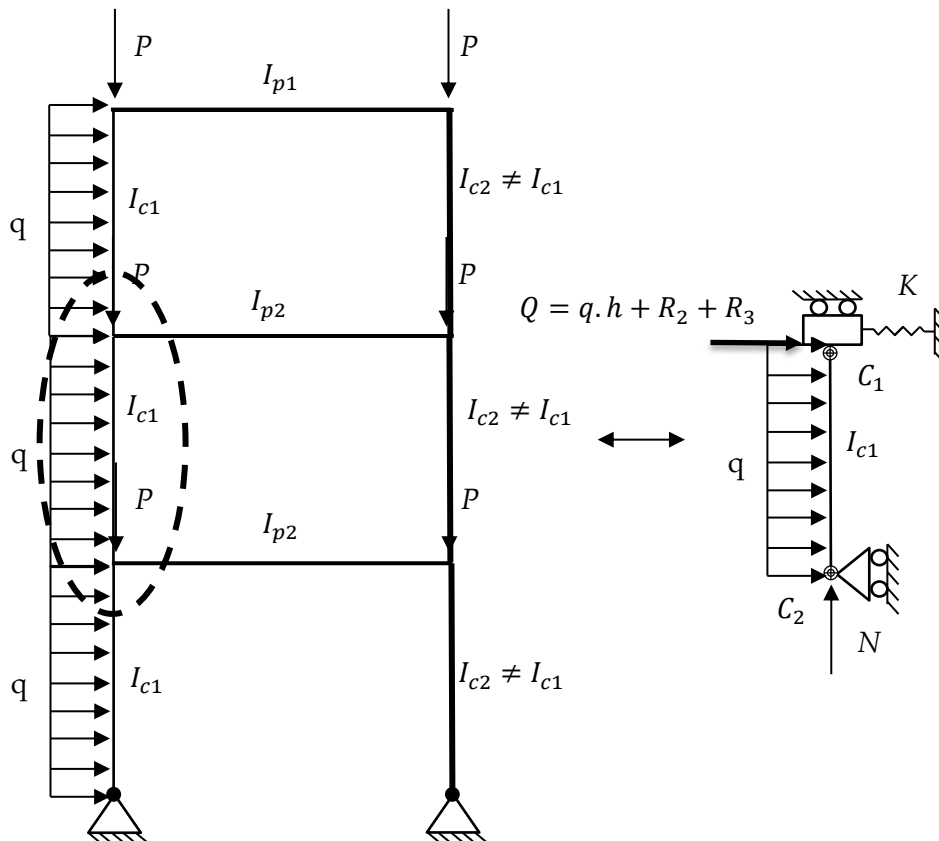
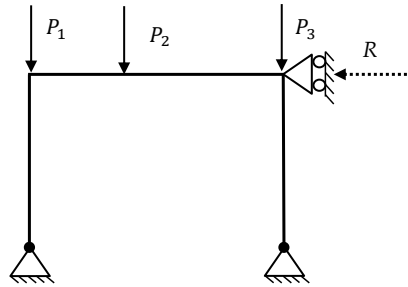


Figure 4.5 - Modèle général équivalent « sway »

Sur le modèle, nous appliquons au niveau du chargement horizontal, la charge répartie q ainsi que la charge ponctuelle Q . Cette charge Q reprend la somme des efforts horizontaux appliqués au-dessus de l'étage 2 (sur l'exemple) ainsi que les réactions R_2 et R_3 qui sont les réactions d'appui des étages 2 et 3, provenant de l'analyse de la structure « non sway ».

2.2 Modèle d'élément équivalent « non sway » (K_{extr}^*)

Nous devons également créer un modèle pour l'analyse de la structure « non-sway » afin de tenir compte de l'effet du second ordre local sur la détermination des moments d'extrémités « non sway ». Pour rappel, les moments « non sway » sont obtenus en réalisant une analyse élastique au premier ordre avec l'ensemble du chargement vertical.



Structures à nœuds fixes
Moments « non sway » (M_{NS})

Figure 4.6 – Chargement gravitaire de la structure à nœuds fixes

Nous créons directement le modèle général avec la présence de deux contraintes (C_1 et C_2) et les moments provenant de l'analyse non-sway (m_A et m_B).

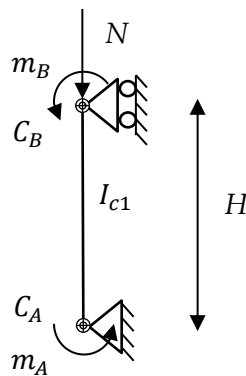


Figure 4.7 – Modèle général équivalent d'élément « non sway »

3 Détermination du coefficient K_{extr}

Dans cette section, nous allons déterminer les formules des coefficients K_{extr} pour les différents modèles établis précédemment. Afin de pouvoir réutiliser certains développements du mémoire de T.Hansoulle (référence [6]) et P.Lomba(référence [9]), nous allons faire l'étude d'un portique soumis à un chargement vertical symétrique et un chargement horizontal modélisé par une force ponctuelle horizontale .

3.1 Portique symétrique avec poutre infiniment rigide

Nous allons à présent définir les équations générales qui régissent le modèle.

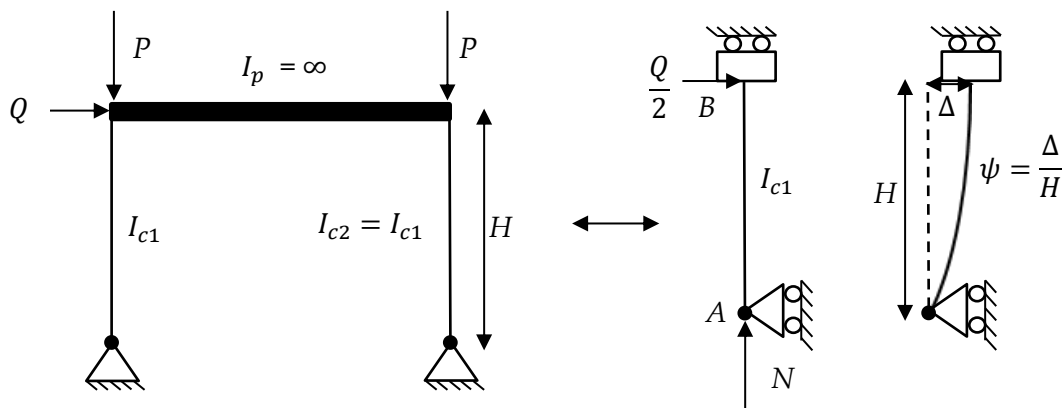


Figure 4.8 –Modèle avec poutre infiniment rigide et colonnes de même inertie

La structure étant isostatique, nous déterminons le moment du premier ordre par :

$$M_B^I = H \cdot \frac{Q}{2} \quad (4.2)$$

Les équations générales, qui proviennent de la méthode des rotations aménagée avec fonction de stabilité, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} M_A &= m_A + R_1(\alpha \cdot \phi_A + \beta \cdot \phi_B - (\alpha + \beta) \cdot \psi) \\ M_B &= m_B + R_1(\beta \cdot \phi_A + \alpha \cdot \phi_B - (\alpha + \beta) \cdot \psi) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{M_A + M_B}{H} = \frac{Q}{2} + N \cdot \frac{\Delta}{H} = \frac{Q}{2} + N \cdot \psi$$

Avec

$$R_1 = 2 \frac{E \cdot I_{c1}}{L} = \text{raideur flexionnelle}$$

Les termes m_A et m_B sont les termes d'encastrement liés au chargement en travée et aux conditions d'appui de la colonne. Le chargement étant nul en travée, les termes m_a et m_b sont également nuls. Il en est de même pour le moment en A (M_a) et l'angle de rotation en B

(ϕ_b), car nous avons respectivement un appui rotulé et un encastrement sur rouleaux. Les équations (4.3) se simplifient dès lors en :

$$\begin{aligned} M_A &= R_1(\alpha \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = 0 \\ M_B &= R_1(\beta \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) \\ \frac{M_B}{H} &= \frac{Q}{2} + N \cdot \psi \end{aligned} \quad (4.4)$$

En résolvant les équations dont les inconnues sont la déviation et les rotations, nous obtenons le moment exact du modèle au second ordre :

$$M_B^{II-\Delta-\delta*} = \frac{QH}{2} \frac{R_1(\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{R_1(\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) - N \cdot H} = M_B^I \cdot \frac{R_1(\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{R_1(\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) - N \cdot H} \quad (4.5)$$

Nous définissons comme coefficient d'amplification du modèle, le facteur S qui vaut dès lors :

$$S = \frac{R_1(\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{R_1(\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) - N \cdot H} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha \cdot N \cdot H}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)}} \quad (4.6)$$

Ce facteur d'amplification (S) tient compte des effets P- δ et P- Δ du modèle. Remarquons que ce facteur dépend des conditions d'appui du modèle étudié mais aussi du chargement horizontal. En effet, la présence d'une charge répartie horizontale le long de la colonne induit des moments d'encastrement (m_A et m_B) qui interviennent dans le facteur d'amplification S. Notons également que le coefficient S est indépendant de la valeur de la charge horizontale Q et dépend de l'effort normal N dans la colonne.

Cependant, comme le modèle ne possède pas le même multiplicateur critique (λ_{cr}^*) que celui de la structure globale (λ_{cr}), nous devons corriger le terme S en enlevant l'amplification du second ordre global (P- Δ) du modèle et puis en ajoutant l'amplification due au second ordre global (P- Δ) du système afin d'obtenir les moments d'extrémités exacts du second ordre global et local.

En effet, si nous observons notre modèle et le système, nous nous rendons compte qu'il possède la même charge critique d'ensemble (V_{cr}) car l'instabilité d'ensemble se produit lorsque la somme des charges verticales (V_{Ed}) tend vers V_{cr} . Néanmoins, les charges verticales reprises par le modèle et la structure sont différentes. L'ensemble du portique est soumis à une charge verticale de 2P tandis que la charge reprise par le modèle est N. (voir Figure 4.8).

L'effort N appliqué est obtenu par la combinaison des analyses élastique au premier ordre « sway » et « non sway ». Cet effort normal, déterminé au 1^{er} ordre, intervient dans le calcul des paramètres α et β (fonctions de stabilité) ainsi que dans l'équation d'équilibre des moments du modèle en configuration déformée.

Nous définissons un multiplicateur critique du modèle (λ_{cr}^*) ainsi qu'un multiplicateur critique de l'ensemble de la structure (λ_{cr}) :

$$\lambda_{cr}^* = \frac{V_{cr}^*}{N} = \frac{V_{cr}}{N} \quad (4.7)$$

$$\lambda_{cr} = \frac{V_{cr}}{\sum \text{charges verticales}} = \frac{V_{cr}}{2P} \quad (4.8)$$

Avec (4.7) et (4.8), nous pouvons dès lors obtenir la relation suivante :

$$\lambda_{cr}^* = \frac{2P}{N} \lambda_{cr} \quad (4.9)$$

Pour rappel, le multiplicateur critique de la structure (λ_{cr}) peut être déterminé de différentes manières (voir chapitre 2, section 3).

Nous définissons le coefficient d'amplification K_{extr} , qui tient compte des effets du second ordre local sur la détermination des moments d'extrémités, comme étant :

$$K_{extr} = \frac{S}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*}} = S \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*}\right) = S \cdot \left(1 - \frac{N}{\sum \text{charges verticales}} \cdot \frac{1}{\lambda_{cr}}\right) \quad (4.10)$$

En effet, nous avons annulé les effets $P-\Delta$ du modèle en multipliant le facteur d'amplification S (effets $P-\delta$ et $P-\Delta$ du modèle) par l'inverse du facteur d'amplification du second ordre global du modèle $\left(\frac{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*}}{1}\right)$ afin d'obtenir le facteur d'amplification dû aux effets $P-\delta$ (K_{extr}).

Ce facteur d'amplification (K_{extr}) des moments d'extrémités, tenant compte des effets $P-\delta$, peut en fait s'écrire sous la forme de l'équation (4.11) similaire à celle des coefficients de moment équivalent ($C_{m,extr}$) :

$$K_{extr} = \frac{C_{m,extr}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \quad (4.11)$$

Le moment d'extrémité au second ordre local ($M_B^{II-\delta}$) vaut donc :

$$M_B^{II-\delta} = M_{B,sway}^I \cdot K_{extr} \quad (4.12)$$

Pour obtenir le moment exact au second ordre global et local ($M_B^{II-\Delta-\delta}$), nous devons multiplier le moment du second ordre local par le facteur d'amplification classique $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_{cr}}}\right)$ afin de prendre en compte les effets du second ordre global (P- Δ) de la structure.

$$M_B^{II-\Delta-\delta} = M_{B,sway}^I \cdot K_{extr} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}\right)} \quad (4.13)$$

3.2 Portique non symétrique avec poutre infiniment rigide

Dans cette partie, nous allons réaliser la même démarche que pour la section 3.1, les explications seront dès lors plus succinctes, d'autant plus que les développements ont été réalisés dans les travaux de fin d'études de T.Hansoulle (référence [6]) et P.Lomba(référence [9]).

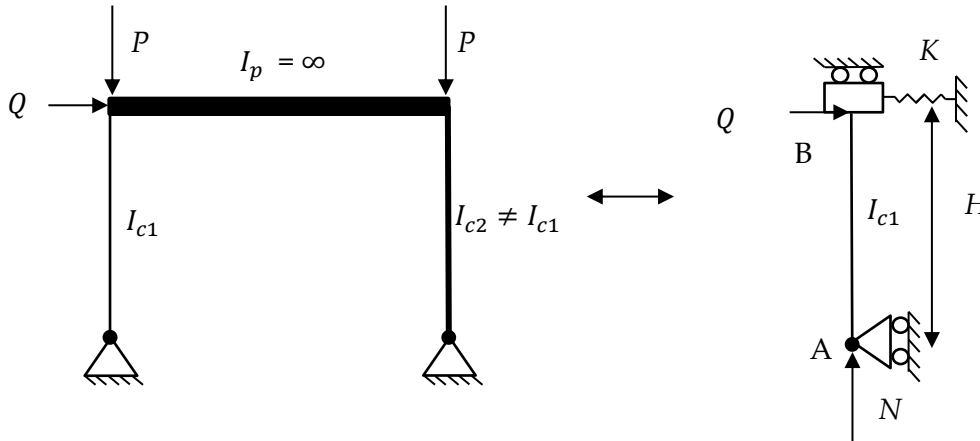


Figure 4.9 - Modèle avec poutre infiniment rigide et colonnes d'inertie différente

Les équations du modèle sont

$$\begin{aligned} M_A &= R_1(\alpha \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = 0 \\ M_B &= R_1(\beta \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) \\ \frac{M_B}{H} &= Q + N \cdot \psi - K \cdot \Delta \text{ avec } \Delta = \psi \cdot H \end{aligned} \quad (4.14)$$

La dernière équation du système (4.14) devient :

$$M_B = Q \cdot H + N \cdot \psi \cdot H - K \cdot \psi \cdot H^2 \quad (4.15)$$

Seul un terme lié à la raideur du ressort est ajouté dans l'équation d'équilibre des moments (4.15). La raideur du ressort est déterminée de telle façon que le déplacement latéral du modèle en tête de poteau soit équivalent à celui de la structure. Nous déterminons K comme la raideur latérale de l'ensemble de la structure (K_{struc}) amputée de la raideur latérale de la colonne 1(K_{c1}) :

$$K = K_{struc} - K_{c1} \quad (4.16)$$

Notons que la raideur latérale du portique (K_{struc}) peut être déterminée en appliquant une charge unitaire (1) en tête de poteau sur la structure. Nous calculons ensuite le déplacement latéral en tête de structure (Δ_1) en réalisant une analyse élastique au premier ordre pour obtenir la raideur du système :

$$K_{struc} = \frac{1}{\Delta_1} \quad (4.17)$$

Nous remarquons que c'est cette même raideur transversale qui intervient dans le calcul du multiplicateur critique d'ensemble. Dans le cas du multiplicateur critique global, c'est en fait la raideur d'étage ($K_{\text{étage}}$) avec H la hauteur d'étage.

$$\lambda_{cr} = \frac{Q_{Ed} \cdot H}{\Delta_{Q_{Ed}} \cdot V_{Ed}} = K_{\text{étage}} \cdot \frac{H}{V_{Ed}} \quad (4.18)$$

Etant donné que la poutre est infiniment rigide, nous pouvons définir

$$K_{c1} = 3 \frac{E \cdot I_{c1}}{H^3} \text{ et } K_{struct} = \frac{Q}{\Delta_Q} = 3 \frac{E \cdot (I_{c1} + I_{c2})}{H^3} \quad (4.19)$$

Au final, nous avons

$$K = K_{struct} - K_{c1} = 3 \frac{E \cdot I_{c2}}{H^3} \quad (4.20)$$

Nous constatons que la raideur du ressort K du modèle est en fait équivalente à la raideur transversale de la colonne 2.

En résolvant le système d'équations (4.14) avec comme inconnues, les déplacements, nous obtenons :

$$M_B^{II-\Delta-\delta^*} = \frac{Q \cdot H}{1 + \frac{\alpha \cdot (K \cdot H^2 - N \cdot H)}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)}} \quad (4.21)$$

Nous obtenons également le moment du premier ordre en supprimant l'influence de l'effort N soit en ne tenant plus compte des fonctions de stabilité ($\alpha \rightarrow 2$ et $\beta \rightarrow 1$) et donc :

$$M_B^I = \frac{Q \cdot H}{1 + \frac{2 \cdot K \cdot H^2}{3 R_1}} \quad (4.22)$$

Le coefficient d'amplification S équivaut à :

$$S = \frac{M_B^{II-\Delta-\delta^*}}{M_B^I} = \frac{1 + \frac{2 \cdot K \cdot H^2}{3 R_1}}{1 + \frac{\alpha \cdot (K \cdot H^2 - N \cdot H)}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)}} \quad (4.23)$$

Si la raideur du ressort K tend vers 0, nous retrouvons le coefficient d'amplification déterminé à la section 3.1 (équation (4.6))

$$S = \frac{M_B^{II-\Delta-\delta^*}}{M_B^I} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha \cdot (N.H)}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)}} \quad (4.24)$$

A nouveau, nous pouvons déterminer le moment d'extrémité du second ordre complet ($M_B^{II-\Delta-\delta}$) sous la formulation suivante :

$$M_B^{II-\Delta-\delta} = M_{B,sway}^I \cdot K_{extr} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}\right)} \text{ avec } K_{extr} = S \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*}\right) \quad (4.25)$$

3.3 Portique non symétrique avec poutre flexible

Le modèle s'enrichit peu à peu avec la présence d'une restrainte (C_1) additionnelle, due à l'apparition d'une poutre flexible, l'angle de rotation (ϕ_B) étant non nul.

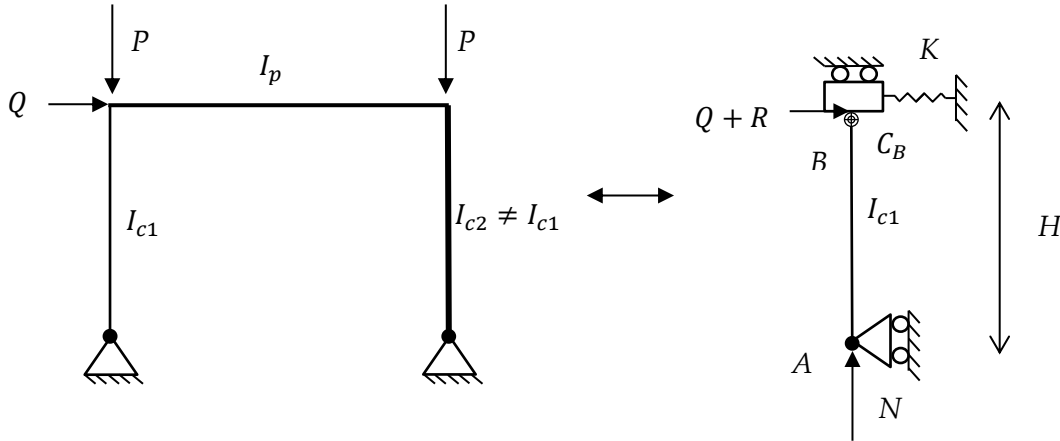


Figure 4.10 - Modèle avec poutre flexible et colonnes d'inertie différente

Les équations qui régissent le modèle sont :

$$\begin{aligned}
 M_A &= R_1(\alpha \cdot \phi_A + \beta \cdot \phi_B - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = 0 \\
 M_B &= R_1(\alpha \cdot \phi_B + \beta \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = -C_B \cdot \phi_B \\
 M_B &= (Q + R) \cdot H + N \cdot \psi \cdot H - K \cdot \psi \cdot H^2
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Nous sommes en présence d'un système à trois équations avec 5 inconnues ($\phi_B, \phi_A, \psi, C_B$ et K). Il faut donc déterminer la raideur du ressort (K) ainsi que la restrainte (C_B), caractéristique liée à la géométrie du portique et donc totalement indépendante du chargement. Après détermination de ces paramètres, nous pouvons résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues (ϕ_B, ϕ_A et ψ).

3.3.1 Calcul de la raideur du ressort (K)

Pour déterminer la raideur du ressort (K) dépendant de la géométrie de la structure, nous nous basons sur les résultats de l'analyse élastique au premier ordre de la structure « sway ».

Le système d'équations lié à la méthode des rotations classique (1^{er} ordre élastique linéaire) est le suivant :

$$\begin{aligned}
 M_A &= R_1(2 \cdot \phi_A + \phi_B - 3 \cdot \psi) = 0 \\
 M_B &= R_1(2 \cdot \phi_B + \phi_A - 3 \cdot \psi) = -C_B \cdot \phi_B \\
 M_B &= (Q + R) \cdot H - K \cdot \psi \cdot H^2
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

En utilisant l'équation 3 du système (4.27), nous obtenons :

$$K = \frac{(Q + R)}{\Delta_{Q+R}} - \frac{M_B}{\Delta_{Q+R} \cdot H} \quad (4.28)$$

Où $Q + R$ = chargement horizontal appliqué sur la structure « sway ».

Δ_{Q+R} = déplacement en tête de portique sous les charges (Q+R) issu de l'analyse de la structure.

M_B = moment d'extrémité au nœud B provenant de l'analyse « sway ».

Au final, nous remarquons qu'en utilisant les valeurs de M_B et Δ_{Q+R} provenant de l'analyse « sway » au premier ordre et la valeur du chargement horizontal appliqué (Q+R) pour cette même analyse, nous pouvons calculer la raideur du ressort (K) du modèle. L'analyse élastique au premier ordre peut être réalisée par un programme comme par exemple OSSA2D.

En fait, l'équation (4.28) représente la répartition de l'effort horizontal appliqué en tête de portique entre les colonnes 1 et 2. Nous avons

$$K_{struct} = \frac{(Q + R)}{\Delta_{Q+R}} = \text{raideur latérale du portique} \quad (4.29)$$

$$K_{c1} = \frac{M_B}{\Delta_{Q+R} \cdot H} = \frac{\frac{M_B}{H}}{\Delta_{Q+R}} = \frac{\text{effort horizontal repris par la colonne 1}}{\Delta_{Q+R}} = \text{raideur latérale de la colonne} \quad (4.30)$$

$$K = K_{struct} - K_{c1} = \frac{\text{effort horizontal repris la colonne 2}}{\Delta_{Q+R}} \quad (4.31)$$

L'effort horizontal appliqué en tête de portique se distribue en fait au prorata des raideurs des colonnes 1 et 2.

3.3.2 Calcul de la raideur de la restreinte C_B

Contrairement à la détermination de la raideur du ressort(K), nous ne pouvons pas nous baser sur les résultats de l'analyse « sway » pour déterminer la raideur de la restreinte (C_B).

Cependant, nous pouvons déterminer la restreinte C_B en appliquant un moment concentré en tête de la colonne 1 afin de voir la répartition des moments entre la colonne 1 étudiée et le reste de la structure (Figure 4.11).

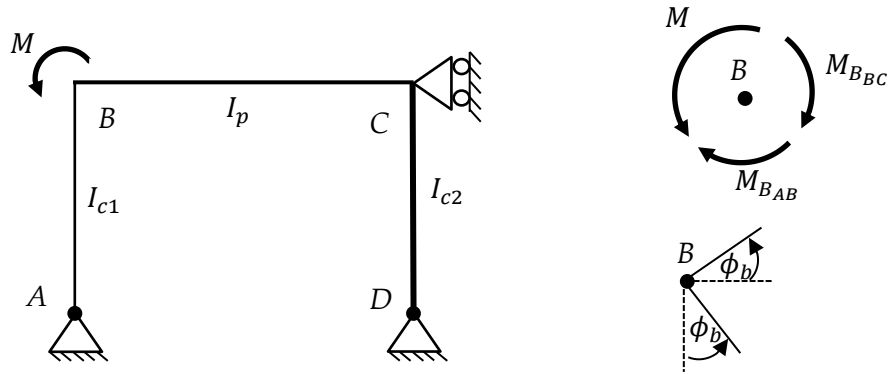


Figure 4.11 –Moment concentré appliqué pour déterminer la raideur de la restrainte

En réalisant un équilibre au nœud B, nous avons :

$$M = M_{BAB} + M_{BBC} \quad (4.32)$$

Nous pouvons donc déterminer la restrainte comme

$$C_{BBC} = \frac{M_{BBC}}{\phi_B} = \frac{M - M_{BAB}}{\phi_B} \quad (4.33)$$

$$C_{BAB} = \frac{M_{BAB}}{\phi_B} = \frac{M - M_{BBC}}{\phi_B} \quad (4.34)$$

En effet, la restrainte C_{BBC} caractérise bien la flexibilité du reste du portique tandis que C_{BAB} caractérise la flexibilité de la colonne. Pour notre modèle, c'est uniquement la valeur de la restrainte C_{BBC} qui nous intéresse et que nous nommons C_B .

Nous pouvons également déterminer cette restrainte en réalisant le schéma statique ci-après (Figure 4.12) en obtenant la formule suivante.

$$C_B = \frac{M}{\phi_B} \quad (4.35)$$

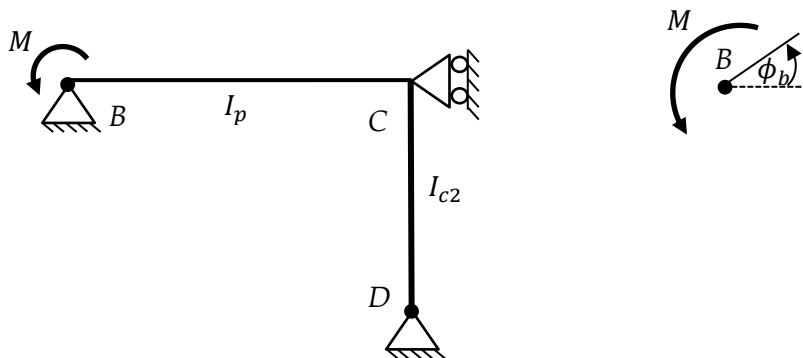


Figure 4.12 - Moment concentré appliqué pour déterminer la raideur de la restrainte

Ce dernier modèle nécessite de réaliser un nouveau « portique ». La première proposition, utilisant le même portique de base, est dès lors plus commode mais requiert un cas de charge supplémentaire.

3.3.3 Résolution du système d'équations au second ordre complet

Après avoir calculé les valeurs de K et C_B , nous pouvons résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues (ϕ_B, ϕ_A et ψ) (voir système d'équation (4.26)).

La résolution du système a été réalisée dans le travail de fin d'études de **P. Lomba**(référence [9]) :

$$M_B^{II-\Delta-\delta^*} = \frac{Q \cdot H}{1 + (K \cdot H^2 - N \cdot H) \left(\frac{\alpha}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{1}{C_B} \right)} \quad (4.36)$$

Le moment du premier ordre s'obtient en annulant l'influence de l'effort N de même que les fonctions de stabilité ($\alpha \rightarrow 2$ et $\beta \rightarrow 1$). Nous obtenons :

$$M_B^I = \frac{Q \cdot H}{1 + K \cdot H^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{1}{C_B} \right)} \quad (4.37)$$

Le coefficient d'amplification S vaut dès lors :

$$S = \frac{M_B^{II-\Delta-\delta^*}}{M_B^I} = \frac{1 + K \cdot H^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{1}{C_B} \right)}{1 + (K \cdot H^2 - N \cdot H) \left(\frac{\alpha}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{1}{C_B} \right)} \quad (4.38)$$

Nous remarquons que la formulation du coefficient d'amplification devient de plus en plus complexe à mesure que le modèle s'enrichit.

A nouveau, si la restreinte (C_B) tend vers l'infini, nous obtenons les équations déterminées dans la section précédente à savoir :

$$S = \frac{M_B^{II-\Delta-\delta^*}}{M_B^I} = \frac{1 + K \cdot H^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{R_1} \right)}{1 + (K \cdot H^2 - N \cdot H) \left(\frac{\alpha}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)} \right)} \quad (4.39)$$

Le moment du second ordre est obtenu

$$M_{B,sway}^{II-\Delta-\delta} = M_{B,sway}^I \cdot K_{extr} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}} \right)} \text{ avec } K_{extr} = S \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*} \right) \quad (4.40)$$

3.4 Portique non symétrique multi-étages avec poutre flexible

Le modèle présente un ressort (K) et deux restraints (C_A et C_B).

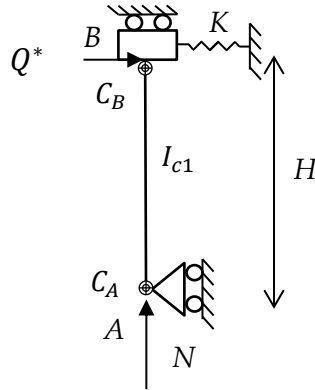


Figure 4.13 – Modèle général d'élément équivalent « sway »

Pour rappel, la charge horizontale Q^* reprend la somme des efforts horizontaux et des réactions R_i au-dessus de l'étage considéré. Les réactions R_i sont les réactions d'appui de chaque étage provenant de l'analyse de la structure « non sway ».

Les équations qui régissent le modèle sont :

$$\begin{aligned} M_A &= R_1(\alpha \cdot \phi_A + \beta \cdot \phi_B - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = -C_A \cdot \phi_A \\ M_B &= R_1(\alpha \cdot \phi_B + \beta \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = -C_B \cdot \phi_B \\ M_B + M_A &= Q^* \cdot H + N \cdot \psi \cdot H - K \cdot \psi \cdot H^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Soit un système à trois équations avec 6 inconnues ($\phi_A, \phi_B, \psi, C_A, C_B$ et K). Nous devons déterminer les caractéristiques géométriques (C_A, C_B et K) avant de pouvoir résoudre le système d'équation.

Pour calculer la raideur du ressort (K), nous réalisons la même démarche que précédemment. La troisième équation du système liée à la méthode classique des rotations (analyse élastique linéaire au 1^{er} ordre) est :

$$M_B + M_A = Q^* \cdot H - K \cdot \psi \cdot H^2 \quad (4.42)$$

Nous obtenons

$$K = K_{struc} - K_{c1} = \frac{Q^*}{\Delta_{rel}} - \frac{M_B + M_A}{\Delta \cdot H} \quad (4.43)$$

Où Δ_{rel} est le déplacement relatif latéral entre les deux niveaux de l'étage étudié.

M_A et M_B sont les moments d'extrémités provenant de l'analyse « sway ».

Q^* est l'effort horizontal total repris par l'étage considéré (étage qui contient le nœud B).

Pour déterminer la raideur des restreintes (C_A et C_B), nous réalisons exactement la même démarche que dans la section précédente. Nous appliquons un moment concentré en tête et au pied de la colonne 1 afin d'obtenir la répartition des moments entre la colonne 1 étudiée et le reste de la structure. En divisant la partie du moment concentré reprise par le reste de la structure (i.e. structure sans la colonne 1) par l'angle de rotation, nous trouvons la restreinte.

La résolution du système d'équation (4.41) a été réalisée dans le travail de fin d'études de P. Lomba(référence [9]) :

$$M_B^{II(\Delta-\delta)*} = \frac{Q^* \cdot H}{1 + \frac{C_A}{C_B} \left(1 + \frac{1}{(\alpha + \beta)} (K \cdot H^2 - N \cdot H) \left(\frac{\alpha}{C_A} + \frac{1}{R_1} \right) \right) \left(\frac{C_B + R_1(\alpha - \beta)}{C_A + R_1(\alpha - \beta)} \right) + \frac{1}{\alpha + \beta} \frac{\beta}{C_B} (K \cdot H^2 - N \cdot H)} \quad (4.44)$$

Le moment du premier ordre est obtenu en annulant l'influence de l'effort N et en supprimant les fonctions de stabilité ($\alpha \rightarrow 2$ et $\beta \rightarrow 1$) :

$$M_B^{II(\Delta-\delta)*} M_B^I = \frac{Q^* \cdot H}{1 + \frac{C_A}{C_B} \left(\frac{C_B + R_1}{C_A + R_1} \right) + \frac{K \cdot H^2}{3C_B} \left(1 + \left(\frac{C_B + R_1}{C_A + R_1} \right) \cdot \frac{C_A + 2R_1}{R_1} \right)} \quad (4.45)$$

Le coefficient d'amplification S vaut donc

$$S = \frac{1 + \frac{C_A}{C_B} \left(\frac{C_B + R_1}{C_A + R_1} \right) + \frac{K \cdot H^2}{3C_B} \left(1 + \left(\frac{C_B + R_1}{C_A + R_1} \right) \cdot \frac{C_A + 2R_1}{R_1} \right)}{1 + \frac{C_A}{C_B} \left(1 + \frac{1}{(\alpha + \beta)} (K \cdot H^2 - N \cdot H) \left(\frac{\alpha}{C_A} + \frac{1}{R_1} \right) \right) \left(\frac{C_B + R_1(\alpha - \beta)}{C_A + R_1(\alpha - \beta)} \right) + \frac{1}{\alpha + \beta} \frac{\beta}{C_B} (K \cdot H^2 - N \cdot H)} \quad (4.46)$$

La formulation du coefficient d'amplification devient conséquente et pourrait rebuter les praticiens.

Le moment du second ordre exact à l'extrémité B est obtenu par :

$$M_{B,sway}^{II(\Delta-\delta)} = M_{B,sway}^I \cdot K_{extr} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}} \right)} \text{ avec } K_{extr} = S \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*} \right) \quad (4.47)$$

Si la restreinte (C_A) tend vers 0, nous obtenons les équations de la section précédente à savoir :

$$S = \frac{M_B^{II(\Delta-\delta)*}}{M_B^I} = \frac{1 + K \cdot H^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{1}{C_B} \right)}{1 + (K \cdot H^2 - N \cdot H) \left(\frac{\alpha}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{1}{C_B} \right)} \quad (4.48)$$

3.5 Cas général avec chargement transversal en travée

Le modèle présente comme précédemment un ressort (K) et deux restreintes (C_A et C_B). Au niveau du chargement, outre l'effort horizontal (Q^*) déjà défini (voir début de la section 3.4), nous ajoutons une charge répartie en travée (q). Nous avons mis en gras l'ensemble des termes supplémentaires qui apparaissent suite à la présence de cette charge répartie (q).

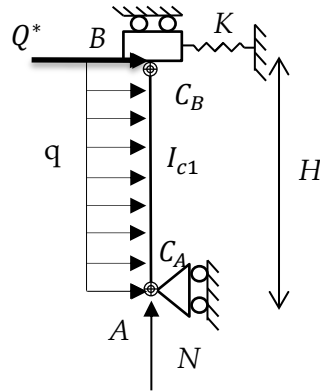


Figure 4.14 – Modèle général d'élément équivalent « sway » avec une charge horizontales ponctuelle et répartie

Les équations qui régissent le modèle sont :

$$\begin{aligned} M_A &= \mathbf{m}_{enc,q,A} + R_1(\alpha \cdot \phi_A + \beta \cdot \phi_B - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = -C_A \cdot \phi_A \\ M_B &= \mathbf{m}_{enc,q,B} + R_1(\alpha \cdot \phi_B + \beta \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = -C_B \cdot \phi_B \\ M_B + M_A &= Q^* \cdot H + N \cdot \psi \cdot H + q \cdot \frac{H^2}{2} - K \cdot \psi \cdot H^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Nous observons l'apparition de deux termes supplémentaires en raison de la charge transversale :

- $\mathbf{m}_{enc,q,A}$ et $\mathbf{m}_{enc,q,B}$ sont les moments d'encastrement liés à la méthode des rotations aménagée avec fonction de stabilité. Ces moments pour une charge répartie q (référence [5]) sont formulés comme suit:

$$m_{enc,qA} = \frac{q \cdot H^2}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2 \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right) \quad (4.50)$$

$$m_{enc,qB} = -\frac{q \cdot H^2}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2 \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right) \quad (4.51)$$

- $q \cdot \frac{H^2}{2}$ qui est le terme supplémentaire qui intervient dans l'équation d'équilibre des moments en A.

Seuls ces trois termes changent en fonction du type de charge transversale.

Notons que l'effort N appliqué est obtenu en combinant les analyses élastiques au premier ordre « sway » et « non sway ». Cet effort normal intervient dans les paramètres α et β ainsi que dans l'équation d'équilibre des moments du modèle dans sa configuration déformée.

En toute rigueur, nous devrions prendre l'effort N issu du calcul au second ordre et ensuite recalculer un nouveau coefficient d'amplification (S). Un nouvel effort N au second ordre serait obtenu et ainsi de suite. Le processus est en réalité itératif. Nous émettons l'hypothèse d'utiliser l'effort N provenant d'une analyse au premier ordre.

Pour déterminer les caractéristiques (C_A, C_B et K), nous réalisons la même démarche que dans les autres sections.

Pour calculer K, nous utilisons l'équation 3 du système de la méthode classique des rotations :

$$M_B + M_A = Q^* \cdot H + q \cdot \frac{H^2}{2} - K \cdot \psi \cdot H^2 \quad (4.52)$$

En isolant K, nous obtenons

$$K = K_{système} - K_{c1} = \frac{Q^* + q \cdot H/2}{\Delta_{rel}} - \frac{M_B + M_A}{\Delta \cdot H} \quad (4.53)$$

Où Δ_{rel} est le déplacement relatif latéral entre les deux niveaux de l'étage étudié.

M_A et M_B sont les moments d'extrémités de la colonne 1 provenant de l'analyse « sway ».

Pour déterminer la raideur des restreintes (C_A et C_B), nous réalisons exactement la même démarche que dans la section précédente. Nous appliquons un moment concentré en tête et au pied de la colonne 1 afin de voir la répartition des moments entre la colonne 1 étudiée et le reste de la structure.

Lorsque nous avons spécifié les caractéristiques géométriques (C_A, C_B et K) du modèle, nous pouvons résoudre le système pour obtenir les ϕ_A^{II}, ϕ_B^{II} et ψ^{II} et déterminer ainsi le moment exact au second ordre complet

$$\begin{pmatrix} \alpha R_1 + C_A & \beta R_1 & -R_1(\alpha + \beta) \\ \beta R_1 & \alpha R_1 + C_B & -R_1(\alpha + \beta) \\ C_A & C_B & K \cdot H^2 - N \cdot H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A^{II} \\ \phi_B^{II} \\ \psi^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{m}_{enc,q,A} \\ -\mathbf{m}_{enc,q,B} \\ Q^* \cdot H + q \cdot \frac{H^2}{2} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Nous obtenons le moment au second ordre avec la formule :

$$M_B^{II-\Delta-\delta^*} = C_B \phi_B^{II} \quad (4.55)$$

Ensuite, nous pouvons résoudre le système suivant pour obtenir les ϕ_A^I, ϕ_B^I et ψ^I et ainsi déterminer le moment au premier ordre.

$$\begin{pmatrix} 2R_1 + C_A & R_1 & -3R_1 \\ R_1 & 2R_1 + C_B & -3R_1 \\ C_A & C_B & K \cdot H^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A^I \\ \phi_B^I \\ \psi^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{enc,q,A}^* \\ -m_{enc,q,B}^* \\ Q^* \cdot H + q \cdot \frac{H^2}{2} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Avec $m_{enc,q,A}^*$ et $m_{enc,q,B}^*$ les moments d'encastrement liés à la méthode des rotations sans fonction de stabilité. Ces moments pour une charge répartie q sont formulés par:

$$m_{enc,qA}^* = + \frac{q \cdot L^2}{12} \quad (4.57)$$

$$m_{enc,qA}^* = - \frac{q \cdot L^2}{12} \quad (4.58)$$

Nous obtenons alors le moment au second ordre avec la formule :

$$M_B^{I*} = C_A \phi_A^I \quad (4.59)$$

Pour finir, nous pouvons déterminer le coefficient d'amplification

$$K_{extr} = S \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*}\right) \text{ avec } S = \frac{M_B^{II-\Delta-\delta^*}}{M_B^{I*}} \text{ et } \lambda_{cr}^* = \lambda_{cr} \frac{\Sigma \text{ charge verticale}}{N} \quad (4.60)$$

La formule analytique du facteur S n'a pas été développée, vu la complexité déjà grande du facteur S calculé en section 3.4. (les facteurs supplémentaires ne font qu'alourdir un peu plus la formule analytique).

Le moment du second ordre exact à l'extrémité B est obtenu par :

$$M_{B,sway}^{II(\Delta-\delta)} = M_{B,sway}^I \cdot K_{extr} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*}\right)} \quad (4.61)$$

3.6 Détermination du coefficient (K_{extr}^*)

Dans cette section, nous allons déterminer la formule générale du coefficient K_{extr}^* pour le modèle global établi précédemment.

Pour rappel, le modèle général est muni de deux restraints (C_A et C_B) avec application des moments sollicitants (M_B et M_A) provenant de l'analyse « non sway ». Etant donné que nous avons une structure à nœuds fixes, la déviation (ψ) est nulle et les quatre inconnues sont donc les rotations (ϕ_A et ϕ_B) et les moments (m_B et m_A). Ces moments (m_B et m_A) sont à appliquer sur l'élément pour obtenir le moment M_B, M_A au premier ordre de l'analyse « non sway ». Nous verrons par la suite comment les déterminer.

Comme dans les sections précédentes, pour spécifier les caractéristiques (C_A et C_B), nous appliquons un moment ponctuel en tête et en pied de la colonne 1 pour ainsi obtenir la répartition des moments entre la colonne 1 étudiée et le reste de la structure.

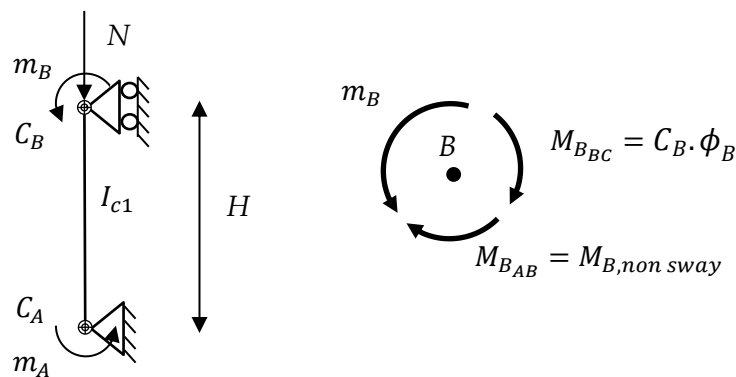


Figure 4.15 - Modèle général d'élément équivalent non sway

En écrivant l'équilibre à chaque nœud, nous obtenons

$$M_A + m_A + C_A \cdot \phi_A = 0 \tag{4.62}$$

$$M_B + m_B + C_B \cdot \phi_B = 0$$

Le moment m_B appliqué sur le nœuds B se répartit entre le moment (M_B) qui sollicite la poutre et le moment lié à la restrainte ($C_B \cdot \phi_B$). Ce moment m_B est donc inconnu et est une valeur constante. En effet, que nous soyons au premier ordre ou au second ordre la valeur de ce moment appliqué ne change pas..

Supposons une barre bi-appuyé avec d'un côté une rotule et de l'autre côté une restrainte avec un moment concentré appliqué (m_B). Lors du passage du premier ordre au second ordre, la raideur flexionnelle de la poutre va diminuer à cause de l'effort normal. Le moment M_B repris par la poutre diminue et le moment repris par la restrainte augmente ($C \cdot \phi_B$). La valeur de la restrainte C reste constante car elle n'est pas influencée par l'effort normal. Par contre, l'angle de rotation ϕ_B augmente à cause notamment de la

diminution de la raideur flexionnelle de la poutre . Le moment repris par la restreinte augmente donc bien ($C \cdot \phi_B$). Au final, le moment appliqué m_B reste constant.

Connaissant le moment M_B , la rotation au nœud B ϕ_B (qui provient de l'analyse « non sway ») et la restreinte calculée (C_B), nous pouvons déterminer le moment (m_B) à appliquer sur l'élément pour obtenir le moment M_B au premier ordre de l'analyse « non sway »:

$$m_B = M_B^I + C_B \cdot \phi_B^I \quad (4.63)$$

Nous pouvons faire de même pour le moment (m_A) à appliquer sur l'élément pour obtenir le moment M_A au premier ordre de l'analyse « non sway »:

$$m_A = M_A^I + C_A \cdot \phi_A^I \quad (4.64)$$

A partir de C_A , C_B , m_A et m_B , nous pouvons résoudre le système d'équation de la méthode des rotations avec fonctions de stabilité pour trouver les angles de rotations au second ordre local (ϕ_A^{II} et ϕ_B^{II}) :

$$M_A^{II-\delta} = -m_A - C_A \cdot \phi_A^{II-\delta} = R_1(\alpha \cdot \phi_A^{II-\delta} + \beta \cdot \phi_B^{II-\delta}) \quad (4.65)$$

$$M_B^{II-\delta} = -m_B - C_B \cdot \phi_B^{II-\delta} = R_1(\alpha \cdot \phi_B^{II-\delta} + \beta \cdot \phi_A^{II-\delta})$$

L'effort N appliqué sur la colonne (Figure 4.15) est la somme des efforts normaux obtenus dans les analyse élastique au premier ordre « sway » et « non sway ». Cet effort intervient dans le calcul des fonctions de stabilité pour obtenir la valeur des paramètres α et β .

Après résolution du système, nous obtenons :

$$\phi_A^{II-\delta} = -\frac{1}{R_1} \frac{m_A - \frac{\beta \cdot m_B}{C_B/R_1 + \alpha}}{C_A/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_B/R_1 + \alpha}} \quad (4.66)$$

$$\phi_B^{II-\delta} = -\frac{1}{R_1} \frac{m_B - \frac{\beta \cdot m_A}{C_A/R_1 + \alpha}}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_A/R_1 + \alpha}} \quad (4.67)$$

Et donc finalement :

$$M_A^{II-\delta} = -m_A - C_A \cdot \phi_A^{II-\delta} = -m_A + \frac{C_A}{R_1} \frac{m_A - \frac{\beta \cdot m_B}{C_B/R_1 + \alpha}}{C_A/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_B/R_1 + \alpha}} \quad (4.68)$$

$$M_B^{II-\delta} = -m_B - C_B \cdot \phi_B^{II-\delta} = -m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{m_B - \frac{\beta \cdot m_A}{C_A/R_1 + \alpha}}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_A/R_1 + \alpha}} \quad (4.69)$$

Les formulations des $M_A^{II-\delta}$ et $M_B^{II-\delta}$ sont similaires étant donné que les équations sont semblables.

En faisant supprimer les fonctions de stabilité ($\alpha \rightarrow 2$ et $\beta \rightarrow 1$), nous pouvons obtenir le moment du premier ordre.

$$M_B^I = -m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{m_B - \frac{m_A}{C_A/R_1 + 2}}{C_B/R_1 + 2 - \frac{1}{C_A/R_1 + 2}} \quad (4.70)$$

Le coefficient d'amplification devient :

$$S = \frac{M_B^{II-\delta}}{M_B^I} = \frac{-m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{m_B - \frac{\beta \cdot m_A}{C_A/R_1 + \alpha}}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_A/R_1 + \alpha}}}{-m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{m_B - \frac{m_A}{C_A/R_1 + 2}}{C_B/R_1 + 2 - \frac{1}{C_A/R_1 + 2}}} \quad (4.71)$$

Comme ici, nous n'avons pas d'effet du second ordre global nous ne devons plus corriger le facteur S par le facteur d'amplification du type $\frac{1}{(1-1/\lambda_{cr})}$. Le facteur S est en fait le coefficient équivalent d'amplification des moments d'extrémités « sway » à savoir K_{extr}^* . Pour se rapprocher du formalisme des rappels théoriques, nous posons :

$$K_{extr}^* = \frac{C_{m,extr}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \text{ avec } N_{cr} \text{ où } L_{fl} \text{ à noeuds fixes}$$

Dans le tableau qui suit, nous avons simplifié la formule du facteur K_{extr}^* en supprimant certains termes tel que $m_A \rightarrow 0$ ou/et $C_A \rightarrow 0$ si l'appui est une rotule en base.

K_{extr}^*	Termes
$K_{extr}^* = \frac{1 - \frac{C_B/R_1}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_A/R_1 + \alpha}}}{1 - \frac{C_B/R_1}{C_B/R_1 + 2 - \frac{1}{C_A/R_1 + 2}}}$	$m_A = 0, m_B \neq 0, C_A \neq 0 \text{ et } C_B \neq 0$
$K_{extr}^* = \frac{1 - \frac{C_B/R_1}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}}}{1 - \frac{C_B/R_1}{C_B/R_1 + \frac{3}{2}}}$	$m_A = 0, C_A = 0, m_B \neq 0 \text{ et } C_B \neq 0$

Tableau 4.1- Coefficients d'amplification en fonction des appuis et sollicitations

3.7 Cas général K_{extr}^* avec charge transversale

Nous nous rendons compte que cette méthode peut nous permettre de calculer les coefficients d'amplification $K_{extr}^* = \frac{C_{m,extr}}{1 - \frac{NEd}{N_{cr}}}$ dont nous avons besoin, afin de déterminer le moment maximum au second ordre complet aux extrémités. En effet, il suffit d'ajouter une charge transversale, qui peut être ponctuelle ou répartie, et d'ajouter les moments d'encastrement associés (avec les fonctions de stabilité) dans les équations du modèle.

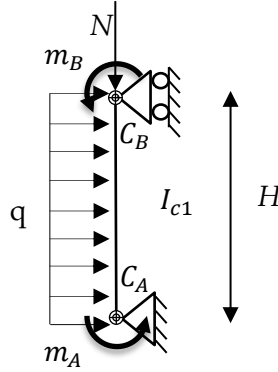


Figure 4.16 –Modèle général d'élément équivalent « non sway » avec charge répartie

Nous ne réaliserons le développement que pour un nœud, car les équations sont similaires vu la symétrie du chargement. Nous avons l'équilibre aux nœuds A et B :

$$M_A + m_A + C_A \cdot \phi_A = 0 \quad (4.72)$$

$$M_B + m_B + C_B \cdot \phi_B = 0$$

Le calcul de C_A, C_B est réalisé de la même manière qu'à la section précédent (3.6). Pour m_A et m_B , nous connaissons M_A^I et M_B^I et, pour obtenir ϕ_A^I et ϕ_B^I , nous devons résoudre le système suivant (méthode des rotations au premier ordre)

$$M_A^I = m_{enc,qA}^* + R_1(2 \cdot \phi_A^I + \phi_B^I) \quad (4.73)$$

$$M_B^I = m_{enc,qB}^* + R_1(2 \cdot \phi_B^I + \phi_A^I)$$

Où $m_{enc,qA}^*$ et $m_{enc,qB}^*$ sont les moments d'encastrement aux nœuds A et B sous la charge transversale q (voir équations(4.57) et (4.58)).

Les équations du système (4.73) étant symétriques, nous ne faisons le développement que pour calculer m_B . Nous obtenons donc ϕ_B^I :

$$\phi_B^I = \frac{2}{3R_1} \left(M_B^I - m_{enc,qB}^* - \frac{M_A^I - m_{enc,qA}^*}{2} \right) \quad (4.74)$$

Et ensuite nous calculons m_B avec (4.72)

$$m_B = -M_B^I - C_B \cdot \phi_B^I = -M_B^I - C_B \cdot \frac{2}{3R_1} \left(M_B^I - m_{enc,qB} - \frac{M_A^I - m_{enc,qB}}{2} \right) \quad (4.75)$$

Connaissant C_A , C_B , m_A et m_B , nous pouvons résoudre le système d'équations suivant (méthode des rotations au second ordre local) :

$$\begin{aligned} M_A^{II-\delta} &= -m_A - C_A \cdot \phi_A^{II} = m_{enc,qA} + R_1(\alpha \cdot \phi_A^{II} + \beta \cdot \phi_B^{II}) \\ M_B^{II-\delta} &= -m_B - C_B \cdot \phi_B^{II} = m_{enc,qB} + R_1(\alpha \cdot \phi_B^{II} + \beta \cdot \phi_A^{II}) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Où $m_{enc,qA}$ et $m_{enc,qB}$ sont les moments d'encastrement aux nœuds A et B sous la charge transversale q (voir équations(4.50) et (4.51)).

En résolvant le système d'équations (4.76), nous obtenons la formulation du coefficient K_{extr}^*

$$K_{extr}^* = \frac{M_B^{II-\delta}}{M_B^I} = \frac{-m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{(m_B + m_{enc,qB}) - \frac{\beta \cdot (m_A + m_{enc,qA})}{C_A/R_1 + \alpha}}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{C_A/R_1 + \alpha}}}{-m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{(m_B + m_{enc,qB}^*) - \frac{(m_A + m_{enc,qA}^*)}{C_A/R_1 + 2}}{C_B/R_1 + 2 - \frac{1}{C_A/R_1 + 2}}} \quad (4.77)$$

Où $m_{enc,qA}^*$ et $m_{enc,qB}^*$ sont les moments d'encastrement aux nœuds A et B sous la charge transversale q sans tenir compte des effets des fonctions de stabilité (voir équation (4.57) et (4.58)).

Nous constatons la lourdeur de la formule obtenue mais aussi la complexité des développements à réaliser pour déterminer le $C_{m,extr}$ pour un élément. A nouveau, nous pouvons simplifier la formule en fonction des conditions d'appui (restreinte ou non) et de la présence ou non des moments d'extrémités provenant de l'analyse au premier ordre.

4 Conclusion

Grace à la création des modèles à nœuds mobiles « sway » et à nœuds fixes « non sway », nous avons pu déterminer les coefficients d'amplification (K_{extr} et K_{extr}^*) tenant compte du second ordre local (effet P- δ). Ceux-ci multiplient respectivement les moments provenant des analyses « sway » et « non sway ». La détermination des moments d'extrémités au second ordre complet est obtenue par :

$$M_{extr}^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{NS}^I + K_{extr} \frac{1}{1 - 1/\lambda_{cr}} \cdot M_S^I \quad (4.75)$$

Nous pouvons retrouver le formalisme des coefficients de moments équivalents en présentant la formule comme suit :

$$M_{extr}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m,extr}^*}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \cdot M_{NS}^I + \frac{C_{m,extr}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \cdot M_S^I \quad (4.76)$$

Avec
$$K_{extr}^* = \frac{C_{m,extr}^*}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \quad \text{et} \quad K_{extr} = \frac{C_{m,extr}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)}$$

Où N_{cr} = charge critique avec longueur de flambement à nœuds fixes

Nous avons également pu déterminer les coefficients d'amplification (K_{extr}) des moments d'extrémités d'une barre à nœuds fixes soumise à des moments d'extrémités et à une charge transversale.

Chapitre 5 : Degré de précision de la de la méthode d'analyse CAM

1 Introduction

Ayant défini un grand nombre de modèles théoriques pour large variété de portiques, nous réalisons diverses analyses pour un portique simple, rotulé en base et avec une poutre flexible. Nous allons donc déterminer les moments d'extrémités en utilisant la méthode CAM et comparer l'ensemble de ces moments d'extrémités avec ceux obtenus via les logiciels OSSA2D et FINELG.

Au niveau de la géométrie du portique, nous jouons sur les inerties des poutres et des colonnes pour faire varier les paramètres de la raideur de la restrainte (C) et du ressort (K) des modèles. De plus, nous faisons varier le chargement vertical afin de balayer la plage du multiplicateur critique global (λ_{cr}) admissible par la méthode ($3 \leq \lambda_{cr} \leq 10$).

Tout d'abord, nous affinons notre compréhension par le biais d'un exemple, afin de bien expliquer l'obtention des moments d'extrémités avec la méthode CAM. Ensuite, nous affichons l'ensemble des résultats et discutons de l'influence des différents paramètres.

2 Portique simple

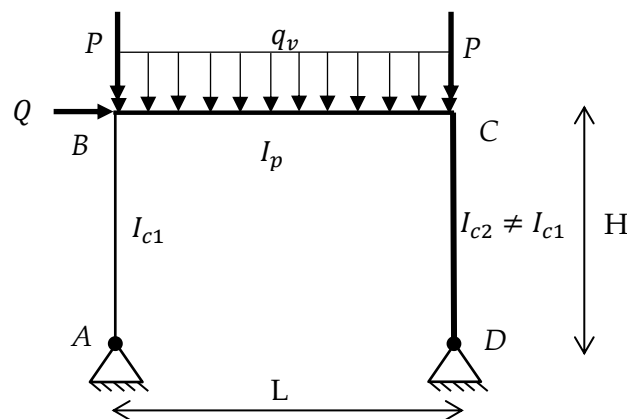


Figure 5.1-Portique simple non symétrique avec poutre flexible

Nous allons déterminer de manière exacte le moment en tête de la colonne 1 i.e M_B . Le premier exemple réalisé concerne un portique simple avec deux colonnes d'inertie différente (HEB 160 et HEB 240) rotulées en base et une poutre (IPE 400). Le portique est soumis à une charge horizontale ponctuelle (Q), une charge verticale répartie (q_v) et deux charges verticales (P) en tête de chaque colonne. Nous supposons les assemblages poutre-colonne comme des encastremets parfaits.

Données :

- $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Mpa}$
- $f_y = 355 \text{ Mpa}$
- $q_v = 20 \text{ kN/m}$
- $Q = 20 \text{ kN}$
- $P = 548 \text{ kN}$
- $I_{c1} = 0,0002492 \text{ m}^4 \text{ (HEB 160)}$
- $I_{c2} = 0,0001126 \text{ m}^4 \text{ (HEB 240)}$
- $I_p = 0,0002313 \text{ m}^4 \text{ (IPE 400)}$
- $L = 4 \text{ m}$
- $H = 4 \text{ m}$

2.1 Analyse élastique 1^{er} ordre à nœuds fixes

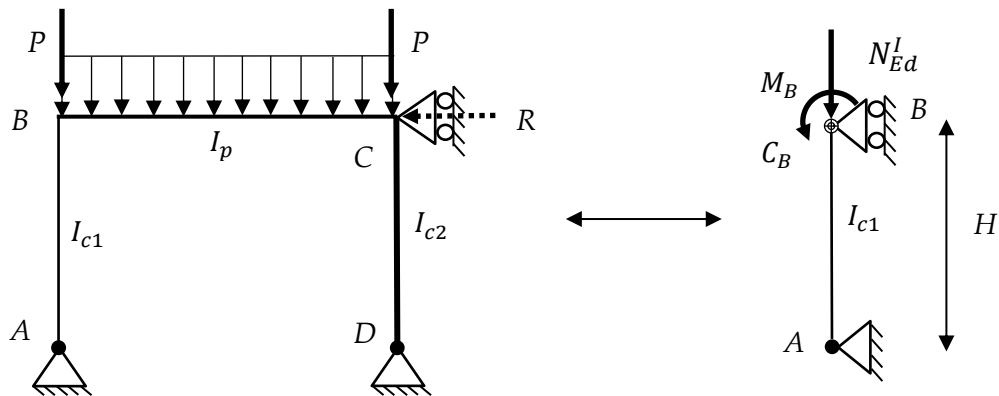


Figure 5.2 - Portique « non-sway » et le modèle « non-sway » associé

Sur base de l'analyse élastique au premier ordre, nous déterminons le moment, l'effort normal, la réaction d'appuis ainsi que la restreinte du modèle

$$M_{B,NS} = -2,84 \text{ kN.m} \quad (5.1)$$

La réaction d'appuis R est non nulle en raison d'une géométrie non symétrique. Nous obtenons une réaction:

$$R = 3,3135 \text{ kN (traction)} \quad (5.2)$$

L'effort normal au premier ordre dû à l'analyse « non-sway » est :

$$N_{NS} = -584,7 \text{ kN (compression)} \quad (5.3)$$

Les diagrammes MNT de cette analyse « non-sway » se trouvent en annexes B.1.

Nous pouvons déterminer la restreinte C_B en appliquant un moment concentré en tête de poteau afin de voir la répartition des moments entre la colonne étudiée et le reste de la structure (voir Figure 5.3 et voir annexe B.1, Figure B.5 pour la répartition des moments)

Nous obtenons la restreinte en utilisant la formule :

$$C_{B,NS} = \frac{M_{BBC}}{\phi_B} = \frac{9,057 \text{ kN.m}}{0,245 \cdot 10^{-3} \text{ rad}} = 36\,967 \frac{\text{kN.m}}{\text{rad}} \quad (5.4)$$

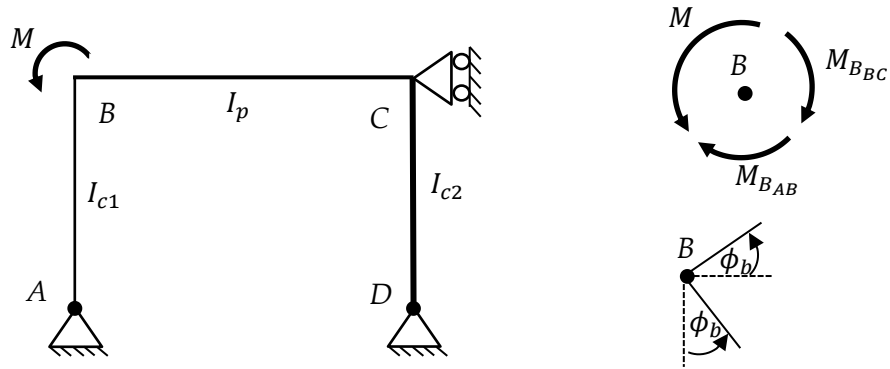


Figure 5.3 – Application d'un moment concentré pour déterminer la restreinte

Pour rappel, afin de déterminer le K_{extr}^* , nous devons utiliser la valeur de l'effort normal au premier ordre résultant de l'analyse globale.

$$N_{Ed}^I = N_{NS}^I + N_S^I \quad (5.5)$$

2.2 Analyse élastique 1^{er} ordre à nœuds mobiles

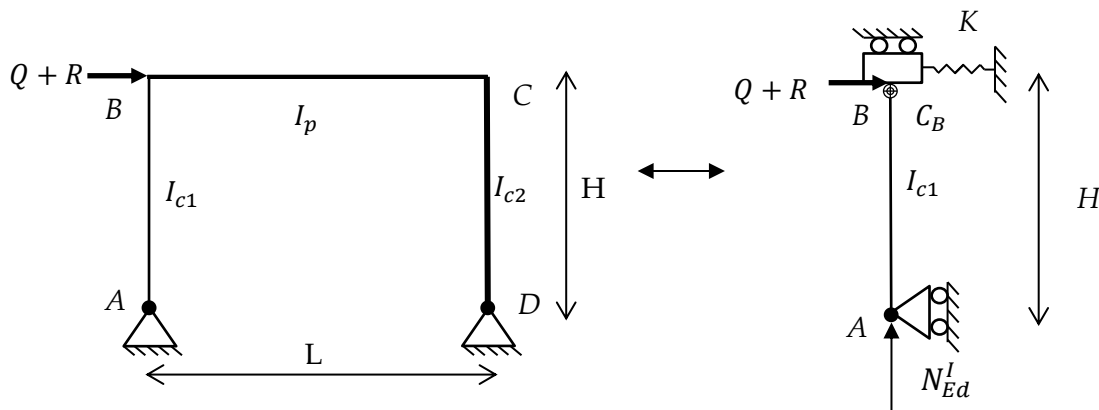


Figure 5.4 - Portique « non-sway » et le modèle « non-sway » associé

Sur base de l'analyse élastique au premier ordre, nous déterminons le moment, l'effort normal, la restreinte du modèle et la raideur du ressort K .

Nous obtenons la restreinte C_B en réalisant la même démarche qu'au point précédent mais avec le portique à nœuds déplaçables. Nous remarquons que la raideur de la restreinte est similaire à celle à nœud fixes.

$$C_{B,S} = 36\,620 \text{ kN.m} \quad (5.6)$$

La raideur du ressort (K) est obtenue en soustrayant de la raideur transversale du portique (K_{struct}) la raideur transversale de la colonne 1 (K_{c1}). Nous déterminons K sur base de la formule.

$$K = K_{struct} - K_{c1} = \frac{(Q + R)}{\Delta_{Q+R}} - \frac{M_{B,S}}{\Delta_{Q+R} \cdot H} = \frac{(Q + R) - \frac{M_{B,S}}{H}}{\Delta_{Q+R}} \quad (5.7)$$

Où le déplacement Δ_{Q+R} et le moment $M_{B,S}$ sont obtenus en réalisant l'analyse élastique au premier ordre « sway ». Cette équation définit l'équilibre horizontal et donc la répartition de l'effort horizontal total (Q+R) au prorata des raideurs des colonnes. Nous avons la somme des efforts horizontaux (Q + R) et la partie de l'effort horizontal $M_{B,S}/H$ qui est reprise par la colonne. Le reste du portique reprend donc $(Q + R) - M_{B,S}/H$ et en divisant, cet effort horizontal par le déplacement total, nous obtenons la raideur du ressort K de notre modèle :

$$K = K_{struct} - K_{c1} = \frac{16,69}{0,0167} - \frac{\frac{16,644}{4}}{0,0167} = 99,9 - 24,9 = 75 \text{ kN/m} \quad (5.8)$$

En annexe B.2, se trouvent les diagrammes MNT et la déformée de la structure « sway » sous chargement horizontal. Nous constatons que l'effort tranchant (Figure B.8.) au sommet de la colonne 1 vaut $\frac{M_{B,S}}{H}$ (= 4,161 kN) et l'effort tranchant au sommet de la colonne 2 vaut $(Q + R) - \frac{M_{B,S}}{H}$ (= 12,526 kN).

Afin de caractériser la raideur du ressort de notre modèle, définissons un paramètre adimensionnel qui nous permettra de comparer les différentes raideurs de ressort du modèle en fonction des différentes inerties des éléments du portique.

$$K^* = K_{struct}/K_{c1} = 4 \quad (5.9)$$

Nous pouvons également calculer le multiplicateur critique avec la formule de l'Eurocode

$$\lambda_{cr} = \frac{(Q + R) \cdot H}{V_{ED} \cdot \Delta_{Q+R}} = \frac{16,69 \cdot 4}{1176 \cdot 0,0167} = 3,4 \quad (5.10)$$

Avec V_{Ed} qui est la somme des efforts verticaux.

A noter qu'avec les logiciels FINELG et OSSA2D, nous pouvons également déterminer les multiplicateurs critiques. Nous obtenons :

Méthode	EC3	OSSA2D	FINELG
λ_{cr}	3,4	2,86	2,99

Tableau 5.1-Evaluation du multiplicateur critique global (EC3,OSSA2D et FINELG)

La formule de l'Eurocode 3 surestime le multiplicateur critique global et est dès lors insécuritaire car l'effet du second ordre global sur le moment « sway » est pris en compte en multipliant le moment par $\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}$. L'amplification qui résulte de l'utilisation de la formule de l'Eurocode 3 est donc plus faible que celle issue des programmes numériques. Nous examinerons cette influence dans la prochaine section.

Nous avons également

$$M_{B,S} = 16,644 \text{ kN.m et } N_S = 16,69 \text{ kN} \quad (5.11)$$

En annexe B.2, se trouvent les diagrammes MNT et la déformée de la structure « sway » sous chargement horizontal.

En combinant les efforts normaux des deux analyses, nous obtenons l'effort normal au premier ordre dans la colonne 1 qui vaut

$$N_{Ed}^I = N_{NS}^I + N_S^I = 16,69 - 584,7 = -568,01 \text{ kN} \quad (5.12)$$

Grâce à cet effort normal, nous pouvons donc calculer le paramètre ε et donc les paramètres α et β . En utilisant les équations (2.4) et (2.5), nous obtenons :

$$\varepsilon = 1,318 ; \alpha = 1,88 \text{ et } \beta = 1,03 \quad (5.13)$$

2.3 Calcul du moment exact au second ordre complet

Grâce à ces deux analyses, nous avons tous les éléments pour calculer le moment en B au second ordre global et local.

$$M_B^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{B,NS} + K_{extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_{B,S} \quad (5.14)$$

Avec

$$K_{extr}^* = \frac{1 - \frac{C_{B,ns}/R_1}{C_{B,ns}/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}}}{1 - \frac{C_{B,ns}/R_1}{C_{B,ns}/R_1 + \frac{3}{2}}} = 0,888 \text{ avec } R_1 = \frac{2EI_{c1}}{H} = 2617 \text{ kN.m} \quad (5.15)$$

$$K_{extr} = \frac{1 + K \cdot H^2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{1}{C_{B,S}} \right)}{1 + (K \cdot H^2 - N \cdot H) \left(\frac{\alpha}{R_1(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{1}{C_{B,S}} \right)} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*} \right) = 0,92 \quad (5.16)$$

$$\text{où } \lambda_{cr}^* = \frac{V_{Ed}}{N_{Ed,1}} \lambda_{cr} = \frac{1176}{568} \cdot 3,4 = 7,04$$

Le facteur lié à l'amplification dû au second ordre vaut

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} = 1,417 \quad (5.17)$$

Nous obtenons finalement :

$$M_B^{II-\Delta-\delta} = 0,888 \cdot -2,184 + 0,92 \cdot 1,417 \cdot 16,644 = 19,76 \text{ kN.m} \quad (5.18)$$

Cette valeur peut être comparée aux moments d'extrémités obtenus via OSSA2D et FINELG. Pour déterminer les moments au second ordre complet, nous avons discrétisé chacune des barres (poutre, colonnes) en 40 éléments et réalisé une analyse élastique non linéaire (au second ordre complet).

Méthode	CAM	OSSA2D	FINELG
$M_B^{II-\Delta-\delta}$	19,76 kN.m	19,77 kN.m	19,84 kN.m
$Erreur = \frac{M_{ana} - M_{num}}{M_{num}}$	—	-0.06%	-0.39%

Tableau 5.2-Evaluation du moment d'extrémité B au second ordre complet ($M_B^{II-\Delta-\delta}$)

Nous observons une très bonne corrélation des résultats obtenus.

De la même manière, nous pouvons déterminer les moments d'extrémités au premier ordre (M_B^I) et au second ordre global ($M_B^{II-\Delta}$) avec les formules suivantes :

$$M_B^I = M_{B,ns} + M_{B,s} = 14,46 \quad (5.19)$$

$$M_B^{II-\Delta} = C_{m,extr}^* \cdot M_{B,ns} + C_{m,extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_{B,s} = 21,51 \text{ avec } \alpha = 2 \text{ et } \beta = 1 \quad (5.20)$$

Nous pouvons comparer ces résultats aux moments obtenus via OSSA2D. Pour obtenir les moments au second ordre complet, nous avons discrétisé chaque barre par un seul élément et réalisé une analyse élastique non linéaire. L'analyse « non linéaire » dans OSSA2D s'effectue par itérations successives jusqu'à atteindre l'équilibre.

Méthode	CAM	OSSA2D	Erreur
$M_B^{II-\Delta}$	21,51 kN.m	21.404 kN.m	0,5 %
M_B^I	14.46 kN.m	14.46 kN.m	0,03%

Tableau 5.3-Comparaison des moments au premier ordre (M_B^I) et second ordre global ($M_B^{II-\Delta}$)

La précision du moment au second ordre est également très bonne. Il en est de même, plus logiquement, pour le moment au premier ordre.

3 Degré de précision de la méthode d'analyse CAM

Dans cette section, nous faisons varier l'inertie de la colonne 2 (HEB 160 -> HEB 340) afin d'avoir des rapports d'inertie entre la colonne 1 et 2 (I_{c2}/I_{c1}) de 1 jusqu'à 15. Nous déterminons également les moments d'extrémités pour différents multiplicateurs critiques globaux (3,5,7 et 10). Ensuite, nous réalisons l'ensemble de cette démarche avec deux poutres différentes à savoir une IPE 220 et une IPE 400. Pour finir, nous examinerons l'influence de l'effet P- δ sur les moments d'extrémités.

En premier lieu, nous allons regarder l'influence du multiplicateur critique selon que nous utilisons la formule de l'Eurocode ou les résultats de programmes numériques.

3.1 Multiplicateur global

Sur la Figure 5.5, nous voyons l'évolution du facteur d'amplification $\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}$ où nous avons pris comme abscisse, pour référence, le multiplicateur critique fourni par Finelg. Nous voyons que dans l'ensemble, les facteurs d'amplification de FINELG et OSSA2D sont assez proches. De manière générale, le facteur d'amplification d'OSSA2D est plus élevé que celui de FINELG

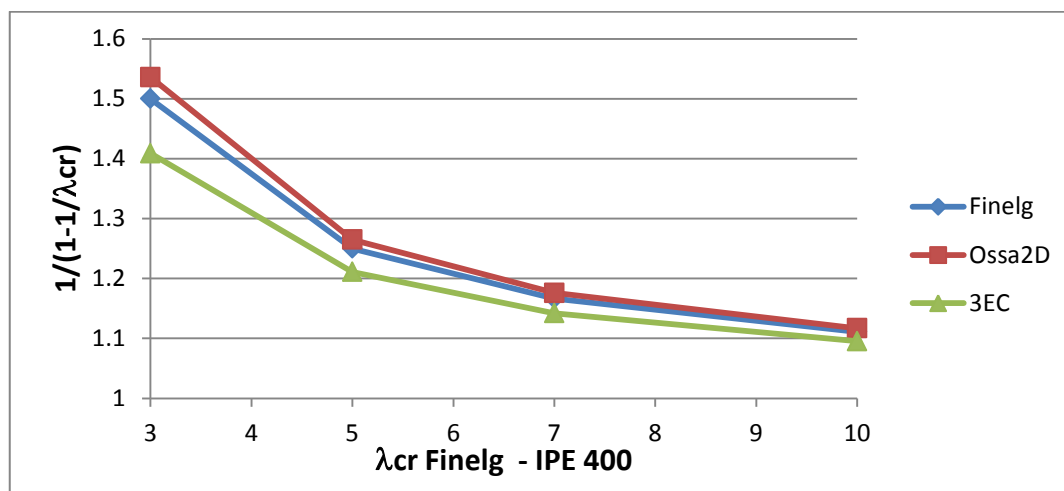


Figure 5.5- Evolution du facteur d'amplification en fonction des méthodes utilisées.

Par contre, nous constatons que le multiplicateur critique obtenu avec la formule de l'Eurocode 3 (voir équation (2.9)) est supérieur et donc l'amplification plus faible. Pour un multiplicateur critique de 3 avec FINELG et pour un même chargement, nous obtenons un multiplicateur de 3,4 avec l'Eurocode. Au niveau des facteurs d'amplification, avec FINELG, nous avons 1,5 et avec l'Eurocode, nous avons 1,417. Nous voyons que l'erreur est d'environ 10% ce qui n'est pas négligeable.

De manière générale, nous obtenons les erreurs relatives moyennes suivantes (Tableau 5.4) sur toute une série de simulations avec comme référence le multiplicateur critique de FINELG.

Erreur	$\frac{\lambda_{cr,FINELG} - \lambda_{cr,EC}}{\lambda_{cr,FINELG}}$	$\frac{\lambda_{cr,finleg} - \lambda_{cr,OSSA2D}}{\lambda_{cr,FINELG}}$
IPE 400	-14,87 %	4,45 %
IPE 220	-5,41 %	2,95 %

Tableau 5.4 – Erreur sur la détermination du multiplicateur critique

Par la suite, nous réaliserons l'ensemble des calculs de moments d'extrémités avec les deux multiplicateurs (formule Eurocode et valeur FINELG) afin d'en voir l'influence.

3.2 Raideur de la restrainte (C) et du ressort (K)

En fonction de la géométrie du portique i.e des éléments de type poutre et colonne qui le composent, les paramètres géométriques du modèle vont varier. Ces paramètres sont évidemment indépendants du chargement ou du multiplicateur critique.

3.2.1 Raideur du ressort K

Sur le Tableau 5.5, nous voyons que la raideur du ressort est fortement liée au rapport d'inertie entre les deux colonnes et la poutre. Néanmoins, pour de grandes inerties, nous observons que la raideur augmente de moins en moins pour poutre similaire. En effet, à un certain moment, même si l'inertie de la colonne 2 augmente, la poutre empêche une grande augmentation de la raideur du ressort.

K (kN/m)	$I_{c2}/I_{c1} = 1$	$I_{c2}/I_{c1} = 4.5$	$I_{c2}/I_{c1} = 10$	$I_{c2}/I_{c1} = 15$
IPE 400	226	750	1185	1392
IPE 200	164	289	329	341

Tableau 5.5 – Raideur du ressort K en fonction des inerties des éléments du portique

Nous définissons le paramètre K^* adimensionnel qui nous permettra, par la suite, d'identifier chaque géométrie par le biais du paramètre :

$$K^* = \frac{K_{struct}}{K_{c1}} \quad (5.21)$$

K^*	$I_{c2}/I_{c1} = 1$	$I_{c2}/I_{c1} = 4.5$	$I_{c2}/I_{c1} = 10$	$I_{c2}/I_{c1} = 15$
IPE 400	2	4	5.40	6
IPE 200	2	2.5	2.63	2.66

Tableau 5.6 - Paramètre K^* en fonction des inerties des éléments du portique

Ce dernier Tableau 5.6, permet de mieux mettre en évidence le phénomène décrit au paragraphe précédent. En effet, nous remarquons que la raideur transversale du système augmente de plus en plus par rapport à la raideur de la colonne mais de moins en moins fortement au fur et à mesure que le rapport des inerties devient important. Notamment, à cause de l'inertie de la poutre dont la raideur flexionnelle est de plus en plus faible comparativement à la raideur flexionnelle de la colonne 2.

3.2.2 Raideur de la restreinte (C)

Pour rappel, nous devons déterminer la raideur des restreintes pour les portiques à nœuds mobiles et à nœuds fixes.

$C(kN.m/rad)$		$I_{c2}/I_{c1} = 1$	$I_{c2}/I_{c1} = 4.5$	$I_{c2}/I_{c1} = 10$	$I_{c2}/I_{c1} = 15$
IPE 400	C_{NS}	35 200	36 967	38 521	39 200
	C_S	35 700	36 620	36 859	36 900
IPE 220	C_{NS}	4 832	5 284	5 442	5 487
	C_S	5 325	5 744	5 846	5 870

Tableau 5.7 - Raideur de la restreinte C en fonction des inerties des éléments du portique

Nous voyons que la valeur de la restreinte est fortement influencée par la raideur flexionnelle de la poutre et, dans une moindre mesure, par la raideur flexionnelle de la colonne. En effet, pour la poutre IPE 400, la raideur de la restreinte est relativement constante et augmente peu en fonction de l'apport de la raideur flexionnelle de la colonne. Tandis que pour la poutre IPE 200, nous observons que l'apport de raideur flexionnelle de la colonne se fait plus ressentir sur la restreinte.

Au niveau de l'influence entre la restreinte « sway » et « non-sway », nous remarquons que les valeurs sont fort similaires et que la restreinte à nœuds fixes est parfois inférieure à la restreinte à nœuds mobiles. Nous n'avons pas trouvé d'explication physique à ce phénomène. De fait, nous aurions tendance à penser que la restreinte à nœuds fixes est plus importante que celle à nœuds mobiles car les nœuds sont fixes. Cependant, même si les nœuds sont non déplaçables, ils s'opposent très peu la déformation flexionnelle de la poutre ou de la colonne d'où la différence assez faible entre les deux valeurs.

3.3 Moments d'extrémités au second ordre complet

Maintenant que nous avons regardé l'influence de la géométrie du portique, nous allons analyser les différents résultats des moments d'extrémités obtenus au second ordre complet en fonction des géométries et du multiplicateur critique. Nous examinerons également l'influence de l'effet P- δ sur les moments d'extrémités au second ordre complet (P- Δ - δ) par rapport aux moments d'extrémités au second ordre global (P- Δ).

Nous affichons les résultats pour la poutre IPE 400 et pour la poutre IPE 220 en utilisant le multiplicateur de l'Eurocode3 et de FINELG. L'ensemble des résultats au niveau des moments sont comparés avec les moments obtenus via FINELG et OSSA2D. Les résultats fournis par OSSA2D sont présentés en annexe (voir annexe C). Pour la suite de la présentation, nous affichons toujours les résultats avec pour abscisse le multiplicateur critique global de FINELG qui est pris comme référence.

3.3.1 Multiplicateur critique de l'Eurocode

L'erreur calculée est défini comme

$$Erreur\ relative(\%) = \frac{M_{analytique} - M_{numérique}}{M_{numérique}} \cdot 100 \quad (5.22)$$

Lorsque le moment analytique est supérieur au moment numérique, l'erreur est donc positive et nous sommes donc du côté de la sécurité. Au contraire, lorsque l'erreur est négative, le moment analytique est inférieur au moment numérique, nous sommes insécuritaires. Nous utilisons toujours cette même démarche afin d'avoir une erreur positive lorsque nous somme sécuritaires.

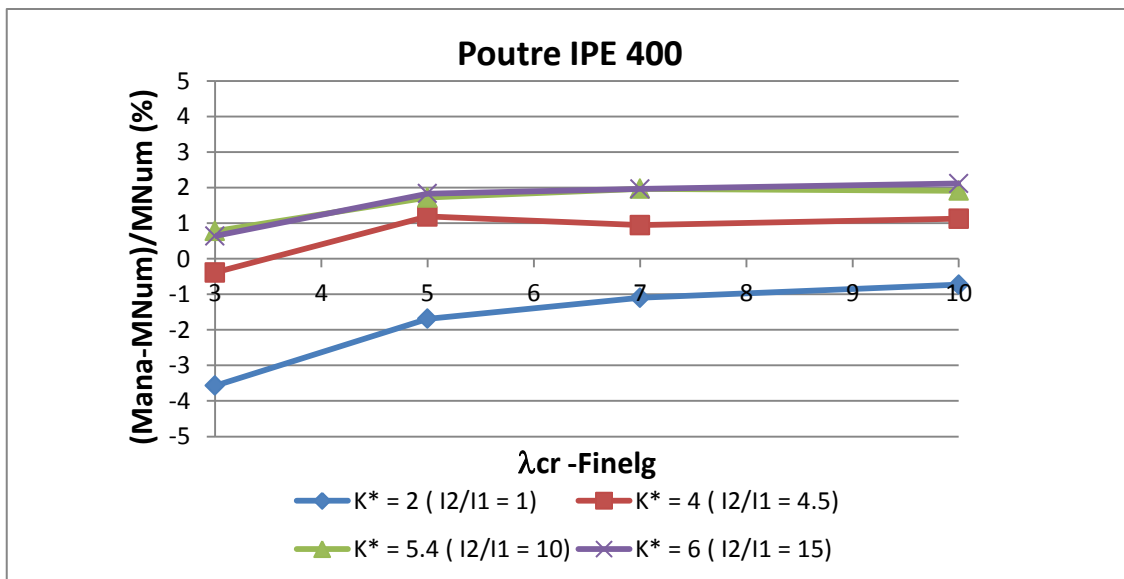


Figure 5.6- Evolution de l'erreur relative en fonction du multiplicateur critique

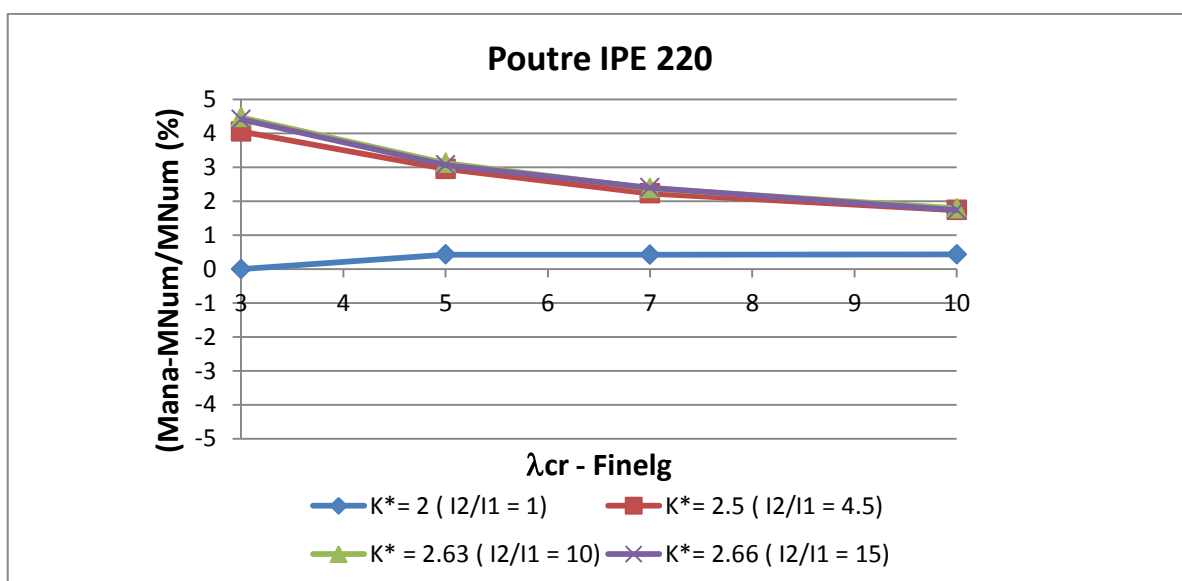


Figure 5.7- Evolution de l'erreur relative en fonction du multiplicateur critique

Sur les Figures 5.6 et 5.7, nous observons que la précision de la méthode est assez bonne avec des erreurs variant de -4% à 4 %. Plus le multiplicateur critique global est élevé et plus la précision augmente ce qui semble logique car les effets du second ordre sont moindres. Néanmoins, nous remarquons que, pour des structures sensibles aux effets du second ordre, nous avons une erreur qui est plus élevée et qui peut être insécuritaire lorsque la poutre a une grande inertie. Cette erreur négative s'explique car le coefficient d'amplification du second ordre global est sous-évalué avec le λ_{cr} de l'Eurocode par rapport à celui calculé avec FINELG.

3.3.2 Multiplicateur critique via FINELG

Sur les Figures 5.8 et 5.9, en utilisant le λ_{cr} de FINELG, nous constatons que le moment est surévalué, nous sommes donc toujours sécuritaires. A nouveau, nous remarquons que l'erreur diminue avec l'augmentation du multiplicateur critique, avec une variation de l'erreur comprise entre 0.5% et 7 %. De plus, nous remarquons que l'erreur augmente en fonction de la raideur relative du $K^*=(K_{système}/K_{c1})$ i.e que la raideur du ressort du modèle est élevée.

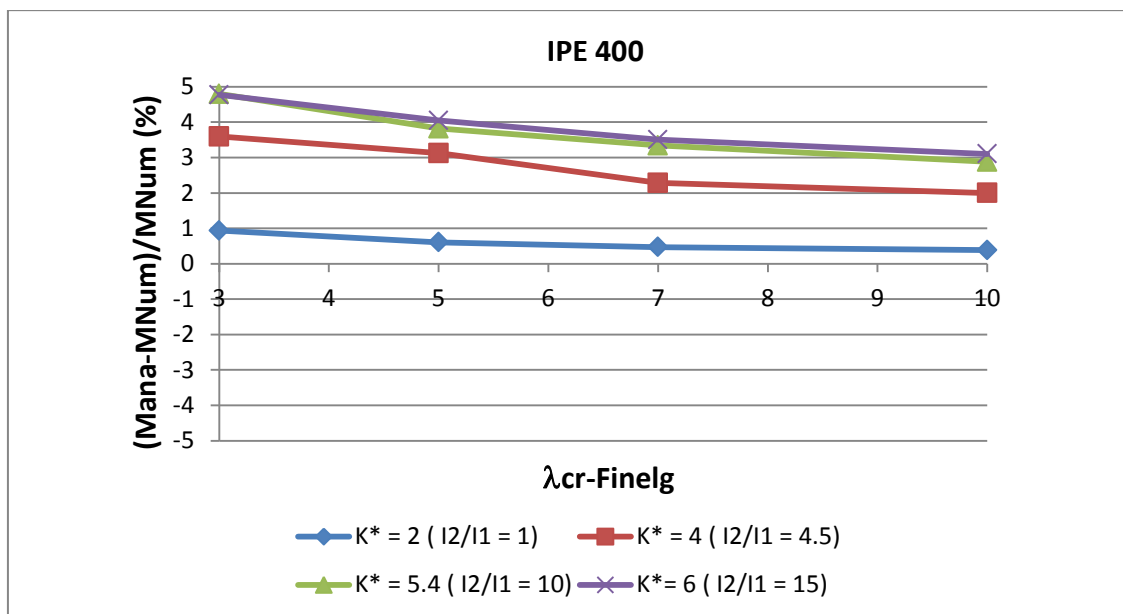


Figure 5.8 - Evolution de l'erreur relative en fonction du multiplicateur critique

Sur la Figure 5.9 avec une poutre IPE 220, nous voyons que les courbes d'erreur pour un K^* semblable sont assez proches. Nous comprendrons pourquoi au point suivant.

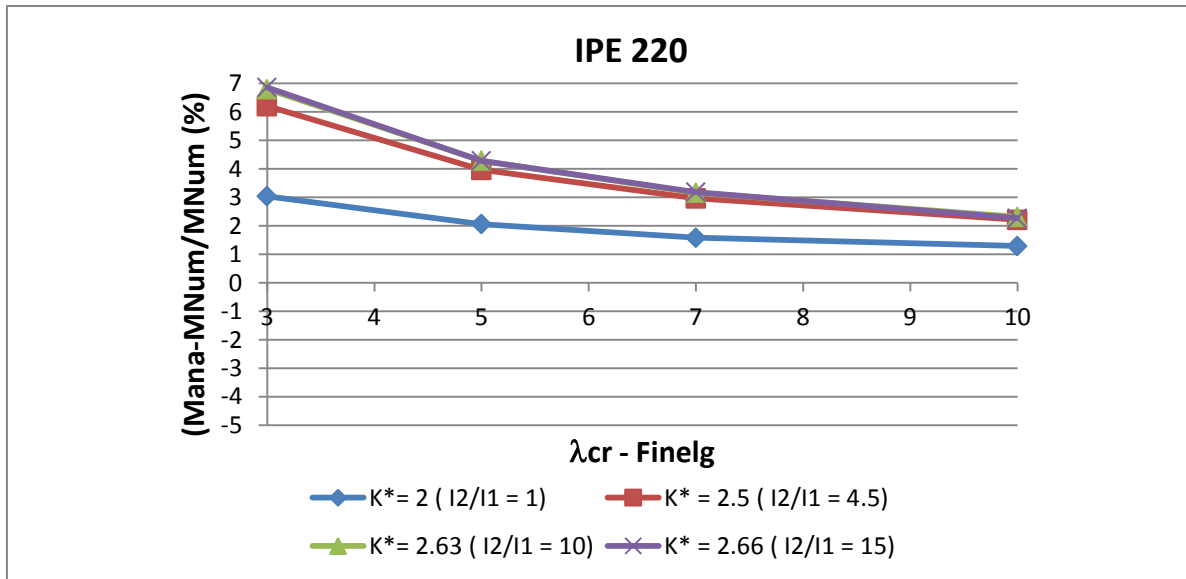


Figure 5.9 - Evolution de l'erreur relative en fonction du multiplicateur critique

3.3.3 Influence de l'effet P- δ

Sur la Figure 5.10 ci-dessous, nous avons mis en évidence l'influence de l'effet P- δ (lié au second ordre local) en affichant le rapport entre le moment du second ordre global ($M^{II-\Delta}$) et le moment du second ordre complet ($M^{II-\Delta-\delta}$) en fonction du multiplicateur global (λ_{cr}). Nous remarquons que plus la raideur du ressort (K^* élevée) et de la restreinte du modèle (C) (liée principalement à l'inertie de la poutre) sont élevées, plus l'effet P- δ est prononcé. Notons également que la prise en compte du second ordre local sur les moments d'extrémités a pour effet de diminuer le moment d'extrémité au second ordre global et ceci, dans tous les cas. Nous constatons que cette diminution peut aller jusqu'à 20% ce qui est non négligeable.

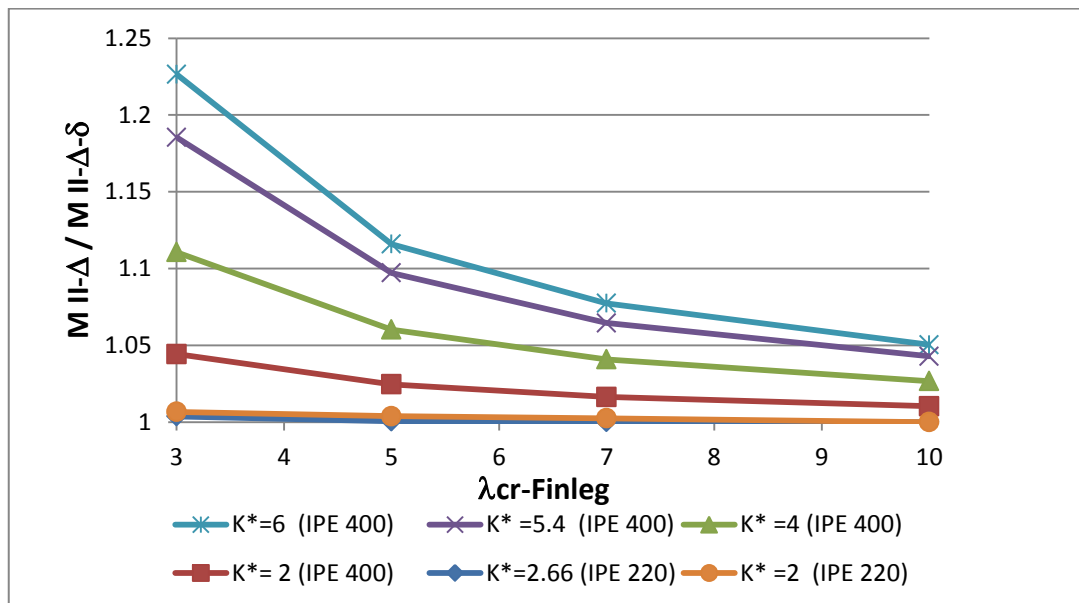


Figure 5.10- Influence de l'effet P- δ sur les moments d'extrémités

En examinant le portique avec une poutre IPE 220, nous voyons que l'influence de l'effet P- δ est très faible quel que soit le rapport d'inertie entre les deux colonnes. Cette observation nous permet d'expliquer pourquoi les courbes d'erreur sont si proches l'une de l'autre sur la Figure 5.9.

Dans la suite du travail, nous limiterons notre analyse à des structures avec une poutre de grande inertie (IPE 400) afin de mettre en évidence l'influence de l'effet du second ordre local sur les moments d'extrémités et donc faire valoir l'utilité de la méthode CAM.

3.4 Influence de l'effort normal

Pour déterminer le moment exact au second ordre complet, nous utilisons les fonctions de stabilité avec l'effort normal au premier ordre résultant de la somme des efforts normaux obtenus par les analyses élastique « sway » et « non-sway ».

$$N_{Ed}^I = N_{NS}^I + N_S^I \quad (5.23)$$

Il est possible de déterminer l'effort normal en amplifiant celui provenant de l'analyse « sway ». Vu la géométrie assez simple du portique et en réalisant l'équilibre des moments en A, nous avons :

$$N_S^I = (Q + R) \cdot \frac{H}{L} \quad (5.24)$$

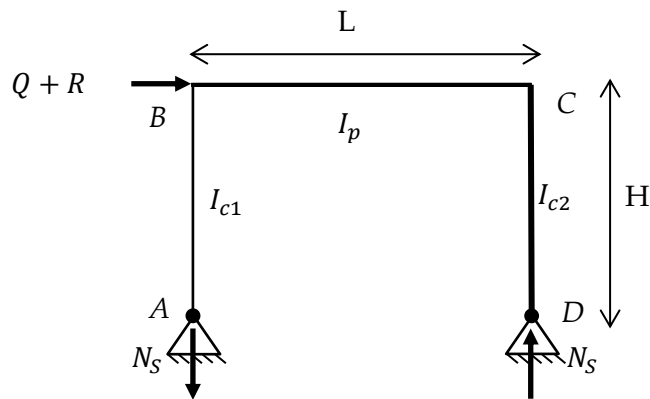


Figure 5.11-Effort normal dans les colonnes de la structure « sway »

Lorsque nous amplifions le moment « sway » par le facteur d'amplification $\left(\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}\right)$, c'est comme si nous amplifions l'effort horizontal par ce même facteur. Nous pouvons donc déterminer l'effort normal au second ordre global avec

$$N_s^{II-\Delta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \cdot (Q + R) \cdot \frac{H}{L} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \cdot N_S^I \quad (5.25)$$

Et donc

$$N_{Ed}^{II-\Delta} = N_{ns} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \cdot N_s \quad (5.26)$$

Nous voyons donc que si l'effort horizontal est important et que la structure est fort sensible à l'effet du second ordre global (multiplicateur critique global faible), l'influence peut être non négligeable.

En réalisant l'ensemble des calculs avec cet effort normal au second ordre, nous n'avons constaté qu'une variation d'environ 0.01-0.05 % sur la précision de moments. En effet, dans ce cas, l'effort horizontal n'est pas trop important. Nous supposons donc cet effet négligeable dans la suite du travail. Cependant, si l'effort horizontal est important, il pourrait être intéressant d'en voir l'influence sur la variation de l'effort normal.

4 Conclusion

Après analyse, nous nous rendons compte que la méthode CAM permet de déterminer avec une assez bonne précision (à $\pm 5\%$ près) les moments d'extrémités au second ordre complet.

En utilisant le multiplicateur global calculé via la formule de l'Eurocode, la valeur de ces moments d'extrémités est parfois insécuritaire (moment sous-évalué) surtout lorsque la structure est fort sensible aux effets du second ordre global (λ_{cr} faible), il faut donc y veiller. Cette insécurité provient de la valeur du multiplicateur qui est sous-évalués et donc l'amplification qui en résulte est moindre. En utilisant le multiplicateur critique fourni par le biais d'un logiciel numérique, nous obtenons toujours une erreur positive, nous sommes donc du côté de la sécurité.

De plus, nous avons observé que l'effet P- δ se manifeste principalement lorsque la raideur du modèle et la raideur de la restrainte sont élevés et que le multiplicateur critique global est faible. La prise en compte du second ordre local sur les moments d'extrémités réduit le moment d'extrémité au second ordre global de manière assez importante (jusqu'à 20%). Dans notre exemple, en utilisant le moment au second ordre global, nous sommes donc toujours sécuritaires car ce dernier est plus élevé que le moment exact.

Enfin, nous avons examiné l'influence de la prise en compte de l'effort normal au premier ordre ou au second ordre et nous avons obtenu une variation assez faible sur la détermination des moments d'extrémités. Nous avons donc décidé de négliger cette influence. Cependant, pour des efforts horizontaux importants et un facteur élevé d'amplification lié au second ordre global, l'effort normal peut être notablement influencé. En effet, si l'effort de compression augmente, l'effet du second ordre local sur la valeur des moments d'extrémités est plus important.

Dans la suite du mémoire, nous allons donc utiliser cette méthode d'analyse CAM dans le processus complet d'analyse et de vérification afin d'en cerner les avantages par rapport à d'autres méthodes d'analyse et vérification qui omettent les effets P- δ sur les moments d'extrémités.

Chapitre 6 : Méthode d'analyse élastique au 1^{er} ordre de structures à nœuds mobiles

1 Introduction

Selon l'Eurocode 3, lorsque les effets du second ordre global sont non négligeables ($\lambda_{cr} < 10$), nous pouvons réaliser une analyse au premier ordre en n'oubliant pas d'inclure les imperfections globales. Ensuite, nous devons vérifier les stabilités locale et globale des barres en prenant en compte les longueurs de flambement à nœuds mobiles. Cette vérification intègre les imperfections locales. Pour finir, nous devons réaliser les vérifications de résistance des sections d'extrémités avec les moments calculés au premier ordre élastique majorés de 20 %.

2 Analyse

Nous réalisons une analyse élastique linéaire du premier ordre en incluant l'imperfection globale de la structure par le biais d'une force horizontale équivalent (H_{ED}) (voir section 2.1.1 du chapitre 1).

3 Vérifications

Les sections utilisées étant de classe 1 ou 2 en compression, nous pouvons réaliser les vérifications de stabilité et de sections en utilisant un critère plastique.

3.1 Vérifications de la stabilité de barres

Nous avons fait le choix de travailler dans le plan pour faciliter notamment la modélisation par éléments finis. L'ensemble des éléments des portiques étudiés sont positionnés selon leur axe fort. Comme nous appliquons un chargement vertical et horizontal dans le plan, les éléments sont comprimés et fléchis uniquement selon leur axe fort. Le déversement (instabilité hors-plan, selon l'axe faible), influençant notamment le moment de résistance ultime, n'est pas pris en compte. De même, la vérification de la stabilité selon l'axe faible (instabilité hors plan également) n'est pas vérifiée.

3.1.1 Formules de vérification utilisées

Nous utilisons les formules de vérification de stabilité pour élément comprimé –fléchi selon l'axe fort ($N_{Ed} \neq 0, M_{y,Ed} \neq 0$ et $M_{z,Ed} = 0$). La formule utilisée est la formule de l'Eurocode 3 méthode 1 pour les classes de section 1 et 2 (référence [1]) :

$$\text{Selon l'axe fort : } \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}} + \mu_y \frac{C_{my} \frac{M_{y,Ed}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)}}{C_{yy} M_{y,Rk}} \leq 1 \quad (6.1)$$

Avec

- N_{Ed} et $M_{y,Ed}$ sont les efforts obtenus par l'analyse élastique au premier ordre avec $M_{y,Ed}$ le moment maximum en travée.
- $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}}$ est la charge critique d'Euler, fonction de la longueur de flambement (à nœuds mobiles, dans notre cas)
- $\mu_y = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}{1 - \chi_y \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$ est un facteur lié à l'imperfection locale
- χ_y est le facteur de réduction dû au flambement, fonction de l'élançement $\left(\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}\right)$ et des courbes de flambement européennes avec le facteur d'imperfection local (α).
- C_{my} est le coefficient de moment équivalent, fonction des distributions de moments selon y (voir chapitre 2 - Rappels théoriques, section 4).
- C_{yy} est un facteur d'interaction plastique au niveau de la section entre le moment et l'effort normal
- $\gamma_{M1} = 1$ est le coefficient partiel de sécurité pour la résistance des barres aux instabilités

Dès le départ, nous avons expliqué que la formule de vérification tient compte de l'imperfection locale mais que celle-ci n'apparaissait nulle part. L'équation de vérification des stabilités de barres peut en fait s'écrire sous la forme de

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rk}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \frac{(e_{0,d} \cdot N_{Ed} + C_m \cdot M_{y,Ed})}{(C_{yy} \cdot M_{y,Rk})} \leq 1 \quad (6.2)$$

Dans cette équation, nous voyons bien le moment supplémentaire ($e_{0,d} \cdot N_{Ed}$) au premier ordre est induit par l'imperfection locale de barre (sous forme d'arc). En effet, ce moment du premier ordre est égal à l'excentricité de la barre à mi-travée ($e_{0,d}$) (dû à l'imperfection locale) multiplié par l'effort normal N_{Ed} agissant sur la barre.

Le moment supplémentaire lié à l'excentricité au second ordre vaut :

$$M_{II}^{P-\Delta-\delta} = N_{Ed} \cdot e_{0,d} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \quad (6.3)$$

Avec le facteur $\frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}$ qui est le facteur d'amplification de la déformée pour atteindre un nouvel équilibre de la barre déformée. A nouveau, nous utilisons les longueurs de flambement à nœuds mobiles pour tenir compte du second ordre complet et ceci dans le calcul de $N_{cr,y}$. Ce facteur figure bien dans la formule (6.2).

Cependant, nous ne connaissons pas cette excentricité ($e_{0,d}$). Elle est donc calculée analytiquement, en résolvant la formule (6.2) pour un cas particulier. Ensuite, la formule analytique de cette excentricité est réintroduite dans l'équation (6.2) et pour finir, nous obtenons l'équation (6.1) avec la disparition du terme lié au moment supplémentaire induit ($e_{0,d} \cdot N_{Ed}$) et l'apparition des paramètres μ_y et χ_y . En Annexe D, se trouve l'ensemble du développement pour déterminer ($e_{0,d}$) et arriver au final à la formule (6.1).

Notons que si nous déterminons les efforts en réalisant une analyse élastique qui inclut les effets du second ordre complet (P- δ - Δ) et les imperfections (locales et globale), nous n'avons plus qu'à faire une vérification de résistance de section en travée (voir équation (6.9) ou (6.17)).

Les efforts étant calculés au premier ordre, la prise en compte du second ordre se fait par le biais des différents facteurs qui multiplient l'effort normal (N_{Ed}) et le moment ($M_{y,Ed}$).

3.1.2 Influence du second ordre sur la vérification de stabilité à l'effort normal

Le terme de vérification associé à l'effort normal dans la formule (6.1) est

$$\frac{1}{\gamma_{M1}} \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}} \quad (6.4)$$

Le facteur de réduction dû au flambement χ_y est calculé sur base d'une longueur de flambement à nœuds mobiles ($L_{fl} \geq L_{épure}$).

Pour les méthodes qui intègrent déjà les effets du second ordre global dans l'analyse, nous utilisons la longueur de flambement à nœuds fixes ($L_{épure}/2 \leq L_{fl} \leq L_{épure}$) pour calculer le facteur de réduction χ_y dû au flambement.

La longueur de flambement à nœuds mobiles ($L_{fl} \geq L_{épure}$) étant plus grande que celle à nœuds fixes ($L_{épure}/2 \leq L_{fl} \leq L_{épure}$), la charge critique (N_{cr}) est dès lors plus faible. L'élançement de la barre $\bar{\lambda}$ est plus important et donc le facteur de $1/\chi_y$, obtenu avec L_{fl} à nœuds mobiles, est plus important que le facteur $1/\chi_y$, obtenu avec L_{fl} à nœuds fixes.

Pour les méthodes qui intègrent déjà les effets du second ordre global dans l'analyse, nous utilisons souvent la valeur de N_{Ed} calculée au premier ordre. En effet, si les charges

horizontales sont faibles vis-à-vis des charges verticales, la variation de l'effort normal entre le premier ordre et le second ordre n'est pas très importante. Cependant, la variation du facteur χ_y , fonction de la longueur de flambement à nœuds mobiles et à nœuds fixes, est-elle significative ? Dans la plupart des cas, nous avons intérêt à réaliser une analyse au second ordre et puis une vérification à nœuds fixes afin de ne pas être trop sécuritaire. Ces divers propos sont illustrés par la suite dans un exemple.

3.1.3 Influence du second ordre sur la vérification de stabilité au moment

Le terme de vérification associé au moment est le suivant :

$$\mu_y \frac{C_{my} \frac{M_{y,Ed}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)}}{C_{yy} M_{y,Rk}} \quad (6.5)$$

3.1.3.1 Facteur μ_y

Le facteur μ_y est défini comme :

$$\mu_y = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}{1 - \chi_y \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \quad (6.6)$$

Ce dernier facteur provient de la prise en compte de l'excentricité initiale ($e_{0,d}$) comme explicité précédemment et calculé toujours sur base de longueurs de flambement à nœuds mobiles.

3.1.3.2 Facteur C_{yy}

Le facteur C_{yy} est un facteur qui tient compte de l'interaction plastique entre le moment et l'effort normal comme nous pouvons le voir sur la figure 6.1 avec, en trait plein, le critère exact et, en trait pointillé, le critère approché via le facteur C_{yy} .

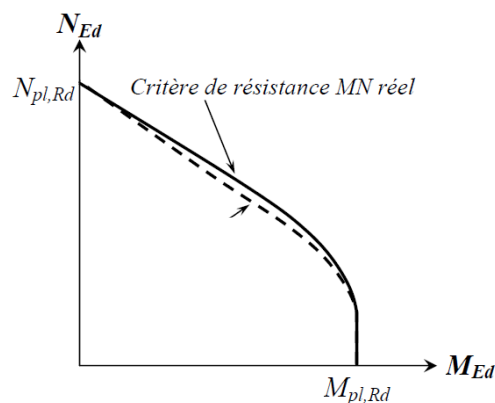


Figure 6.1- Courbe d'interaction plastique entre N et M (référence [7])

Ce facteur dépend notamment de l'élanement réduit $\bar{\lambda}(= \text{fonction}(N_{cr}))$, de $C_{my} \left(= \text{fonction de } \left(\frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \right) \right)$ et du rapport $\frac{N_{ED}}{N_{pl}}$. Il est donc influencé par les effets du second ordre à cause de la charge critique N_{cr} et de l'effort normal N_{Ed} .

3.1.3.3 Facteur $\frac{C_{my}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)}$

Il reste le terme $\frac{C_{my}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)}$ qui est le facteur principal de l'amplification du moment au premier ordre $M_{y,Ed}$ qui tient compte des effets du second ordre complet.

Nous pouvons écrire que

$$M_{max, travée}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{my}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} M_{y,Ed} \quad (6.7)$$

Dans ce cas, le moment sollicitant $M_{y,Ed}$ est calculé au premier ordre, dès lors le facteur d'amplification $\frac{C_{my}}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)}$ tient compte du second ordre car les longueurs de flambement à nœuds mobiles sont à nouveau utilisées pour déterminer $N_{cr,y}$.

Nous remarquons que le facteur $\frac{1}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)}$ est un facteur assez similaire au facteur d'amplification du second ordre $\frac{1}{\left(1 - \frac{V_{Ed}}{V_{cr}}\right)}$ si ce n'est que l'un tient compte de l'amplification liée à un multiplicateur critique de la barre ($N_{cr,y}/N_{ED}$) tandis que l'autre est lié à un multiplicateur critique global ou d'ensemble ($\lambda_{cr} = V_{cr}/V_{Ed}$). Le multiplicateur critique et le multiplicateur critique global étant similaires, il est assez difficile de distinguer l'effet P- δ de l'effet P- Δ . Nous parlerons juste d'effet du second ordre.

Ces multiplicateurs critiques sont équivalents à condition que les colonnes d'un même étage soient instables en même temps ce qui n'est le cas que lorsque nous sommes étudions un portique symétrique tant au niveau du chargement que des géométries des colonnes.

A contrario, lorsque le portique est dissymétrique, il est fort sécuritaire d'utiliser cette méthode de calcul au premier ordre à nœuds mobiles car les colonnes ne sont pas instables en même temps. En effet, la colonne la plus faible, lorsqu'elle commence à être instable, subit un effet de rappel de la part de la colonne plus forte. Il y a donc un transfert de charges car la raideur appelle l'effort (structure hyperstatique) vers la colonne la plus résistante jusqu'au moment où il y a une instabilité d'ensemble.

L'utilisation de cette méthode est fort sécuritaire car nous négligeons ce transfert de charges. En effet, nous considérons les colonnes de manière isolée avec les longueurs de flambement à nœuds mobiles (voir Figure 6.2). Nous le verrons par la suite en appliquant cette méthode sur des portiques symétriques et dissymétriques.

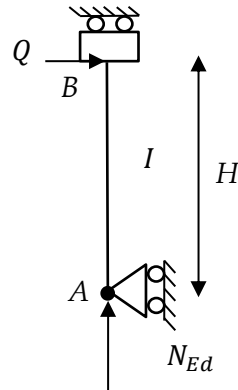


Figure 6.2 – Colonne vérifiée de manière isolée par rapport au reste de la structure

Après avoir analysé le facteur $\frac{1}{(1-N_{Ed}/N_{cr,y})}$ il nous reste à regarder le facteur C_{my} qui est le coefficient de moment équivalent et qui dépend de la forme du diagramme de moment.

Le coefficient C_{my} en travée est calculé en supposant une barre bi-appuyée à nœuds fixes (alors que les nœuds sont déplaçables...) et avec une longueur de flambement (L_{fl}) à nœuds mobiles (voir formules de la Figure 2.10). En réalité, comme explicité dans les rappels théoriques (Chapitre 2), nous devrions tenir compte des conditions d'appuis réelles de l'élément et donc des effets de restraints liés aux liaisons poutres-poteaux. Notons, qu'en utilisant le $C_{my,travée}$ pour une barre bi-rotulée par rapport au $C_{my,travée,excat}$ pour une barre avec les conditions d'appuis réelles, nous sommes côté de la sécurité car l'amplification de la déformée est plus importante. En effet, les restraints vont s'opposer à l'amplification de la déformée.

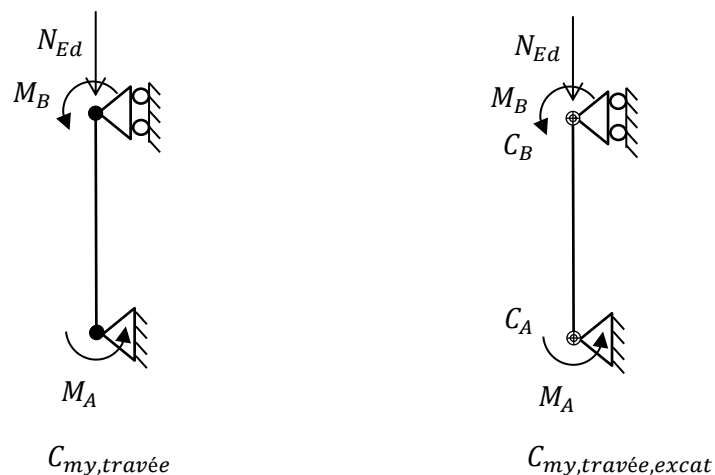


Figure 6.3 – Extraction de la barre avec conditions d'appuis bi-rotulés ou réelles

3.2 Vérification de résistance des sections aux extrémités

En plus de la vérification de la stabilité de l'élément en travée, nous devons réaliser la vérification de résistance des sections aux extrémités de l'élément. Les sections étant de classe 1 ou 2, nous pouvons réaliser une vérification en utilisant un critère plastique.

3.2.1 Détermination des sollicitations

Les efforts sollicitants étant calculés au premier ordre, il est recommandé dans l'ancien Eurocode (ENV) (référence [10]) de multiplier le moment du premier ordre par un facteur 1.2 afin de tenir compte de l'amplification due aux effets du second ordre. Dans l'Eurocode actuel (référence [1]), nous n'avons trouvé aucune trace d'un tel facteur.

Cependant, nous nous rendons compte que ce facteur 1.2 correspond à un multiplicateur critique global de $6 \left(1.2 = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} \right)$. Ce facteur d'amplification semble donc sécuritaire lorsque la structure a un multiplicateur critique global supérieur à 6 mais est insécuritaire lorsqu'il est inférieur à 6. Notons que si le multiplicateur critique vaut 3, l'amplification vaut 1.5, la différence est donc assez importante et du côté de l'insécurité. Si le multiplicateur critique vaut 10, l'amplification vaut 1,11, la différence est assez importante et cette fois, du côté de la sécurité.

Une première mesure alternative assez simple serait donc de multiplier le moment du premier ordre par le facteur d'amplification $\frac{1}{1-1/\alpha^*}$. La valeur du paramètre α^* vaudrait le multiplicateur local $\left(\frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \right)$ dans le cas d'un portique à géométrie et chargement symétriques et vaudrait le multiplicateur critique global du premier mode d'instabilité ($\lambda_{cr,global}$) si la géométrie est non symétrique. En effet, dans le cas d'un portique à géométrie dissymétrique, l'effort de rappel n'est pas pris en compte. Le multiplicateur critique de la barre $\left(\left(\frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \right) \right)$ avec N_{cr} associé aux longueurs de flambement à nœuds mobiles) peut être faible et donc l'amplification qui en résulte est trop importante. Nous aurions donc

$$M_{extr}^{II} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)} M_{Ed}^I$$

où $\alpha = \lambda_{cr,global}$ si la structure est dissymétrique (6.8)

$$\alpha = \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \quad \text{si } \lambda_{cr,global} \cong \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}$$

Cette approche alternative semble assez facilement applicable et permettrait d'avoir une meilleure estimation du moment au second ordre.

3.2.2 Vérification simple et sécuritaire

Selon l'Eurocode 3 (référence[1]), nous pouvons réaliser une addition linéaire des rapports entre les sollicitations et la résistance associée à chaque sollicitation. Pour les classes de section 1 et 2, nous pouvons écrire :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leq 1 \quad (6.9)$$

Nous avons les sollicitations qui sont N_{Ed} , V_{Ed} , $M_{y,Ed}$ et $M_{z,Ed}$ et les résistances qui sont N_{Rd} , $M_{y,Rd}$ et $M_{z,Rd}$. L'influence de l'effort tranchant (V_{Ed}) est comprise au niveau des moments résistants via le paramètre ρ .

Les efforts résistants sont calculés avec

$$N_{Rd} = N_{pl,Rd} = A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad (6.10)$$

$$M_{y,Rd} = M_{y,pl,Rd} = W_{pl,y} \cdot \frac{f_y(1-\rho)}{\gamma_{M0}} \quad (6.11)$$

$$M_{z,Rd} = M_{z,pl,Rd} = W_{pl,z} \cdot \frac{f_y(1-\rho)}{\gamma_{M0}} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } V_{ED} > \frac{V_{pl,Rd}}{2}, \text{ nous avons } \rho &= \left(\frac{2V_{Ed}}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2 \quad \text{où } V_{pl,Rd} = \frac{A_v \left(\frac{f_y}{\sqrt{3}} \right)}{\gamma_{M0}} \\ \text{Si } V_{ED} \leq \frac{V_{pl,Rd}}{2}, \text{ nous avons } \rho &= 0 \text{ et donc l'influence } V_{Ed} \text{ est négligée.} \end{aligned} \quad (6.13)$$

3.2.3 Vérification avec interaction N- M et M-M

Le critère précédent est sécuritaire car il ne tient pas compte des différentes interactions qui existent entre l'effort normal et le moment ainsi qu'entre les moments entre eux lors de flexion bi-axiale.

Dans cette section, nous réalisons la vérification de la résistance plastique de sections en incluant les différentes interactions. Les formules qui suivent sont tirées de l'Eurocode 3 (référence[1]).

Etant donné que nous travaillons dans le plan, les sections sont comprimées et fléchies selon leur axe fort. Les sections utilisées sont bi-symétriques, poutres en I et colonnes en H, soit des profils laminés courants.

L'effort normal peut être négligé sur la résistance plastique au moment de la section si :

$$N_{Ed} \leq N_{pl,Rd} = A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad (6.14)$$

Et

$$N_{Ed} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{h_w t_w f_y}{\gamma_{M0}} \quad (6.15)$$

Dans le cas où l'effort normal peut être négligé, nous vérifions le critère suivant

$$\frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} \leq 1 \quad (6.16)$$

Avec $M_{y,Rd}$ qui est défini comme au paragraphe (équation (6.10)) où le paramètre ρ tient compte de l'influence de l'effort tranchant.

Dans le cas où l'effort normal ne peut être négligé, nous vérifions le critère suivant

$$\frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,Rd}} \leq 1 \quad (6.17)$$

Avec

$$M_{N,y,Rd} = M_{pl,y,Rd} \frac{(1-n)}{\left(1-\frac{a}{2}\right)} \quad (6.18)$$

Où $n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}}$ avec $N_{pl,Rd} = A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$

$$a = \frac{A-2bt_f}{A} \text{ mais } a \leq 0.5$$

$$M_{y,Rd} = M_{y,pl,Rd} = W_{pl,y} \cdot \frac{f_y(1-\rho)}{\gamma_{M0}} \text{ avec } \rho \text{ par les formules (équation (6.13))}$$

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons explicité au mieux chaque terme des formules de vérification de stabilité des barres et des sections aux extrémités afin de comprendre le sens physique de chaque d'entre eux (d'où ils provenaient et pourquoi ils étaient présents dans la formule).

Nous avons également essayé de cerner les facteurs qui prennent en compte les effets P- δ et les effets P- Δ . Nous nous sommes rendu compte qu'il était difficile de les distinguer.

La méthode au 1^{er} ordre vérifie les colonnes de manière isolée en utilisant les longueurs de flambement à nœuds mobiles. Cette méthode ne tient pas compte de l'effort de rappel (transfert de charge) et est donc trop sécuritaire lorsqu'il apparaît. Nous le verrons par la suite lors de l'application cette méthode sur des diverses configurations de portiques.

Chapitre 7 : Vérifications associées aux méthodes d'analyse approchée au second ordre

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons déterminer les vérifications associées aux méthodes d'analyse approchée au second ordre retenues au chapitre 4 soit, dans notre cas, la méthode Can sous trois déclinaisons et la méthode CAM. Nous réaliserons également un bref rappel des résultats fournis par l'analyse associée à chaque méthode. Pour finir, nous établirons un tableau récapitulatif avec le processus complet d'analyse-vérifications pour chaque méthode étudiée.

2 Vérifications associées à la méthode Can

Pour rappel, au niveau de l'analyse, nous déterminons les moments d'extrémités au second ordre global en définissant deux structures. Une structure à nœuds fixes pour déterminer les moments « non-sway » et une à nœuds mobiles pour déterminer les moments « sway ». Les moments d'extrémités « sway » et « non-sway » sont obtenus en réalisant une analyse élastique au premier ordre pour chaque structure.

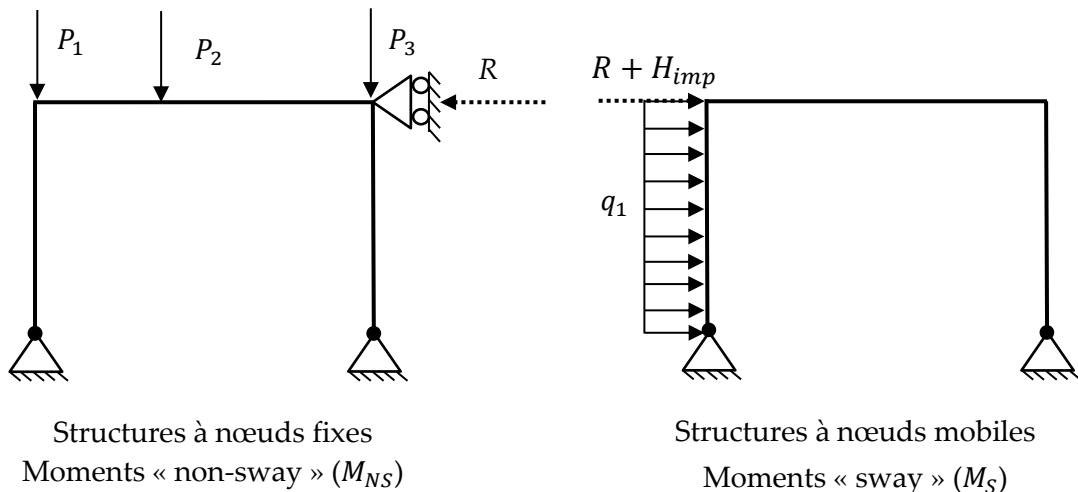


Figure 7.1 – Chargement des structures « sway » et « non-sway ».

Les moments dus au chargement de la structure au second ordre global (effet P- Δ) sont obtenus avec la formule suivante :

$$M^{II-\Delta} = M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (7.1)$$

A noter que l'imperfection globale est incluse dans l'analyse par la présence d'une force horizontale équivalent (H_{imp}) en tête de poteau qui est calculée via la section 2.1.1 du chapitre 1.

Les sections utilisées étant de classe 1 ou 2 en compression, nous pouvons réaliser des vérifications de stabilité et de section en utilisant un critère plastique.

2.1 Vérifications de stabilité de barres

L'ensemble des éléments sont donc comprimés et uniquement fléchis selon leur axe fort car nous travaillons dans le plan. Nous n'incluons donc pas le déversement (instabilité hors plan) et ne vérifions pas la stabilité selon l'axe faible (instabilité hors plan).

Nous utilisons donc les formules de vérifications de stabilité comprimée –fléchi selon l'axe fort ($N_{Ed} \neq 0, M_{y,Ed} \neq 0$ et $M_{z,Ed} = 0$). La formule utilisée est la formule de l'eurocode 3 méthode 1 pour les classes de section 1 et 2.

$$\text{Selon l'axe fort : } \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{pl,Rk}} + \mu_y \frac{M_{y,Ed,max}}{C_{yy} M_{pl,y,Rk}} \leq 1 \quad (7.2)$$

L'ensemble des paramètres ne sont pas à nouveau décrit car ils ont déjà été explicités dans le chapitre précédent (Chapitre 6). Nous ne reviendrons que sur les termes importants.

Où $M_{y,Ed,max} = M_{max,travée}^{II-\Delta-\delta}$ est le moment sollicitant maximum en travée tenant compte des effets du second ordre global et local

N_{Ed} est l'effort axial sollicitant l'élément obtenu par l'analyse élastique au 1^{er} ordre.

2.1.1 Élément bi-rotulé - $L_{fl} = L$ (alternative 1)

Pour ce type de méthode, la plupart des praticiens considèrent la barre comme étant sur deux appuis rotulés avec la longueur de flambement à nœuds fixe égale à la longueur d'épure. Cette approche est une approximation car nous ne tenons pas compte des jonctions de l'élément avec les autres éléments de la structure (restreintes).

Nous avons donc un élément bi-rotulé avec deux moments aux extrémités provenant de l'analyse approchée au second ordre et un chargement en travée quelconque (charge répartie, ponctuelle,...) (voir Figure 7.2)

En travée, nous obtenons le moment maximum en utilisant la formule :

$$M_{y,Ed,max} = M_{max,travée}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m,travée}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \cdot M_{max} \quad (7.3)$$

Avec $M_{max} = \max(|M_A^{II-\Delta}|; |M_B^{II-\Delta}|; |M_{max,travée}|)$.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \quad \text{avec } L_{fl} = L \text{ car les appuis sont rotulés}$$

$C_{m, travée}$ associé au diagramme de moment obtenu (Figure 2.10)

N_{Ed} = effort axial de compression de l'analyse élastique au 1^{er} ordre

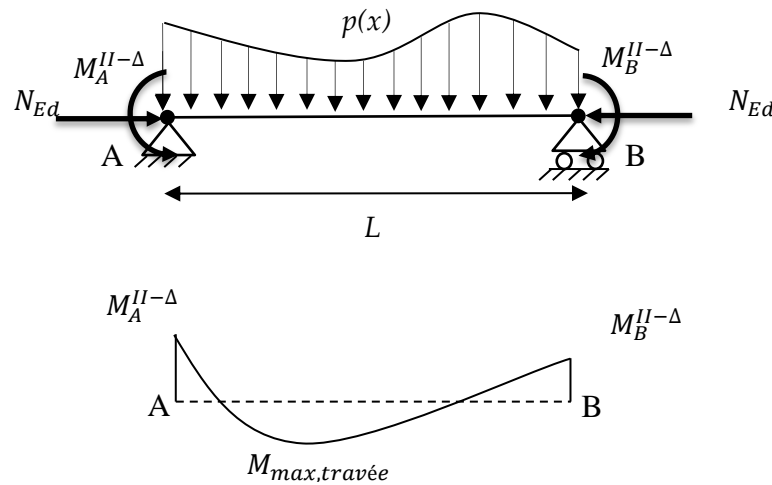


Figure 7.2 – Element bi-rotulé avec moments d'extrémités et chargement quelconque en travée

Le fait de prendre, comme longueur de flambement, une longueur égale la longueur d'épure influence la détermination des paramètres χ_y , μ_y et C_{yy} . Cette approche est sécuritaire. En effet, il est plus judicieux d'utiliser la longueur de flambement à nœuds fixes ($L/2 \leq L_{fl} \leq L$) afin d'obtenir des paramètres χ_y , μ_y et C_{yy} plus corrects et ainsi réaliser une vérification plus précise.

2.1.2 Élément bi-rotulé - L_{fl} à nœuds fixes (alternative 2)

Une autre alternative est de considérer la barre bi-appuyée et rotulée aux extrémités mais avec une longueur de flambement à nœuds fixes. La démarche est la même qu'au point précédent mais nous utilisons la longueur de flambement à nœuds fixes et non plus la longueur d'épure pour calculer les différents paramètres ($C_{m, travée}$, N_{cr} , χ_y , μ_y et C_{yy}).

2.1.3 Élément sur appuis réels (alternative 3)

Avec cette alternative 3, nous corrigeons les moments d'extrémités calculés au second ordre global (P- Δ) obtenus de la Can en utilisant un coefficient d'amplification à nœuds fixes (K_{extr}^*) afin de tenir compte du second ordre local (P- δ). Pour rappel, la formule analytique de ces coefficients d'amplification ($K_{extr}^* = \frac{C_{m, extr}}{1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}}}$) a été développée (voir chapitre 4, section 3.7) pour une poutre sur deux appuis avec une restriction à chaque extrémité, soumis à une charge répartie et des moments d'extrémités.

Les moments d'extrémités au second ordre complet sont donc obtenus avec la formule suivante :

$$M^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \left(M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \right) = K_{extr}^* \cdot M_{CAN}^{II-\Delta-\delta} \quad (7.4)$$

Ensuite, afin de déterminer le moment maximum en travée au second ordre complet, nous isolons l'élément de la structure en supposant la barre bi-articulée avec une longueur de flambement égale à la longueur d'épure. En effet, les moments aux extrémités sont définis au second ordre complet. Il n'y a donc plus aucune amplification à prendre aux niveaux des extrémités.

Nous avons donc un élément avec, aux extrémités, les moments au second ordre complet.

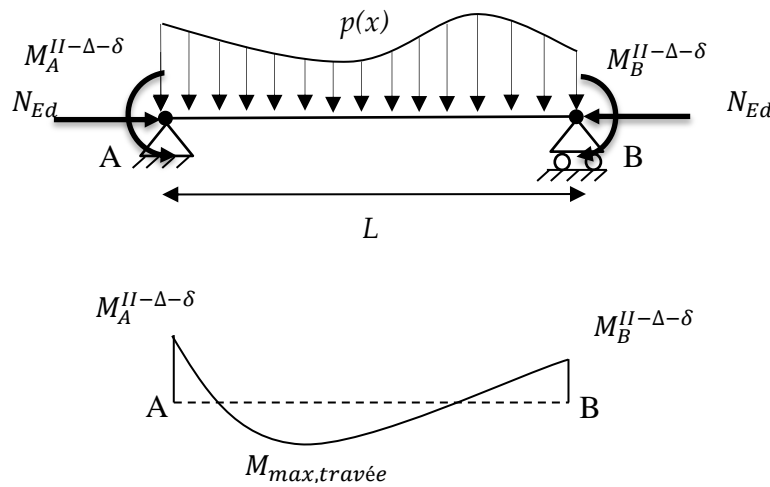


Figure 7.3 -Element bi-rotulé avec moments d'extrémités et chargement quelconque en travée

Nous obtenons le moment maximum en travée au second ordre complet :

$$M_{max,travée}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m,travée} \cdot M_{max}}{1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}}} \quad (7.5)$$

$$\text{Avec } M_{max} = \max(|M_A^{II-\Delta-\delta}|; |M_B^{II-\Delta-\delta}|; |M_{max,travée}|).$$

Le moment maximum en travée ($M_{max,travée}$) est simplement obtenu en calculant le diagramme des moments avec la charge répartie quelconque ($p(x)$) et les moments d'extrémités au second ordre complet ($M_A^{II-\Delta-\delta}$ et $M_B^{II-\Delta-\delta}$).

N_{Ed} = Effort axial de compression de l'analyse au second ordre global.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \text{ avec } L_{fl} = L$$

$C_{m,travée}$ associé au diagramme des moments obtenu (Figure 2.10)

Nous remarquons qu'avec cette méthode plus complexe, nous déterminons de manière plus précise les moments en travée et aux extrémités car tous les effets du second ordre sont bien inclus et nous tenons compte des liaisons de l'élément avec d'autres éléments tel qu'une poutre-colonnes en déterminant K_{extr}^* .

2.2 Vérifications de résistance des sections d'extrémités

En plus de la vérification de la stabilité de l'élément en travée, nous devons réaliser la vérification plastique des sections d'extrémités de l'élément. Dans cette section, nous rappelons brièvement les formules utilisées, celles-ci ayant été explicitées dans le chapitre 6 (section 3.2). Nous utiliserons la formulation incluant les différentes interactions (M-N, My-Mz). Les différentes formules qui suivent sont tirées de l'Eurocode3(référence[1]).

Etant donné que nous travaillons dans le plan, les sections sont comprimées ($N_{y,Ed} \neq 0$) et fléchies selon leur axe fort ($M_{y,Ed} \neq 0$ et $M_{z,Ed} = 0$). Les sections utilisées sont bi-symétriques en I (poutre) ou H(poteau) avec des profils laminés courants.

Dans le cas où l'effort normal est non négligeable, nous vérifions le critère suivant

$$\frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,Rd}} \leq 1 \quad (7.6)$$

Avec $M_{y,Ed} = M_{max,extr}$ qui est le moment maximum sur appuis tenant compte des effets du second ordre complet ou global en fonction des alternatives utilisées.

$$\text{Et } M_{N,y,Rd} = M_{pl,y,Rd} \frac{(1-n)}{(1-\frac{a}{2})}$$

$$\text{Où } n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} \text{ avec } N_{pl,Rd} = A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$a = \frac{A-2bt_f}{A} \text{ mais } a \leq 0.5$$

$$M_{y,Rd} = M_{y,pl,Rd} = W_{pl,y} \cdot \frac{f_y(1-\rho)}{\gamma_{M0}} \text{ avec } \rho \text{ qui tient compte de l'influence de } V_{Ed} \text{ (voir équation (6.13))}$$

Maintenant, nous allons déterminer les moments aux extrémités pour les différentes variantes de la méthode Can

2.2.1 Élément bi-rotulé $-L_{fl} = L$ (alternative 1)

Aux extrémités, nous avons donc

$$M_{max,extr}^{II-\Delta} = \max(|M_A^{II-\Delta}|; |M_B^{II-\Delta}|) \quad (7.7)$$

En effet, les appuis étant rotulés, il n'y aucune amplification sur appuis à cause de l'effet P- δ .

2.2.2 Élément bi-rotulé - L_{fl} à nœuds fixes (alternative 2)

Sur appuis, nous avons :

$$M_{max,appuis}^{II-\Delta} = \max(|M_A^{II-\Delta}|; |M_B^{II-\Delta}|) \quad (7.8)$$

En effet, les appuis étant rotulés, il n'y aucune amplification sur appuis à cause de l'effet P- δ . Les moments aux extrémités sont donc similaires à l'alternative 1.

2.2.3 Élément sur appuis réel - L_{fl} à nœuds fixes (alternative 3)

Sur appuis, nous avons le moment maximum au second ordre complet

$$M_{max,appuis}^{II-\Delta-\delta} = \max (K_{extr} \cdot |M_A^{II-\Delta}|; K_{extr} |M_B^{II-\Delta}|) \quad (7.9)$$

Avec cette méthode plus complexe, nous déterminons de manière plus précise les moments aux extrémités car nous incluons tous les effets du second ordre. .

3 Vérifications associées à la méthode CAM

Au niveau de l'analyse, nous déterminons les moments au second ordre complet (P- Δ et P- δ) en définissant deux structures. La définition des deux structures est similaire à la méthode Can (voir Figure 7.1)

Les moments d'extrémités au second ordre complet sont obtenus avec la formule suivante :

$$M^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{NS} + K_{extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (7.10)$$

Où les coefficients K_{extr}^* et K_{extr} sont les coefficients d'amplification à noeuds fixes et mobiles afin d'intégrer l'effet P- δ sur la détermination des moments d'extrémités.

A noter que l'imperfection globale est intégrée dans l'analyse par la présence d'une force horizontale équivalente (H_{imp}).

Les sections utilisées étant de classe 1 ou 2 en compression, nous pouvons réaliser des vérifications de stabilité et de section en utilisant un critère plastique.

3.1 Vérifications de stabilité de barre

Les formules de vérifications étant déjà suffisamment détaillées dans les parties précédentes, nous regardons seulement la détermination des efforts.

Comme pour la méthode Can alternative 3, lorsque nous isolons l'élément de la structure, nous supposons que les barres sont bi-articulées avec une longueur de flambement égale à la longueur d'épure. En effet, il n'y a plus aucune amplification à prendre en compte aux niveaux des extrémités car les moments aux extrémités sont calculés au second ordre local et global.

Nous avons un élément de type

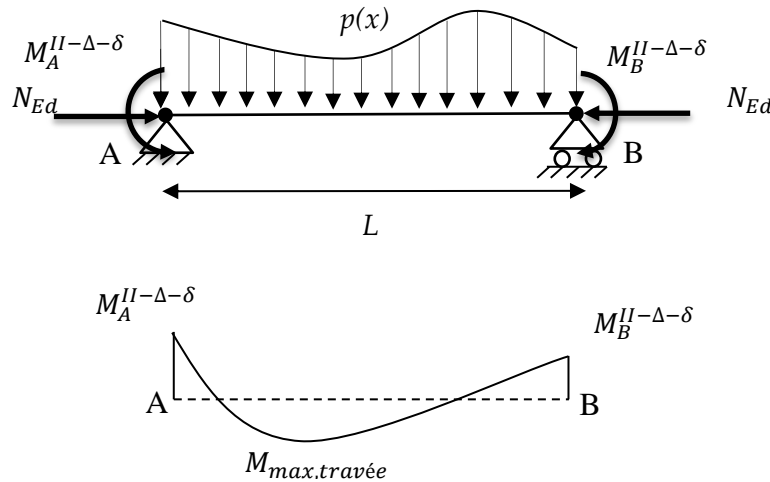


Figure 7.4 -Elément bi-rotulé avec moments d'extrémités et chargement quelconque en travée

En travée, nous obtenons le moment maximum en utilisant la même formule (7.5) que pour la méthode Can alternative 3.

Pour déterminer la valeurs des paramètres χ_y , μ_y et C_{yy} se trouvant dans la formule de vérification de stabilité (équation (7.2)), nous utilisons bien la longueur d'épure et pas la longueur de flambement à nœuds fixes.

3.2 Vérifications de résistances des sections d'extrémités

Nous utilisons les mêmes formules que dans la section 2.2 de ce chapitre

Aux extrémités de l'élément, nous avons le moment maximum qui est

$$M_{max,extr}^{II-\Delta-\delta} = \max(|M_A^{II-\Delta-\delta}|; |M_B^{II-\Delta-\delta}|) \quad (7.11)$$

Avec cette méthode CAM, nous déterminons les moments sur appui avec plus de précision car nous tenons compte de l'effet P- δ .

4 Conclusion-Tableau récapitulatif

Méthodes d'analyse élastique au second ordre -vérification plastique		Can			CAM	EC 1 ordre à nœuds mobiles
		1	2	3		
Analyse élastique		Second ordre $M_{extr}^{II-\Delta}$		Second ordre $M_{extr}^{II-\Delta-\delta}$	Premier ordre M^I	
Vérifications de stabilité de barres	<i>Paramètres</i> χ_y , μ_y , C_{yy} et N_{cr} avec L_{fl}	L	L_{fl} à nœuds fixes	L	L_{fl} à nœuds mobiles	
	Moments en travée maximum $(M_{y,ED})$ $M_{travée}^{II-\Delta-\delta} = \frac{C_{m,travée} \cdot M_{max}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}}$	$C_{m,travée}$	Élément isolé avec appuis Bi-rotulés			
	M_{max}	$\max(M_{extr}^{II-\Delta} ; M_{travée})$	$\max(M_{extr}^{II-\Delta-\delta} ; M_{travée})$	$\max(M_{extr}^I ; M_{travée}^I)$		
Vérifications de résistance des sections d'extrémités	Moments d'extrémités maximum $(M_{y,ED})$	$M_{extr}^{II-\Delta}$	$M_{extr}^{II-\Delta-\delta}$	$1.2 * M_{extr}^I$		
	Effort normal (N_{Ed})	N_{Ed}^I				

Chapitre 8 : Méthodes d'analyse-vérifications d'un portique simple sous charge horizontale ponctuelle

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons comparer les méthodes présentées au chapitre 6 et 7 au niveau du processus complet d'analyse et de vérification. Pour rappel, les différentes méthodes utilisées sont les méthodes Can (alternative 1,2 et 3), la méthode CAM et enfin, la méthode de l'Eurocode au premier ordre élastique à nœuds mobiles.

Nous allons nous baser sur le même type de portique que celui utilisé pour valider la méthode CAM au chapitre 5. En vue de comparer la précision des différentes méthodes, nous définissons un multiplicateur ultime ou de ruine (λ_u) avec le logiciel FINELG en réalisant une analyse élasto-plastique en incluant une déformée initiale.

2 Démarche réalisée

Nous nous basons donc sur un portique simple constitué d'une poutre IPE 400 et d'une colonne 1 (HEB 160). L'inertie de la colonne 2 varie de l'HEB160, HEB 240 à l'HEB 300. En effet, en faisant varier l'inertie des colonnes, nous modulons la raideur du ressort K et en utilisant une poutre avec une grande inertie, nous favorisons l'importance de l'effet P- δ sur les moments d'extrémités de la colonne 1.

Le portique défini est à nouveau rotulé en base avec une charge horizontale ponctuelle (Q), une charge verticale répartie (q_v) et une charge verticale (P) en tête de chaque colonne. Nous supposons les assemblages comme étant des encastremements parfaits.

Données :

- $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Mpa}$
- $f_y = 355 \text{ Mpa}$
- $q_v = 20 \text{ kN/m}$
- $I_{c1} = 0,00002492 \text{ m}^4 (\text{HEB } 160)$
- $I_{c2} = \text{HEB } 160, \text{HEB } 240, \text{HEB } 300$
- $I_p = 0,0002313 \text{ m}^4 (\text{IPE } 400)$
- $L = 4 \text{ m}$
- $H = 4 \text{ m}$

Nous jouerons sur les valeurs de la charge horizontale (Q) et verticale (P) afin de déterminer les multiplicateurs critique (λ_{cr}) et de ruine (λ_u) souhaités.

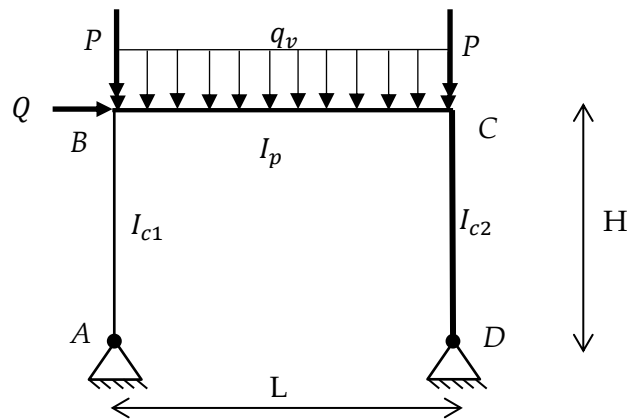


Figure 8.1-Portique simple non symétrique avec poutre flexible

2.1 Détermination du multiplicateur critique global (λ_{cr})

A nouveau, nous analysons chaque géométrie de portique pour un multiplicateur critique global de 3,5,7 et 10 afin de balayer la plage d'applicabilité des différentes méthodes. En effet, si le multiplicateur est supérieur à 10, nous ne sommes pas obligés de faire une analyse au second ordre global. S'il est inférieur à 3, les effets non linéaires deviennent trop importants et une analyse plus approfondie (via un logiciel numérique) est requise.

Pour déterminer ces différentes valeurs de λ_{cr} , nous jouons sur la valeur des charges verticales P afin d'obtenir le λ_{cr} voulu. Afin d'être sécuritaire, nous utiliserons toujours le λ_{cr} obtenu via FINELG qui est plus précis que celui acquis avec la formule simplifiée de l'Eurocode3. Pour rappel, le λ_{cr} de l'Eurocode est toujours inférieur à celui de Finelg et donc l'amplification au second ordre global $\left(\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}\right)$ est sous-évaluée (voir Chapitre 5).

2.2 Détermination du multiplicateur de ruine (λ_u)

Nous déterminons le multiplicateur de ruine de référence de la structure en utilisant le logiciel FINELG. Avec celui-ci, nous réalisons une analyse élasto-plastique au second ordre complet (P- Δ - δ) avec déformée initiale afin d'avoir le comportement réel de la structure.

Cette déformée initiale est en fait le premier mode d'instabilité global de la structure avec une amplitude calibrée afin d'avoir un déplacement ($\Delta_{imperfection}$) en tête de portique égal à l'imperfection globale ($\Delta_{imperfection} = \phi \cdot H$). Cette déformée nous permet de prendre en compte les imperfections locales de barre et globale dans l'analyse.

Lorsque nous déterminons le multiplicateur de ruine, nous devons faire attention à bien prendre le multiplicateur de charge associé à l'apparition de la première rotule plastique. En effet, les formules d'analyse et vérifications analysées jusqu'à présent ne

considèrent pas la redistribution plastique et déterminent donc l'apparition de la première rotule plastique (si classe de section 1 ou 2) (voir Figure 8.2, cercle en pointillée).

C'est ici que nous comprenons l'intérêt d'étudier un portique simple sur appuis rotulés. En effet, pour atteindre le mécanisme plastique, il faut que deux rotules apparaissent pour un portique simple rotulé en base tandis qu'il en faut quatre pour un portique simple encastré en base. Nous avons donc plus de chance que la ruine soit proche de l'apparition de la première rotule dans le cas d'un portique simple rotulé en base qu'avec un portique encastré.

Cependant, rien ne nous dit qu'après l'apparition de la première rotule, nous arriverons à atteindre la deuxième avant la ruine. En effet, si les effets géométriques non-linéaires sont importants, nous n'atteindrons pas cette deuxième rotule avant la charge de ruine. Les rotules plastiques peuvent apparaître dans la phase post ruine (lorsqu'on a dépassé le déplacement associé à λ_u).

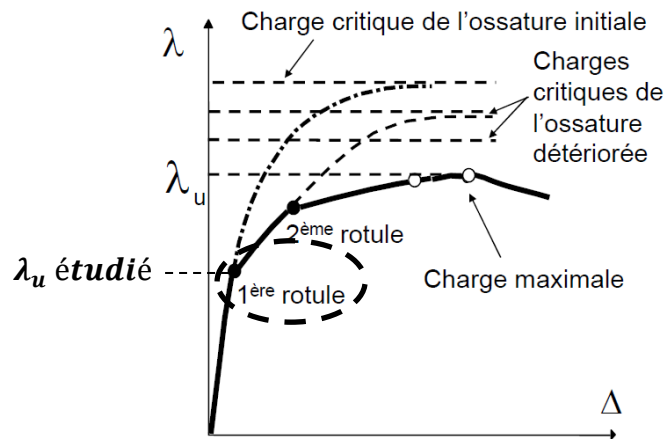


Figure 8.2 – Evolution du multiplicateur de charge (λ) en fonction du déplacement (Δ)(référence [3])

Pour chaque cas, nous vérifions donc que, lorsque la ruine de la structure se produit, la charge de ruine corresponde bien à l'apparition de la première rotule ou des rotules (2 dans notre cas) de manière quasi-simultanée. Si ce n'est pas le cas, nous déterminons le multiplicateur de ruine comme étant le multiplicateur de charge associé au développement de la première rotule. Dans l'ensemble des configurations étudiées, nous verrons que la ruine intervient peu après l'apparition de la première rotule et/ou que les autres rotules se développent pour un multiplicateur de charge quasi identique.

Pour finir, afin de comparer correctement le multiplicateur de ruine aux autres méthodes d'analyse-vérification, nous déterminons un multiplicateur de ruine le plus proche de 1. En effet, nous obtenons avec les différentes formules de vérification un taux d'utilisation (Γ) qui doit être inférieure à 1. Nous définissons le multiplicateur de ruine analytique associé à ces méthodes comme étant

$$\lambda_{u,ana} = \frac{1}{\Gamma} \quad (8.1)$$

Les différents multiplicateurs de ruine analytique $\lambda_{u,ana}$ seront comparés au multiplicateur numérique obtenu via FINELG ($\lambda_{u,num}$). De fait, si nous utilisons un $\lambda_{u,num}=3$, le taux d'utilisation Γ associé vaut 0.33 si $\lambda_{u,ana}=\lambda_{u,num}$. En réalisant cette démarche, nous linéarisons la réponse de la structure, comme si le taux d'utilisation de chaque élément évoluait de manière linéaire en fonction du multiplicateur de charge (λ). Hors dans notre cas, nous sommes en présence d'un problème non-linéaire car les efforts dans notre structure n'évoluent pas de manière linéaire avec le multiplicateur de charge (λ) à cause des effets du second ordre.

En déterminant un $\lambda_{u,num}$ proche de 1, nous avons $\lambda_{u,ana}$ que nous espérons proche de 1, si les méthodes sont précises. Le taux d'utilisation Γ associé est lui aussi proche de 1. Dans ce cas, nous linéarisons seulement la fin de la réponse de la structure, proche de la ruine, ce qui est donc acceptable.

De plus, comme le multiplicateur de charge, dans notre cas, amplifie l'ensemble des charges, il doit être très proche de 1 pour ne pas modifier le multiplicateur critique global de la structure. Afin d'obtenir ce $\lambda_{u,num}$ proche de 1, nous faisons varier l'effort horizontal(Q). Pour rappel, le multiplicateur critique global (λ_{cr}) est défini en déterminant la charge verticale (P) adéquate et ce dernier ne dépend pas des efforts horizontaux.

3 Analyse et vérifications

Dans cette section, nous abordons brièvement l'obtention des efforts liés aux différentes analyses. En effet, cette partie a déjà été explicitée dans un chapitre précédent par le biais d'un exemple, notamment pour la méthode CAM. L'analyse des autres méthodes est fort similaire et plus simple que celle à réaliser pour la méthode CAM. Nous décrivons avec plus de soins la partie vérification des différentes méthodes étudiées.

Pour chaque portique, nous calculons les taux d'utilisation de chaque colonne et prenons le plus élevé afin de déterminer le multiplicateur de ruine. Nous ne vérifions pas la poutre, celle-ci présentant peu d'intérêt car, étant peu comprimée, elle subit à peine l'effet du second ordre local. Néanmoins, nous vérifions tout de même si aucune plastification/rotule plastique n'apparaît dans la poutre avant la charge de ruine. En effet, si la ruine apparaît dans la poutre et non dans les colonnes, le multiplicateur de ruine calculé sur base de la ruine des colonnes est faux, ce dernier étant surévalué.

3.1 Rapport d'inertie 1 et poutre IPE 400

Les colonnes étant de propriétés géométriques identiques, nous ne vérifions que la colonne la plus sollicitée. Nous allons d'abord réaliser la démarche pour le portique avec un multiplicateur critique de 5. Ensuite, nous n'affichons que les multiplicateurs de ruine acquis avec les différentes méthodes pour les autres multiplicateurs critiques.

3.1.1 Application pour $\lambda_{cr} = 5$

3.1.1.1 Analyse

Grace à l'analyse, nous pouvons déterminer les moments d'extrémités au sommet de la colonne la plus sollicitée. En effet, les moments d'extrémités en pieds sont nuls car les colonnes sont rotulées en base. Nous obtenons pour les différentes méthodes, avec un multiplicateur critique global de 5 :

Méthode		Moment d'extrémité	M_{ana} (kN.m)	M_{num} (kN.m)	Erreur(%)
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		1 ordre	102,32	102,32	0,01%
Can	L (alternative 1)	2 ordre ($P - \Delta$)	126,94	125,62	1,05%
	L_{lf} (alternative 2)				
	K_{extr}^* (alterntive 3)	2 ordre ($P - \Delta - \delta$)	122,26	121,42	0,54 %
CAM		2 ordre ($P - \Delta - \delta$)	122,07	121,42	0,69 %

Tableau 8.1-Evaluation des moments d'extrémités pour les différentes méthodes

L'erreur est définie comme précédemment par la formule

$$Erreur\ relative = \frac{M_{analytique} - M_{numérique}}{M_{numérique}} \quad (8.2)$$

Les moments aux extrémités sont obtenus avec les formules suivantes :

$$M_{noeuds\ mobiles}^I = \text{moment d'extrémité calculé sur base d'une analyse élastique au premier ordre sous chargement complet} \quad (8.3)$$

$$M_{CAN,alt\ 1,2}^{II-\Delta} = M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (8.4)$$

$$M_{CAN,alternative\ 3}^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \left(M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \right) = K_{extr}^* \cdot M_{CAN,alternative\ 1,2}^{II-\Delta} \quad (8.5)$$

$$M_{CAM}^{II-\Delta-\delta} = M_{II}^{P-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{NS} + K_{extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (8.6)$$

Pour rappel, les K_{extr}^* et K_{extr} sont obtenus selon le chapitre 4 (section 3.5, 3.6 et 3.7) et les moments M_{NS} et M_S sont liés à l'analyse élastique au premier ordre des structures à nœuds fixes (« non-sway ») et à nœuds mobiles (« sway»). Notons également que les K_{extr}^* de la formule (8.5) et de la formule (8.6) sont différents car les charges, sollicitant la colonne, sont différentes pour le calcul du K_{extr}^* .

Dans l'ensemble, en regardant le Tableau 8.1, pour les différentes méthodes, nous voyons que la précision des moments d'extrémités calculés est assez bonne lorsque nous les comparons au moment d'extrémité incluant les mêmes effets. Nous observons également que l'effet P- δ n'est pas très important (diminution du moment d'environ 4 %). A noter que l'ensemble de ces moments a été déterminé en incluant l'imperfection globale.

3.1.1.2 Vérifications des sections d'extrémités

Pour les différentes méthodes, nous avons donc l'effort normal et tranchant qui provient de l'analyse au premier ordre élastique (somme des efforts des analyses « sway » et « non-sway ») et les moments d'extrémités obtenus de l'analyse (voir Tableau 8.1). Pour rappel, le moment d'extrémité de la méthode de l'Eurocode (1^{er} ordre élastique à nœuds mobiles) est amplifié par un facteur 1,2 afin de tenir compte d'une certaine amplification du moment d'extrémité au second ordre.

Méthode		Moment d'extrémité	M_{ED} (kN.m)	N_{ED}^I (kN)	V_{Ed}^I (kN)
Eurocode 1 ordre élastique à nœuds mobiles		1 ordre amplifié	1,2 . 102,32 = 122,78	-204,4	25,57
Can	L (alt1)	2 ordre (P - Δ)	126,94		
	L_{lf} (alt2)		122,26		
	K_{extr}^* (alt3)	2 ordre (P - Δ - δ)	122,07		
CAM		2 ordre (P - Δ - δ)	122,07		

Tableau 8.2- Efforts (M,N,V) dans la section d'extrémité la plus sollicitée

Nous utilisons la formule de vérification de section d'extrémités (équation (7.6)) en utilisant les résistances plastiques au moment ($M_{pl,Rd}$), à l'effort normal ($N_{pl,Rd}$) et à l'effort tranchant ($V_{pl,Rd}$) car les sections des colonnes sont de classe 1.

Nous obtenons les différents taux d'utilisation pour les différentes méthodes et pouvons déterminer le multiplicateur de ruine associé.

Méthode		Γ	$\lambda_{u,extrémité}$
Eurocode 1 ordre élastique à nœuds mobiles		0,977	1,0235
Can	L (alt1)	1,01	0,99
	L_{lf} (alt2)		
	K_{extr}^* (alt3)	0,9714	1,0295
CAM		0,9729	1,0279

Tableau 8.3 – Taux d'utilisation et multiplicateur de ruine de la section d'extrémité

3.1.1.3 Vérifications de la stabilité des barres

Sur base des moments d'extrémités, nous pouvons maintenant déterminer le moment maximum en travée en utilisant les coefficients d'amplification associés à l'effet P-δ. Pour rappel, la formule de vérification, dans le cas d'un élément comprimé et fléchi selon l'axe fort est la suivante :

$$\text{Selon l'axe fort : } \frac{N_{Ed}}{\frac{\chi_y N_{pl,Rk}}{\gamma_{M1}}} + \mu_y \frac{M_{y,Ed}}{C_{yy} M_{pl,y,Rk}} \leq 1 \quad (8.7)$$

Avec

- $M_{y,Ed}$ moment maximum en travée avec amplification liée à P-δ
- N_{Ed} effort normal sollicitant provenant d'une analyse élastique au premier ordre
- $M_{pl,Rk}$ et $N_{pl,Rk}$ les résistances plastiques au moment et à l'effort normal

- χ_y facteur de réduction du flambement, lié à la charge critique ($N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2}$)
- μ_y lié à la charge critique, à l'effort normal sollicitant et à χ_y
- C_{yy} facteur d'interaction plastique entre le moment et l'effort normal, lié aussi à la charge critique

Nous rappelons également que cette formule inclut l'imperfection initiale de barre (e_o, d) par le biais des facteurs χ_y et μ_y .

Le moment maximum en travée, afin de tenir compte du second ordre local, est obtenu en multipliant le moment maximum en travée par un coefficient d'amplification incluant l'effet P- δ .

$$M_{y,Ed} = M_{max,travée} = \frac{C_{my} \cdot M_{max}}{\left(1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}}\right)} \quad (8.8)$$

Le moment évolue de manière linéaire le long des colonnes car nous n'avons pas de charge en travée. Nous utilisons la formule de coefficient de moment équivalent (C_{my}) associé :

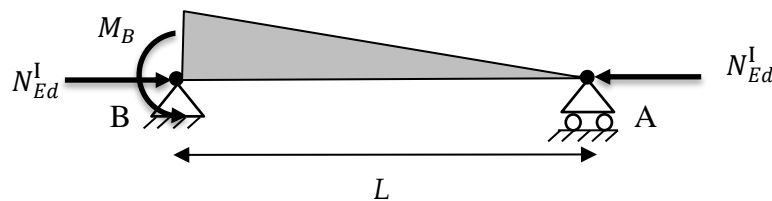


Figure 8.3 – Diagramme des moments le long de la colonne

$$C_{my} = 0,79 + 0,21\psi + 0,36(\psi - 0,33) \frac{N_{ED}}{N_{cr}} \text{ avec } \psi = \frac{M_{min}}{M_{max}} \quad (8.9)$$

Nous avons $\psi = \frac{M_{min}}{M_{max}} = 0$ car $M_{min} = 0$ et donc la formule se simplifie et devient :

$$C_{my} = 0,79 - 0,1188 \cdot \frac{N_{ED}}{N_{cr}} \text{ avec } N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} \quad (8.10)$$

Le moment maximum (M_{max}) est donc le moment d'extrémité calculé lors de l'analyse en utilisant les différentes méthodes (Tableau 8.4) qui prennent en compte les effets du second ordre global ou complet ou pas du tout pour la méthode à nœuds mobiles (analyse au premier ordre).

Nous avons donc pour les différentes méthodes

Méthode	L_{fl}	C_{my}	$\frac{1}{1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}}}$	M_{max}	$M_{y,Ed}$	
Eurocode 1 ^{er} ordre élastique à noeuds mobiles	$L_{fl, noeuds\ mobiles} = 2,04.L$	0,7587	1,359	102,32	105,48	
Can	$L (alt1)$	L	0,7825	1,068	126,94	106,04
	$L_{lf} (alt2)$	$L_{fl, noeuds\ fixes} = 0,71.L$	0,7863	1,033	126,94	103,11
	$K_{extr}^* (alt3)$	L	0,7825	1,068	122,26	101,98
CAM	L	0,7825	1,068	122,07	102,13	

Tableau 8.4- Moment maximum en travée ($M_{y,Ed}$) pour les différentes méthodes

Nous remarquons que le moment maximum en travée (à mi- travée) ($M_{y,Ed}$) est inférieur au moment d'extrémité (voir Tableau 8.1). Cependant, il faut encore tenir compte des paramètres χ_y, μ_y liés à l'imperfection initiale afin de voir si la section la plus sollicitée se trouve en travée ou à l'extrémité. La valeur des paramètres χ_y, μ_y est liée aux longueurs de flambement associées à chaque méthode. Il est donc toujours possible d'avoir une ruine en travée même si le moment en travée calculé selon la formule (8.8) (qui n'inclut pas le moment supplémentaire lié à l'excentricité) est inférieur au moment d'extrémité.

En calculant les résistances plastiques au moment et à l'effort normal ($M_{pl,Rk}$ et $N_{pl,Rk}$) et C_{yy} , nous obtenons le taux d'utilisation de l'élément en travée pour les différentes méthodes.

Méthode	Γ	$\lambda_{u, travée}$
Eurocode 1 ^{er} ordre élastique à noeuds mobiles	1,023	0,977
Can	$L (alt1)$	0,963
	$L_{lf} (alt2)$	0,925
	$K_{extr}^* (alt3)$	0,931
CAM	0,932	1,072

Tableau 8.5- Taux d'utilisation et multiplicateur de ruine en travée

3.1.2 Détermination du multiplicateur de ruine

Pour finir, ayant défini les multiplicateurs de ruine en travée et aux extrémités, nous pouvons obtenir le multiplicateur de ruine de la colonne en prenant le minimum des deux :

$$\lambda_{u, analytique} = \min(\lambda_{u, extrémité}; \lambda_{u, travée}) \quad (8.11)$$

Nous pouvons maintenant comparer le multiplicateur de ruine analytique des différentes méthodes au multiplicateur de ruine numérique obtenu avec FINELG afin de déterminer la précision de ces méthodes. L'erreur relative est définie avec la même convention qu'utilisée précédemment. Lorsque l'erreur est positive, nous sommes du côté de la sécurité.

$$\text{Erreur relative (\%)} = \frac{\lambda_{u,numérique} - \lambda_{u,analytique}}{\lambda_{u,numérique}} \quad (8.12)$$

Méthode	Ruine	λ_u	Erreur (%)	
Analyse élasto – plastique avec imperfections (Finleg)	–	1.0036	–	
Eurocode 1 ^{er} ordre élastique à noeuds mobiles	Stabilité, en travée	0.9773	2.62	
Can	L (alt1)	Section d'extrémité	0.9900	1.35
	L_{lf} (alt2)	Section d'extrémité	0.9900	1.35
	K_{extr}^* (alt3)	Section d'extrémité	1.0295	-2.58
CAM	Section d'extrémité	1.0279	-2.42	

Tableau 8.6- Comparaison des multiplicateurs de ruine analytiques et numérique de la colonne 1

En analysant les résultats obtenus sur le Tableau 8.6, nous remarquons que la précision des différentes méthodes est assez bonne pour un portique qui possède des colonnes de même inertie. L'erreur relative varie entre +2.5% et -2.5 %. La ruine se produit en section d'extrémité pour toutes les méthodes sauf pour la méthode Eurocode 1^{er} ordre à noeuds mobiles.

Pour la méthode Can L (alt1) et Can L_{fl} (alt 2) , les moments d'extrémités étant similaires (calculés tous les deux au second ordre global), nous avons donc la même erreur relative.

Les méthodes Can K_{extr}^* (alt3) et CAM, les deux seules qui définissent le moment au second ordre complet, ont une précision assez proche. Elles sont cependant légèrement insécuritaires (environ- 2.5 %) au contraire des autres méthodes qui sont toutes sécuritaires.

Pour finir, nous notons que la méthode Eurocode basée sur une analyse au premier ordre, utilisant les longueurs de flambement à noeuds mobiles, est la plus sécuritaire. Nous verrons par la suite que cette méthode peut s'avérer beaucoup trop sécuritaire dans le cas de structures avec des colonnes d'inerties différentes.

Pour rappel, l'ensemble des imperfections globale et locale sont bien incluses dans le processus d'analyse et de vérifications pour toutes les méthodes.

Au niveau de la rupture, nous observons via FINELG une rupture dans la section d'extrémité de la colonne. En annexe E, sur la figure E.1, nous pouvons voir la plastification au niveau des extrémités des colonnes et sur la figure E.2, nous avons l'évolution du multiplicateur de charge en fonction du déplacement en tête de colonne. Il n'y a pas de cassure nette de pente avant la ruine. Les rotules apparaissent en tête de colonnes et de manière simultanée.

3.1.3 Résultats complets

Dans cette section, nous présenterons la précision des différentes méthodes en fonction du multiplicateur critique et nous regarderons également si la ruine se produit en travée ou en section d'extrémité. Pour chaque cas, nous avons vérifié que la ruine du portique est liée à la ruine des colonnes et non à celle de la poutre.

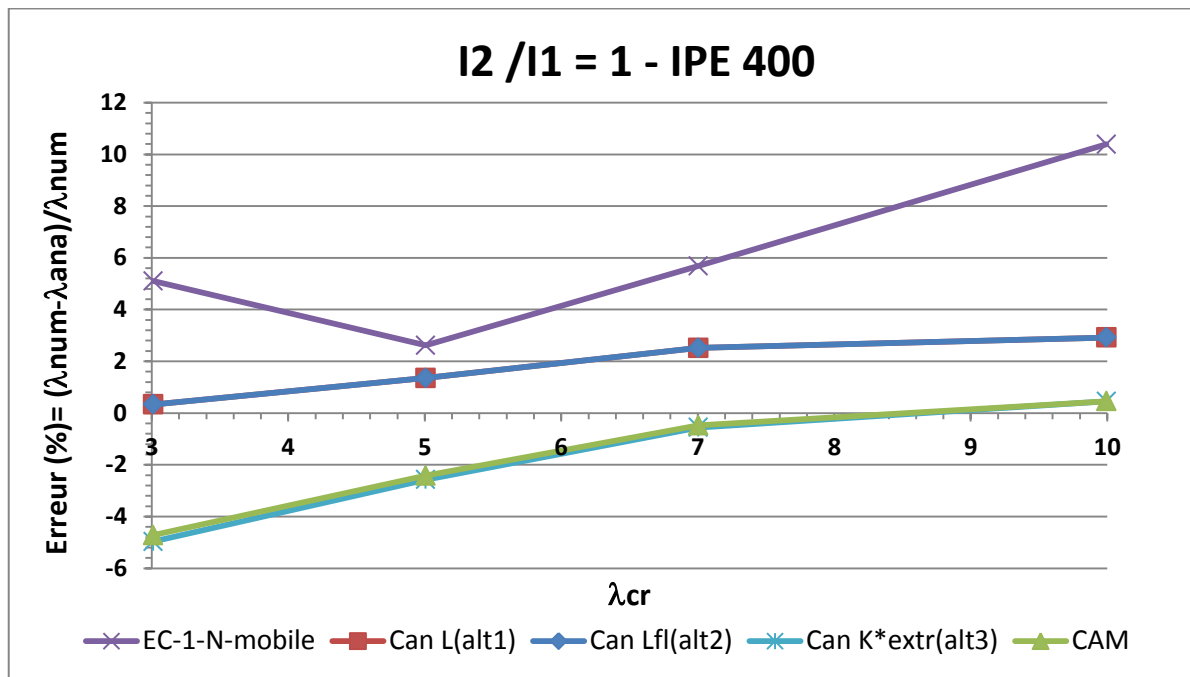


Figure 8.4- Erreur sur la détermination du multiplicateur ruine analytique (λ_u) en fonction du multiplicateur critique (λ_{cr})

Sur la Figure 8.4, nous remarquons que la précision des différentes méthodes est relativement bonne car l'erreur varie entre -5% et 10%.

Méthodes		Mode de ruine			
		$\lambda_{cr} = 3$	$\lambda_{cr} = 5$	$\lambda_{cr} = 7$	$\lambda_{cr} = 10$
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		Stabilité, travée		Section d'extrémité	
Can	L (alt1)	Section d'extrémité			
	L_{lf} (alt2)	Section d'extrémité			
	K_{extr}^* (alt3)	Stabilité, travée	Section d'extrémité		
CAM		Stabilité, travée	Section d'extrémité		

Tableau 8.7- Position de la ruine pour les différentes méthodes et multiplicateur critique global

La précision est très bonne pour les méthodes Can L (alt1) et Can L_{lf} (alt2) (0 à 3 %). Celles-ci évaluent de la même manière le moment d'extrémités au second ordre global. La rupture pour ces deux méthodes se produit aux extrémités, les courbes d'erreurs se chevauchent donc bien. De plus, les erreurs sont sécuritaires et les deux méthodes facilement applicables.

Les courbes d'erreurs des méthodes CAM et Can K_{extr}^* (alt3), qui sont les deux seules méthodes qui évaluent les moments au second ordre complet, ont une allure similaire

car si les moments d'extrémités sont évalués de manière différente, les résultats sont cependant très proches. Nous voyons que pour un multiplicateur critique faible ($\lambda_{cr} = 3$), i.e . structure fort sensible aux effets du second ordre, nous avons une rupture en travée. Par contre, dès que le multiplicateur critique augmente, nous retombons sur une rupture en section d'extrémité. Ces deux méthodes fournissent des résultats légèrement insécuritaires (de -5 % à 0.5%). Cependant, ce sont les deux seules méthodes qui ont une précision qui augmente avec le multiplicateur critique. Cette observation prouve bien que ces méthodes de calcul essaient de déterminer le multiplicateur de ruine au plus juste.

Pour finir, les résultats de la méthode 1^{er} ordre à nœuds mobiles sont assez surprenants. En effet, nous avons une inversion du sens de la pente dans la courbe d'erreur au contraire des autres méthodes. Pour les multiplicateurs critiques 3 et 5, nous avons une rupture en travée avec une erreur qui diminue en fonction de l'augmentation du multiplicateur critique. Ensuite, pour les λ_{cr} 7 et 10, nous avons une rupture en section avec une erreur qui augmente. Cette erreur est due au facteur multiplicatif forfaitaire (1,2) du moment d'extrémité pour inclure le second ordre global. En effet, ce facteur est une approximation assez grossière du facteur $\left(\frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}\right)$ qui multiplie le moment sway. Pour les λ_{cr} de 7 et 10, le facteur amplificateur vaut respectivement 1,166 et 1,11. Nous observons donc qu'ils sont plus faibles que le facteur forfaitaire de 1,2. Ce facteur est trop sécuritaire pour des λ_{cr} élevés. Cette observation explique l'inversion du sens de la pente la courbe.

3.2 Rapport d'inertie 5 et poutre IPE 400

Nous réalisons la même démarche qu'à la section précédente mais pour un portique avec un rapport d'inertie de 5 entre les deux colonnes. Nous n'affichons que les résultats des erreurs relatives en fonction du multiplicateur critique. Nous analyserons également quelle colonne périt et le mode de ruine associé. En effet, les colonnes n'étant plus semblables, nous réalisons le processus d'analyse et vérification pour les deux colonnes et définissons le multiplicateur de ruine comme étant le plus faible des deux colonnes.

$$\begin{aligned}\lambda_{u,c1} &= \min(\lambda_{u,travée,c1}; \lambda_{u,extrémité,c1}) \\ \lambda_{u,c2} &= \min(\lambda_{u,travée,c1}; \lambda_{u,extrémité,c1}) \\ \lambda_{u,portique} &= \min(\lambda_{u,c2}; \lambda_{u,c1})\end{aligned}\tag{8.13}$$

Nous vérifions également qu'il n'y a aucune plastification/apparition de rotule dans la poutre auquel cas le calcul du multiplicateur de ruine est faux. Comme énoncé précédemment, les effets P- δ sont faibles dans la poutre car l'effort normal n'est pas très important (dû à la charge horizontale). La vérification et la ruine de celle-ci nous intéresse moins.

En analysant la Figure 8.5, nous remarquons à nouveau le changement de sens de pente de la courbe d'erreur lié à la méthode de l'Eurocode à nœuds mobiles pour la même raison que pour le portique analysé précédemment. De plus, nous observons que la précision

de cette méthode est beaucoup trop sécuritaire, avec des erreurs allant jusqu'à 25% pour le multiplicateur critique le plus élevé.

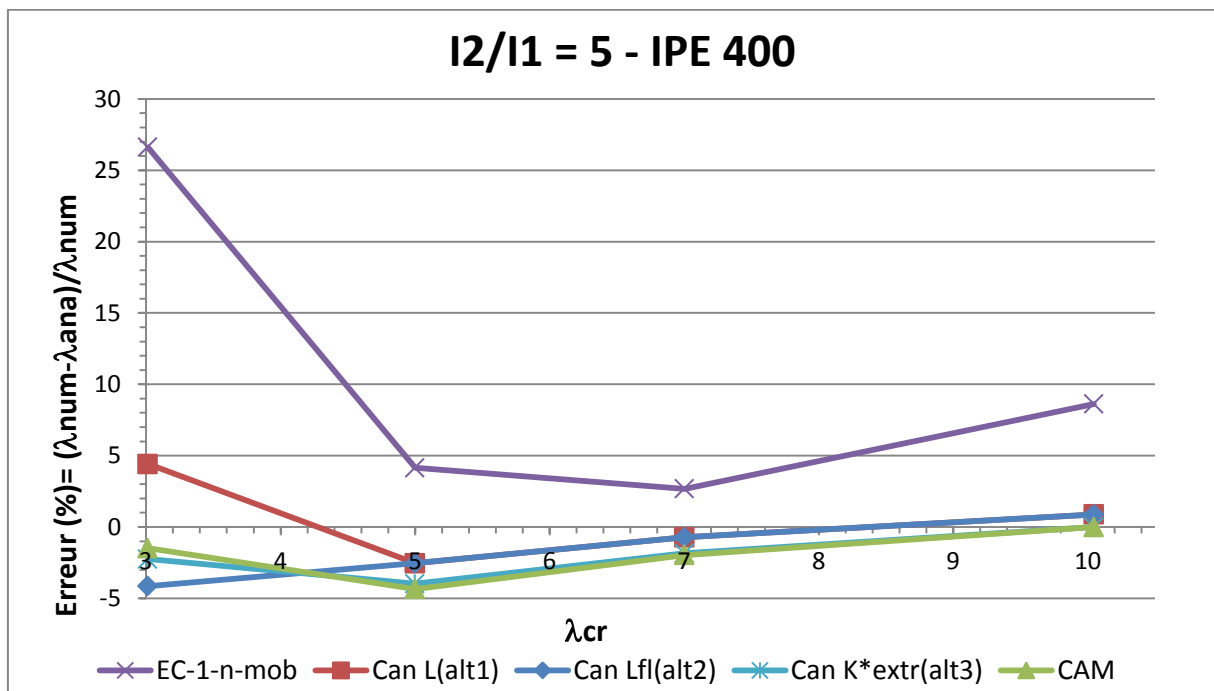


Figure 8.5 - Erreur sur la détermination du multiplicateur ruine analytique (λ_u) en fonction du multiplicateur critique (λ_{cr})

Pour les méthodes Can L, Can K_{extr}^* et CAM, nous observons aussi un changement du signe de la pente. Cette observation s'explique si nous regardons le mode de ruine (Tableaux 8.8 et 8.9). En effet, pour ces méthodes, nous passons d'une ruine en travée dans la colonne 1 à une ruine de section d'extrémité dans la colonne 2 d'où le changement de pente. En effet, pour la méthode Can Lfl, il n'y a pas de changement de pente car la ruine se produit toujours en section d'extrémité (sur la colonne 1 et puis sur la colonne 2).

Pour le multiplicateur critique 3, nous observons que la précision des différentes méthodes est assez variable entre 5 et -5% (sans compter la méthode 1^{er} ordre à nœuds mobiles). Pour ces méthodes, la ruine se produit en travée et donc elles se distinguent plus les unes des autres par leur prise en compte ou non des différents effets du second ordre et selon les longueurs de flambement utilisées.

Pour les multiplicateurs 5, 7 et 10, nous remarquons que les méthodes (en excluant à nouveau la méthode à nœuds mobiles) sont assez proches l'une de l'autre, notamment parce que la ruine se produit en section d'extrémité et sur la colonne 2 (grande inertie). L'effet P- δ sur cette colonne est moins marqué car les raideurs du ressort et de la restrainte (liées à la raideur de la poutre et de la colonne 1 de faible inertie) sont faibles. Les moments d'extrémités des méthodes sont plus proches, voir similaires (pour les méthodes Can L et Can Lfl). De plus, la rupture étant en section d'extrémité, la différence de précision entre les méthodes est moins nette.

Nous remarquons que les méthodes Can K_{extr}^* et CAM sont très proches l'une de l'autre car elles tiennent compte toutes les deux du second ordre complet. Elles ont une bonne précision car leur erreur varie entre 0 et -5%. Cette erreur tend vers 0 lorsque le multiplicateur critique augmente et elles possèdent la meilleure précision pour un multiplicateur élevé (+- 2%). Cependant, elles sont insécuritaires de quelques pourcents.

Les méthodes Can L(alt1) et Can L_{fl} (alt2) ont aussi une bonne précision. Leurs courbes d'erreur sont similaires lorsque la ruine se produit en section d'extrémité (moment au second ordre global). Lorsqu'elle se produit en travée ($\lambda_{cr} = 3$), elles se distinguent l'une de l'autre. De fait, si la méthode Can L(alt1) est sécuritaire (5%) en considérant la longueur d'épuration comme longueur de flambement, la méthode Can L_{fl} (alt2), par contre, est insécuritaire (-4,5%) car elle considère la longueur de flambement à nœuds fixes.

Pour l'ensemble des méthodes sauf celle à nœuds mobiles, nous remarquons que leur précision converge plus le multiplicateur critique augmente, les effets du second ordre étant de moins en moins importants.

Méthodes		Colonne qui péricite			
		$\lambda_{cr} = 3$	$\lambda_{cr} = 5$	$\lambda_{cr} = 7$	$\lambda_{cr} = 10$
<i>Eurocode 1 ordre élastique à nœuds mobiles</i>		C1		C2	
<i>Can</i>	<i>L (alt1)</i>	C1	C2		
	<i>L_{fl} (alt2)</i>	C1	C2		
	<i>K_{extr}[*] (alt3)</i>	C1	C2		
<i>CAM</i>		C1	C2		

Tableau 8.8- Colonne où se produit la rupture en fonction du multiplicateur critique

Méthodes		Mode de ruine			
		$\lambda_{cr} = 3$	$\lambda_{cr} = 5$	$\lambda_{cr} = 7$	$\lambda_{cr} = 10$
<i>Eurocode 1^{er} ordre élastique à nœuds mobiles</i>		Stabilité, travée		Section d'extrémité	
<i>Can</i>	<i>L (alt1)</i>	Stabilité, travée	Section d'extrémité		
	<i>L_{fl} (alt2)</i>	Section d'extrémité			
	<i>K_{extr}[*] (alt3)</i>	Stabilité, travée	Section d'extrémité		
<i>CAM</i>		Stabilité, travée	Section d'extrémité		

Tableau 8.9- Position de la ruine sur la colonne en fonction du multiplicateur critique

Au niveau de la ruine pour un $\lambda_{cr} = 5$, nous observons via FINELG une rupture dans la section d'extrémité de la colonne 2 ce qui correspond bien aux résultats obtenus pour l'ensemble des méthodes sauf la méthode Eurocode analyse 1^{er} ordre (Tableaux 8.8 et 8.9). En annexe E, sur la figure E.3, nous observons bien de la plastification au niveau de l'extrémité supérieure de la colonne 2 et sur la figure E.4, nous avons l'évolution du multiplicateur de charge en fonction du déplacement en tête de colonne. Dès l'apparition de la rotule, la ruine est presque immédiate.

3.3 Rapport d'inertie 10 et poutre IPE 400

Pour un portique avec un rapport d'inertie entre les colonnes de 10, nous présentons seulement les erreurs relatives entre les multiplicateurs de ruine des différentes méthodes et le multiplicateur de ruine obtenu avec un programme aux éléments finis (FINELG).

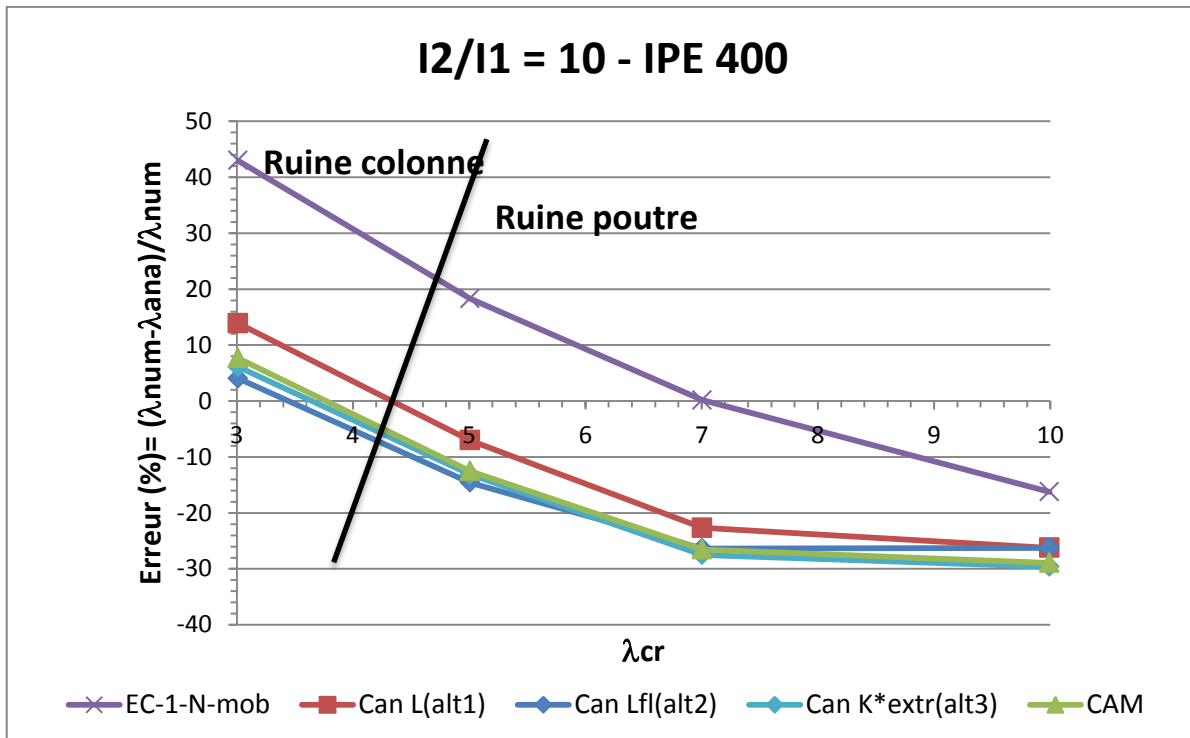


Figure 8.6- Erreur sur la détermination du multiplicateur ruine analytique (λ_u) en fonction du multiplicateur critique (λ_{cr})

Malheureusement, avec ce type de portique, nous obtenons une ruine dans la poutre pour les multiplicateurs critiques globaux de 5,7 et 10 (voir Figure 8.6 et Tableau 8.10). Une solution est d'augmenter l'inertie de la poutre. L'inertie de la poutre étant déjà importante (IPE 400) comparé à la colonne 1, nous avons décidé de ne pas l'augmenter afin de ne pas obtenir un portique peu réaliste. En effet, la colonne de grande inertie permet de modéliser la raideur d'un portique multi-travées qui augmente avec le nombre de colonnes (si la raideur des poutres n'est pas trop faible). Par contre, avoir une poutre de très grande raideur flexionnelle n'a pas beaucoup de sens car sur un portique multi-travées, la raideur flexionnelle de la poutre d'un portique n'augmente pas de manière significative avec le nombre de travées.

Néanmoins, nous pouvons quand même analyser les résultats pour le multiplicateur critique de 3. De plus, la rupture du portique pour ce multiplicateur est intéressante pour deux raisons. La première raison concernant la ruine qui se produit en travée, les méthodes se distinguent donc plus les unes des autres. La seconde est liée aux effets P- δ qui sont importants car les raideurs du ressort et de la restrainte du modèle sont élevées.

Méthodes		Colonne qui péric			
		$\lambda_{cr} = 3$	$\lambda_{cr} = 5$	$\lambda_{cr} = 7$	$\lambda_{cr} = 10$
<i>Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles</i>		<i>Stabilité, travée colonne 1</i>	<i>Ruine du portique lié à la ruine de la poutre</i>		
<i>Can</i>	<i>L (alt1)</i>	<i>Stabilité, travée colonne 1</i>			
	<i>L_{lf} (alt2)</i>	<i>Section d'extrémité colonne 1</i>			
	<i>K[*]_{extr} (alt3)</i>	<i>Stabilité, travée colonne 1</i>			
<i>CAM</i>		<i>Stabilité, travée colonne 1</i>			

Tableau 8.10-Position de la ruine et élément qui péric en fonction du multiplicateur critique

A nouveau, nous remarquons que la méthode à noeuds mobiles est beaucoup trop sécuritaire. Pour le reste, les méthodes sont relativement précises et toutes sécuritaires. Avec une erreur positive de 14 %, la méthode Can (alt1), à longueur de flambement égale à la longueur d'épure, est trop sécuritaire. En effet, nous pouvons logiquement utiliser la longueur de flambement à noeuds fixes ce que fait la méthode Can L_{lf} (alt2) et de fait, la précision de cette méthode est meilleure : 4 %. Pour les méthodes tenant compte des effets du second ordre complet (Can K_{extr}^* (alt3) et CAM), leur précision est similaire avec une erreur d'environ 6%.

La provenance de ces erreurs accrues provient principalement de la détermination des moments d'extrémités. En effet, dans le chapitre 5, lorsque les raideurs du ressort et du modèle sont importantes, les erreurs sur la valeur de ces moments d'extrémités augmentent en corrélation avec les effets du second ordre i.e plus le multiplicateur critique est faible.

Via FINELG, en regardant la ruine pour un $\lambda_{cr} = 5$, nous observons l'apparition de plastification au niveau de la poutre (voir annexe E, figure E.5) lors de la ruine du portique.

4 Conclusion

La précision des différentes méthodes est relativement bonne sauf pour la méthode à nœuds mobiles qui est trop sécuritaire, surtout lorsque la géométrie du portique est non symétrique et que le multiplicateur critique global est faible.

Dans les méthodes incluant uniquement l'effet P- Δ sur les moments d'extrémités, nous avons la méthode Can L (*alt1*) ($L_{fl} = L$) qui a tendance à être un peu trop sécuritaire car elle surévalue les effets P- δ en utilisant une longueur de flambement égale à la longueur d'épure. Nous avons aussi la méthode Can L_{lf} (*alt2*) (L_{fl} à nœuds fixes) qui est plus précise mais parfois insécuritaire car elle sous-évalue les effets P- δ . Lorsque la ruine se produit en section d'extrémité, ces deux méthodes sont équivalentes.

Dans les méthodes incluant uniquement l'effet P- Δ et P- δ sur les moments d'extrémités, nous avons la méthode Can K_{extr}^* (*alt3*) et CAM qui sont précises (entre +/- 5 %) mais légèrement insécuritaires dans certains cas. Ces méthodes ont une précision qui converge bien vers une erreur quasiment nulle lorsque le multiplicateur augmente.

Nous avons également remarqué que lorsque la ruine se produit dans la colonne 2 où les effets du second ordre local sont moins importants, il est plus difficile de distinguer les méthodes les unes des autres. A contrario, lorsque la ruine se produit dans la colonne 1 en travée et que les effets P- δ sont importants nous distinguons mieux les différentes méthodes. Ce type de ruine est notamment étudié plus en profondeur dans le chapitre suivant.

Chapitre 9 : Méthode d'analyse-vérifications d'un portique simple sous charge horizontale répartie et ponctuelle

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous comparons à nouveau les méthodes présentées au chapitre 6 et 7 au niveau du processus complet d'analyse et vérifications mais pour un portique avec des charges horizontales ponctuelle et répartie.

Nous analysons plus en détails les coefficients d'amplification des moments liés à l'effet P- δ en travée et aux extrémités. En effet, à cause de la charge répartie, le calcul est plus complexe.

2 Géométrie et chargement du portique

Nous nous basons donc sur un portique simple constitué d'une poutre IPE 400, d'une colonne 1 (HEB 160) et d'une colonne HEB 240. Contrairement au cas précédent, nous n'analysons qu'un portique et non plusieurs (ce qui permet de faire varier la raideur du ressort en jouant sur l'inertie de la colonne²). Nous allons justifier ce choix.

Nous avons opté pour un portique avec un rapport d'inertie de 5 car ce dernier permet de mettre en évidence les effets P- δ sur la détermination des moments de la colonne 1 et nous évitons également une ruine du portique due à la rupture de la poutre. De fait, avec un rapport d'inertie de 1, les effets du second ordre local sont moins importants sur la détermination des moments et avec un rapport d'inertie de 10, nous avons un risque d'avoir une rupture du portique par ruine de la poutre. Nous étudions le portique avec un multiplicateur de 3,5 et 7 afin, à nouveau, de mettre en valeur l'effet P- δ . De plus, la précision des différentes méthodes devient fort similaire lorsque le multiplicateur critique devient grand, raison pour laquelle nous n'avons pas fait la démarche pour un multiplicateur global de 10.

Le portique défini est rotulé en base avec une charge horizontale ponctuelle (Q), une charge horizontale répartie (q_h), une charge verticale répartie (q_v) et deux charges verticales (P_1 et P_2) en tête de la colonne 1 et 2 (voir Figure 9.1). Nous supposons les assemblages comme des encastres parfaits.

Notons que le fait d'utiliser un portique non-symétrique avec une colonne de faible inertie et une de plus grande inertie, nous permet de « simuler » l'étude d'un portique multi-travées. En effet, la colonne de plus grande inertie modélise la raideur équivalente

transversale des autres colonnes du portique à travées multiples. Le fait de conserver une charge horizontale nous permet de tenir compte d'une charge horizontale provenant d'un portique multi-étage. Il en est de même pour les charges verticales qui ne sont plus similaires car en réalité, si la colonne 2 étant de plus grande inertie modélise le portique à travées multiples, elle reprend une charge normale plus importante. Le rapport entre les charges P_2 et P_1 est d'environ 2. Pour finir, nous appliquons la charge horizontale sur la colonne la plus faible afin de favoriser une ruine en travée par instabilité.

En résumé, nous avons essayé de déterminer une structure formée d'un simple portique qui pourrait se rapprocher d'un portique à travée et étage multiple en jouant notamment sur les géométries et le chargement. Pour finir, nous essayons de favoriser la rupture du portique par ruine de la colonne la plus faible en travée. Cette ruine nous permet de comparer au mieux l'ensemble des méthodes étudiées avec l'influence importante de l'effet P- δ sur les moments d'extrémités et en travée.

Nous ajustons à nouveau la valeur des charges verticales ponctuelles (P_1 et P_2) pour déterminer le multiplicateur critique global (λ_{cr}) souhaité. Nous faisons également varier la charge ponctuelle Q afin de déterminer le multiplicateur de ruine (λ_u) le plus proche de 1.

Données :

- $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Mpa}$
- $f_y = 355 \text{ Mpa}$
- $q_v = 20 \text{ kN/m}$
- $q_h = 15 \text{ kN/m}$
- $I_{c1} = 0,00002492 \text{ m}^4 (\text{HEB } 160)$
- $I_{c2} = 0,0001126 \text{ m}^4 (\text{HEB } 240)$
- $I_p = 0,0002313 \text{ m}^4 (\text{IPE } 400)$
- $L = 4 \text{ m}$
- $H = 4 \text{ m}$

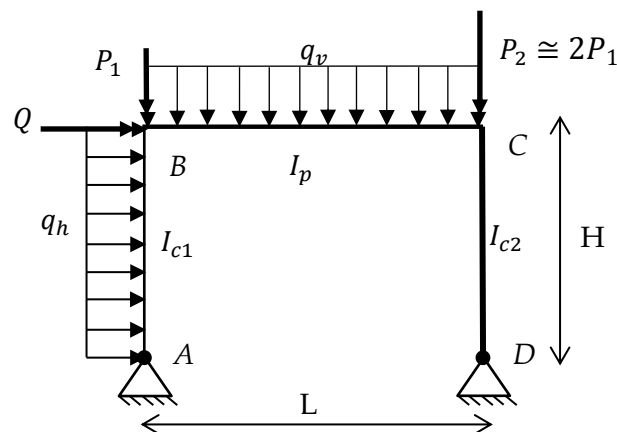


Figure 9.1-Portique simple non symétrique avec poutre flexible

3 Analyse et vérifications

Dans cette section, nous détaillerons brièvement l'obtention des moments d'extrémités liés aux différentes analyses. Nous décrirons plus précisément la partie vérification avec notamment l'utilisation des coefficients d'amplification en travée.

Pour le portique défini, nous calculons les taux d'utilisation de chaque colonne et prendrons le plus faible afin de déterminer le multiplicateur de ruine. A nouveau, nous ne déterminons pas le taux d'utilisation de la poutre pour les mêmes raisons qu'explicitées précédemment. Cependant, nous prenons soin de vérifier qu'aucune plastification/rotule plastique n'apparait dans la poutre avant la charge de ruine.

3.1 Application pour $\lambda_{cr} = 5$

Tout d'abord, la démarche est réalisée pour le portique avec un multiplicateur critique de 5. Nous analysons avec plus de détails la colonne 1 à cause de la présence de la charge répartie. Par contre, pour la colonne 2, seuls les résultats principaux sont affichés car la démarche est similaire au chapitre précédent, celle-ci n'étant pas soumise à une charge répartie.

3.1.1 Analyse

Grace à l'analyse, nous pouvons déterminer les moments d'extrémités au sommet des colonnes 1 et 2 (les moments en pied des colonnes étant nuls car appui simple rotulé).

Pour la colonne 1, nous obtenons

Méthode		Moment d'extrémité	M_{ana} (kN.m)	M_{num} (kN.m)	Erreur(%)
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		1 ordre	-74,251	-74,237	0,02%
Can	L (alt1)	2 ordre ($P - \Delta$)	-92,123	-95,206	-3.24%
	L_{lf} (alt2)				
	K_{extr}^* (alt3)	2 ordre ($P - \Delta - \delta$)	-88,927	-87,670	1.43 %
CAM		2 ordre ($P - \Delta - \delta$)	-86,761	-87,670	-1.53 %

Tableau 9.1- Evaluation des moments d'extrémités de la colonne1 pour les différentes méthodes

En regardant le Tableau 9.1, les résultats obtenus avec les différentes méthodes sont assez précis, la plus grande erreur étant de -3,25 % pour le moment au second ordre global. L'effet du second ordre local est assez important sur les moments d'extrémités de cette colonne 1 (faible inertie). En effet, la réduction du moment du second ordre global par rapport au moment au second ordre complet est d'environ 6 % pour les résultats analytiques et d'environ 8% pour les résultats numériques.

Pour la colonne 2, nous obtenons

Méthode		Moment d'extrémité	M_{ana} (kN.m)	M_{num} (kN.m)	Erreur(%)
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		1 ordre	277,99	278,03	-0,01%
Can	L (alt1)	2 ordre (P - Δ)	351,01	340,95	2.95%
	L_{lf} (alt2)				
	K_{extr}^* (alt3)	2 ordre (P - Δ - δ)	347,25	348,50	-0.36 %
CAM		2 ordre (P - Δ - δ)	346,88	348,50	-0.46 %

Tableau 9.2- Evaluation des moments d'extrémités de la colonne 2 pour les différentes méthodes

En analysant le Tableau 9.2, les résultats acquis ont aussi une bonne précision pour la colonne 2. A nouveau, la plus grande erreur pour l'évaluation du moment d'extrémité apparaît lors du calcul du moment d'extrémité au second ordre global, avec une erreur de 3%. L'effet du second ordre local est moins important sur les moments d'extrémités de la colonne 2 (grande inertie). De fait, la réduction du moment au second ordre global par rapport au moment au second ordre complet est d'environ 1.2 %. Par contre, pour les résultats numériques, nous n'observons pas une réduction mais une augmentation du moment au second ordre complet par rapport au moment au second ordre global qui est de 2%.

Nous pouvons conclure que les effets P-δ sont moins importants sur la colonne 2 que sur la colonne 1. En effet, les raideurs du ressort et de la restrainte du modèle pour la colonne 2 sont beaucoup plus faibles car ces raideurs sont liées à la poutre et à la colonne 1 de faible inertie. Tandis que pour la colonne 1, les raideurs du ressort et de la restrainte du modèle lié à la colonne 1 sont beaucoup plus importantes car elles sont liées à la poutre et surtout à la colonne 2 de grande inertie. Précédemment, nous avons bien montré que : plus les raideurs du ressort et de la restrainte du modèle sont élevées, plus les effets du second ordre local sont importants sur la valeur des moments d'extrémités.

Les moments aux extrémités sont obtenus avec les formules suivantes :

$$M_{noeuds\ mobiles}^I = \text{moment d'extrémité calculé sur base d'une analyse élastique au premier ordre sous chargement complet} \quad (9.1)$$

$$M_{CAN,alt\ 1,2}^{II-\Delta} = M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (9.2)$$

$$M_{CAN,alternative\ 3}^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \left(M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \right) = K_{extr}^* \cdot M_{CAN,alternative\ 1,2}^{II-\Delta} \quad (9.3)$$

$$M_{CAM}^{II-\Delta-\delta} = M_{II}^{P-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{NS} + K_{extr}^* \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (9.4)$$

Les moments M_{NS} et M_S sont liés à l'analyse élastique au premier ordre des structures à nœuds fixes (« non sway ») et à nœuds mobiles (« sway»). Pour le calcul des coefficients

d'amplification (K_{extr}^* et K_{extr}^*), nous allons détailler davantage la démarche pour la colonne 1 car le calcul de ces coefficients est plus fastidieux, en présence d'une charge répartie en travée de l'élément.

3.1.1.1 Calcul des coefficients K_{extr}^* et K_{extr} pour la colonne 1

Nous explicitons dans cette sous-section le calcul des coefficients d'amplification d'extrémité tenant compte de l'effet du second ordre local pour la colonne 1. Pour la colonne 2, comme il n'y pas de charge répartie, la démarche est identique à celle réalisée au chapitre 8.

Méthode CAM

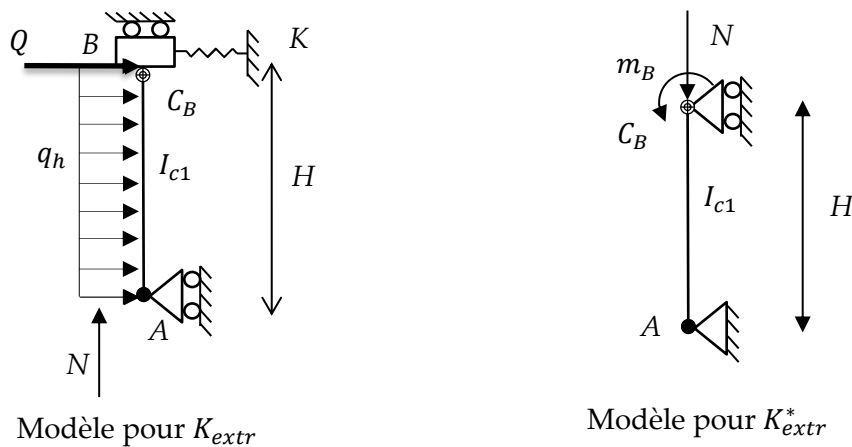


Figure 9.2-Modèle à nœuds mobiles et fixes avec chargement pour calculer K_{extr} et K_{extr}^*

Pour déterminer K_{extr}^* , en ayant calculé au préalable les caractéristiques géométriques du modèle (K et C_B), nous pouvons résoudre les deux systèmes d'équations suivants (9.5) et (9.8) afin d'obtenir le moment d'extrémité du modèle au premier ordre et au second ordre complet.

$$\begin{pmatrix} \alpha R_1 & \beta R_1 & -R_1(\alpha + \beta) \\ \beta R_1 & \alpha R_1 + C_B & -R_1(\alpha + \beta) \\ 0 & C_B & K.H^2 - N.H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A^{II} \\ \phi_B^{II} \\ \psi^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{m}_{enc,q,B} \\ Q.H + q_h \cdot \frac{H^2}{2} \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Avec

$$\mathbf{m}_{enc,q,B} = \frac{q_h \cdot H^2}{4\alpha} \quad (9.6)$$

Nous obtenons alors le moment au second ordre avec la formule :

$$M_B^{II \Delta - \delta^*} = C_B \phi_B^{II} \quad (9.7)$$

$$\begin{pmatrix} 2R_1 & R_1 & -3R_1 \\ R_1 & 2R_1 + C_B & -3R_1 \\ 0 & C_B & K.H^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A^I \\ \phi_B^I \\ \psi^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{m}_{enc,q,B}^* \\ Q.H + q_h \cdot \frac{H^2}{2} \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Avec

$$\mathbf{m}_{enc,q,B}^* = \frac{q_h \cdot H^2}{8} \quad (9.9)$$

Nous obtenons alors le moment au premier ordre avec la formule :

$$M_B^{I*} = C_B \phi_B^I \quad (9.10)$$

Enfin, nous pouvons déterminer le coefficient d'amplification K_{extr}

$$K_{extr} = S \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_{cr}^*}\right) \text{ avec } S = \frac{M_B^{II(\Delta-\delta)^*}}{M_B^{I*}} \text{ et } \lambda_{cr}^* = \lambda_{cr} \frac{\Sigma \text{ charge verticale}}{N} \quad (9.11)$$

Et nous obtenons $K_{extr} = 0,9421$

Pour déterminer K_{extr}^* , la formule est plus simple et a déjà été utilisée auparavant (chapitre 8) :

$$K_{extr}^* = \frac{1 - \frac{C_B/R_1}{C_B/R_1 + \alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}}}{1 - \frac{C_B/R_1}{C_B/R_1 + \frac{3}{2}}} \quad (9.12)$$

Et nous obtenons $K_{extr}^* = 0,9317$

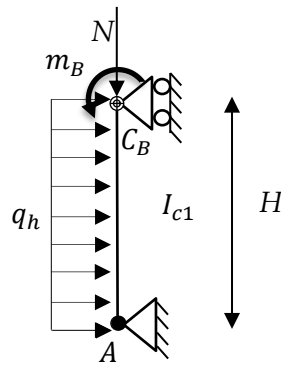
Pour la colonne 1 ,avec M_{NS} et M_S provenant des analyses élastique 1^{er} ordre « sway » et « non- sway », avec un multiplicateur critique de 5, nous obtenons le moment

$$M_{CAM}^{II-\Delta-\delta} = M_{II}^{P-\Delta-\delta} = C_{m,extr}^* \cdot M_{NS} + C_{m,extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (9.13)$$

$$M_{CAM}^{II-\Delta-\delta} = 0,9317 \cdot -3,122 + 0,9421 \cdot 1,25 \cdot -71,129 = -86,761 \text{ kN.m} \quad (9.14)$$

Cette valeur est effectivement la valeur lue dans le tableau 1 pour la méthode CAM.

Methode Can- K_{extr}^* (alt3)



Modèle pour K_{extr}^*

Figure 9.3- Modèle à nœuds fixes avec chargement de la colonne pour calculer K_{extr}^*
 Pour déterminer K_{extr}^* (chapitre 4, section 3.7), la formule utilisé est la suivante :

$$K_{extr}^* = \frac{M_B^{II-\delta}}{M_B^I} = \frac{-m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{(m_B + m_{enc,qB})}{C_B/R_1 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha}}}{-m_B + \frac{C_B}{R_1} \frac{(m_B + m_{enc,qB}^*)}{C_B/R_1 + \frac{3}{2}}} \quad (9.15)$$

Avec

$$m_{enc,q,B} = \frac{q_h \cdot H^2}{4\alpha} \text{ et } m_{enc,q,B}^* = \frac{q_h \cdot H^2}{8} \quad (9.16)$$

Cependant, nous ne connaissons pas m_B , le moment appliqué. En utilisant l'équation (4.75) développée pour le cas général (chapitre 4, section 3.7) et en simplifiant les termes pour ce cas particulier, nous obtenons :

$$m_b = -\left(\frac{2 C_B}{3 R_1}\right) (M_{CAN}^{II-\Delta} + m_{enc,q,B}^*) - M_{CAN}^{II-\Delta} \quad (9.17)$$

Pour finir, connaissant m_b , nous pouvons déterminer K_{extr}^* avec l'équation (9.12) et nous obtenons $K_{extr}^* = 0,9653$

Pour la colonne 1 avec M_{NS}, M_S provenant des analyses élastique 1^{er} ordre « sway » et « non-sway », avec un multiplicateur critique de 5.

$$M_{CAN,alt3}^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot \left(M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \right) = C_{m,extr}^* \cdot M_{CAN,alt1,2}^{II-\Delta} \quad (9.18)$$

$$M_{CAN,alt3}^{II-\Delta-\delta} = 0,9653 \cdot (-3,122 + 1,25 \cdot -71,13) = 0,9653 \cdot -92,123 = -88,927 \text{ kN.m} \quad (9.19)$$

Cette valeur est effectivement la valeur lue dans le tableau 1 pour la méthode Can K_{extr}^* (alt3) pour la colonne 1.

3.1.2 Vérifications des sections d'extrémités

La démarche étant similaire à celle réalisée dans le chapitre précédent, nous n'affichons que les résultats des multiplicateurs de ruine d'extrémités pour les colonnes 1 et 2.

Pour la colonne 1 (inertie faible), nous avons

Méthode		Γ	$\lambda_{u,extrémité}$ (kN.m)
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		0,768	1,302
Can	L (alt1)	0,794	1,259
	L_{lf} (alt2)		
	K_{extr}^* (alt3)	0,766	1,305
CAM		0,748	1,337

Tableau 9.3 – Taux d'utilisation et multiplicateur de ruine de la section d'extrémité de la colonne 1

Les multiplicateurs de ruine en section d'extrémité sont assez élevés pour la colonne 1. Il y a donc plus de chance que la ruine se produise en travée.

Pour la colonne 2 (inertie plus grande), nous avons

Méthode		Γ	$\lambda_{u,extrémité}$ (kN.m)
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		0,893	1,121
Can	L (alt1)	0,939	1,065
	L_{lf} (alt2)		
	K_{extr}^* (alt3)	0,929	1,076
CAM		0,928	1,077

Tableau 9.4 - Taux d'utilisation et multiplicateur de ruine de la section d'extrémité de la colonne 2

Les multiplicateurs de ruine sont proches de 1 pour certaines méthodes et dès lors de plus grandes chances que la ruine se produise en tête de colonne.

3.1.3 Vérifications de la stabilité des barres

Sur base des moments d'extrémités, nous pouvons maintenant déterminer les moments maximum en travée en utilisant le facteur d'amplification $\left(\frac{C_{my}}{(1-N_{ED}/N_{cr})}\right)$ associé à l'effet P- δ . Pour rappel, la formule de vérification est la suivante dans le cas d'un élément fléchi selon l'axe fort et comprimé :

$$\text{Selon l'axe fort : } \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{pl,Rk}} + \mu_y \frac{M_{y,Ed}}{C_{yy} M_{pl,y,Rk}} \leq 1 \quad (9.20)$$

Le moment maximum en travée du second ordre ($M_{y,Ed}$) est obtenu en multipliant le moment maximum en travée (M_{max}) par un coefficient d'amplification incluant l'effet P- δ .

$$M_{y,Ed} = \frac{C_{my} \cdot M_{max}}{\left(1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}}\right)} \quad (9.21)$$

3.1.3.1 Moment maximum en travée de la colonne1

Contrairement au cas d'une charge horizontale ponctuelle, le moment n'évolue plus de manière linéaire à cause de la charge répartie en travée. Le moment maximum n'est pas nécessairement le moment aux extrémités mais peut être en travée. En réalité, tout dépend de la valeur de la charge répartie (q_h) par rapport à la valeur du moment d'extrémité (M_B). Dans notre cas, nous sommes donc soit en présence du cas A ou du cas B de la Figure 9.4 car le moment produit par la charge répartie (q_h) est de même signe que le moment d'extrémité (M_B).

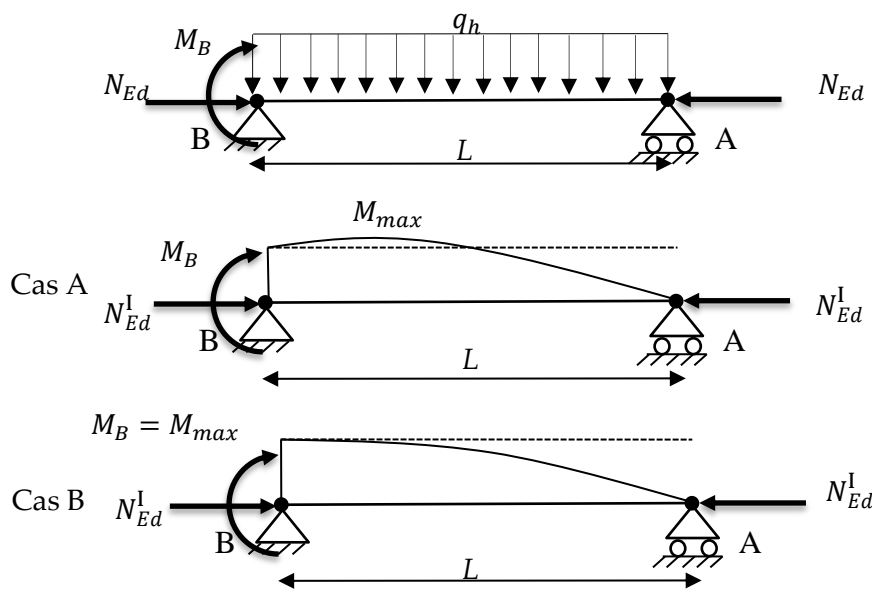


Figure 9.4 – Diagramme de moment sous chargement

Dans le cas A, la charge répartie est assez importante comparée au moment d'extrémité et donc le moment maximum se trouve bien en travée.

Dans le cas B, la charge répartie est trop faible comparée au moment d'extrémité et donc le moment maximum reste le moment à l'extrémité.

Dans notre cas, nous sommes toujours dans le cas A quel que soit le moment calculé à l'extrémité par les différentes méthodes ($M_B = M^I, M_{can,alt}^{II-\Delta}, M_{can,alt}^{II-\Delta-\delta}$ ou $M_{CAM}^{II-\Delta-\delta}$)

Cm, travée de l'eurocode pour la colonne 1

Vu la forme du diagramme des moments (Figure 9.4), l'Eurocode 3 (référence [1]) nous recommande d'utiliser la formule du coefficient de moment équivalent suivante :

$$C_{my, travée} = 1 + \left(\frac{\pi^2 EI |f|}{|M_{max}| L^2} - 1 \right) \frac{N_{ED}^I}{N_{cr}} \quad (9.22)$$

Avec M_{max} = le moment en travée maximal

$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2}$ avec L_{fl} la longueur de flambement utilisée pour les diverses méthodes.

f = la flèche maximale due au diagramme des moments.

Nous avons donc pour les différentes méthodes

Méthode	L_{fl}	$C_{my, travée}$	$\frac{1}{1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}}}$	M_{max}	$M_{y,Ed}$	
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles	$L_{fl, noeuds\ mobiles} = 2,04.L$	1,0031	1,85	78,59	137,97	
Can	$L (alt1)$	L	0,9961	1,1240	93,71	104,92
	$L_{lf} (alt2)$	$L_{fl, noeuds\ fixes} = 0,71.L$	0,9980	1,0594	93,71	99,077
	$K_{extr}^* (alt3)$	L	0,9970	1,1240	90,94	101,90
CAM	L	0,9975	1,1240	89,05	99,84	

Tableau 9.5 – Moment maximum en travée ($M_{y,Ed}$) pour la colonne 1

Nous remarquons que la méthode Eurocode avec analyse élastique au 1^{er} ordre fournit un moment en travée beaucoup plus important que pour les autres méthodes.

C_m, travée via OSSA2D pour la colonne 1

Intrigués par la précision de la méthode précédente proposée par l'Eurocode 3 pour le calcul des coefficients de moment équivalent (C_m), nous avons décidé de calculer l'amplification des moments en travée par le biais du programme OSSA2D.

La colonne a été modélisée par une dizaine d'éléments afin d'inclure les effets du second ordre local. Comme pour le point précédent, l'élément est bi-rotulé et soumis au moment d'extrémité de la méthode utilisée ainsi qu'à la charge répartie.

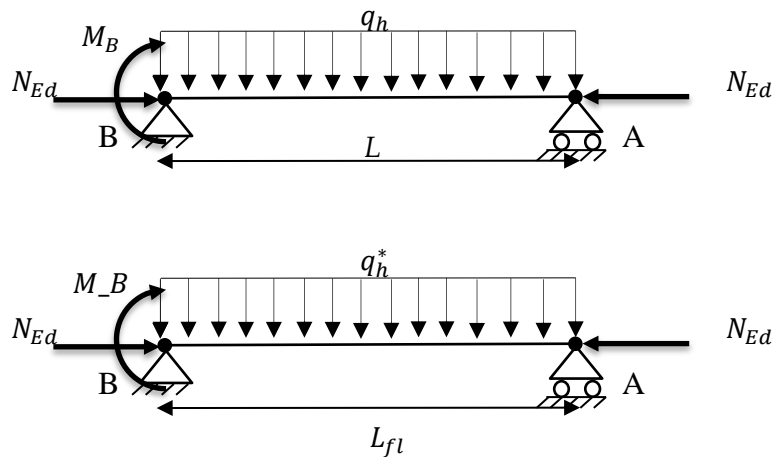


Figure 9.5 – Chargement de la colonne avec $L_{fl} = L$ et L_{fl} à noeuds fixes

Pour la méthode $Can L_{fl}(alt2)$, nous devons tenir compte de la longueur de flambement à nœuds fixes alors que pour les autres méthodes, nous utilisons une longueur de flambement égale à la longueur d'épure. Nous considérons donc une barre bi-rotulée avec une longueur égale à la longueur de flambement et nous définissons une charge répartie équivalente q_h^* afin d'avoir le même moment maximum en travée dû à la charge répartie q_h : Nous avons donc

$$M_{max,q_h} = q_h \cdot \frac{L^2}{8} = q_h^* \cdot \frac{L_{fl}^2}{8} \rightarrow q_h^* = q_h \cdot \frac{L^2}{L_{fl}^2} \quad (9.23)$$

Après avoir appliqué le chargement et l'effort normal, nous déterminons le moment maximum en travée tenant compte de l'effet $P-\delta$ via le programme OSSA2D. Afin de comparer au mieux les deux méthodes, nous définissons également un coefficient de moment équivalent.

$$C_{my,travée} = \frac{M_{max,travée}^{II-\delta}}{M_{max,travée}} \left(1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}} \right) \quad (9.24)$$

Nous n'avons pas défini de coefficient C_m numérique pour la méthode à nœuds mobiles qui utilise un facteur d'amplification lié à la longueur de flambement à nœuds mobiles pour tenir compte des effets du second ordre local et global. Or, avec OSSA2D nous travaillons à nœuds fixes afin de tenir compte de l'effet $P-\delta$. Nous aurions peut-être pu réaliser la même démarche que pour la méthode $Can L_{fl}(alt2)$ mais avec une longueur d'élément égale à la longueur de flambement à nœuds mobiles.

Méthode		L_{fl}	$C_{my,travée}$	$\frac{1}{1 - \frac{N_{ED}}{N_{cr}}}$	M_{max}	$M_{y,Ed}$
Can	$L (alt1)$	L	0,9554	1,1240	93,71	100,63
	$L_{lf} (alt2)$	$L_{fl, nœuds fixes} = 0,71 \cdot L$	0,97244	1,0594	93,71	96,54
	$K_{extr}^* (alt3)$	L	0,9581	1,1240	90,94	97,93
CAM		L	0,9604	1,1240	89,05	96,12

Tableau 9.6 - Moment maximum en travée ($M_{y,Ed}$) pour la colonne 1

Les coefficients de moment équivalent numérique ($C_{m,travée num}$) sont plus faibles que les coefficients de moment équivalent analytique proposés par l'Eurocode 3 ($C_{m,travée EC}$). Les coefficients d'amplification $\left(\frac{1}{1 - N_{ED}/N_{cr}} \right)$ étant égaux pour les deux méthodes, il en résulte des moments en travée plus faibles avec ces coefficients de moment équivalent numérique. Les coefficients de moment équivalent proposés par l'Eurocode 3 sont dès lors plus sécuritaires.

3.1.3.2 Moment maximum en travée de la colonne 2

Pour la colonne 2, le moment évolue de manière linéaire et la démarche est similaire à celle réalisée au chapitre précédent. Elle n'est donc pas détaillée.

3.1.3.3 Calcul du multiplicateur de ruine en travée

Pour finir, nous calculons les différents paramètres χ_y, μ_y, C_{yy} avec les longueurs de flambement associées à chaque méthode et les résistances plastiques au moment et à l'effort normal ($M_{pl,Rk}$ et $N_{pl,Rk}$). Au final, nous obtenons donc les taux d'utilisation de l'élément en travée. Pour la colonne 1, nous les avons calculés en utilisant les coefficients de moment équivalent en travée proposée par l'Eurocode 3 et avec le programme numérique OSSA2D.

Pour la colonne 1, nous obtenons

Méthode avec $C_{m,travée}$ EC		Γ	$\lambda_{u,travée}$ (kN.m)
Eurocode 1 ^{er} ordre élastique à noeuds mobiles		1,397	0,716
Can	L (alt1)	1,056	0,947
	L_{lf} (alt2)	0,981	1,019
	K_{extr}^* (alt3)	1,033	0,968
CAM		1,017	0,983

Tableau 9.7- Taux d'utilisation et multiplicateur de ruine en travée de la colonne1

Méthode avec $C_{m,travée}$ num		Γ	$\lambda_{u,travée}$ (kN.m)
Can	L (alt1)	1,020	0,978
	L_{lf} (alt2)	0,960	1,041
	K_{extr}^* (alt3)	1,000	1,000
CAM		0,986	1,014

Tableau 9.8 - Taux d'utilisation et multiplicateur de ruine en travée de la colonne1

Nous constatons que les taux d'utilisations pour l'ensemble des méthodes sont plus élevés avec les coefficients de moment équivalent numérique ($C_{m,travée}$ num) qu'avec les coefficients de moment équivalent analytique ($C_{m,travée}$ EC).

Pour la colonne 2, nous obtenons

Méthode avec $C_{m,span}$ EC		Γ	$\lambda_{u,travée}$ (kN.m)
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		0,792	1,263
Can	L (alt1)	0,850	1,176
	L_{lf} (alt2)	0,837	1,195
	K_{extr}^* (alt3)	0,842	1,187
CAM		0,841	1,188

Tableau 9.9 - Taux d'utilisation et multiplicateur de ruine en travée de la colonne2

3.1.4 Détermination du multiplicateur de ruine du portique

Ensuite, ayant défini les multiplicateurs de ruine en travée et aux extrémités, nous pouvons obtenir le multiplicateur de ruine en prenant le minimum des deux pour chaque colonne.

$$\begin{aligned} \lambda_{u,c1} &= \min(\lambda_{u,travée,c1}; \lambda_{u,extrémité,c1}) \\ \lambda_{u,c2} &= \min(\lambda_{u,travée,c1}; \lambda_{u,extrémité,c1}) \end{aligned} \quad (9.25)$$

Le multiplicateur de ruine du portique est défini comme

$$\lambda_{u, \text{portique}} = \min(\lambda_{u,c2}; \lambda_{u,c1}) \quad (9.26)$$

sous réserve qu'il n'y a pas de plastification ou de développement de rotule plastique dans la poutre avant la ruine des colonnes. En analysant les résultats de FINELG, nous avons vérifié qu'aucune plasticité ne se développe dans la poutre avant la ruine du portique.

Pour finir, nous comparons le multiplicateur de ruine analytique des différentes méthodes au multiplicateur de ruine numérique obtenu avec FINELG, à nouveau, avec les deux types d'évaluation du coefficient de moment équivalent en travée.

Méthode avec $C_{m,span}$ EC		Ruine	λ_u	Erreur (%)
Analyse élasto – plastique avec imperfections (Finleg)		–	1,0036	–
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		En travée colonne 1	0,716	29,59
Can	L (alt1)	En travée colonne 1	0,947	6,87
	L_{lf} (alt2)	En travée colonne 1	1,019	–0,28
	K_{extr}^* (alt3)	En travée colonne 1	0,9678	4,78
CAM		En travée colonne 1	0,983	3,31

Tableau 9.10 – Comparaison des multiplicateurs de ruine du portique

Méthode avec $C_{m,span}$ num		Ruine	λ_u	Erreur (%)
Analyse élasto – plastique avec imperfections (Finleg)		–	1,0036	–
Can	L (alt1)	En travée colonne 1	0,980	3,59
	L_{lf} (alt2)	En travée colonne 1	1,041	–2,45
	K_{extr}^* (alt3)	En travée colonne 1	1,000	1,62
CAM		En travée colonne 1	1,014	0,25

Tableau 9.11 - Comparaison des multiplicateurs de ruine du portique

Nous observons que l'ensemble des ruines se produit en travée dans la colonne 1 comme souhaité. En effet, ce type de rupture nous permet de mieux distinguer les diverses méthodes.

En analysant les Tableaux 9.10 et 9.11, nous remarquons que la précision des différentes méthodes est bonne sauf pour la méthode à noeuds mobiles. Nous notons également que la précision des méthodes augmente en déterminant un coefficient de moment numériquement ($C_{m,span}$ num) sauf pour la méthode Can $L_{fl}(alt2)$ (L_{fl} à noeuds fixes) où l'erreur augmente de 2%.

3.2 Résultats complets

Dans cette avant-dernière section de chapitre, nous présentons l'ensemble des résultats obtenus pour les multiplicateurs critiques globaux de 3, 5 et 7. Nous analysons la précision des multiplicateurs de ruine acquis pour chaque méthode et la position de la ruine (travée ou section d'extrémité, colonne 1 ou 2). A nouveau, nous calculons deux coefficients de moments équivalents (EC et numérique) pour les différents multiplicateurs critique globaux.

3.2.1 Multiplicateur de ruine avec coefficient de moment équivalent en travée proposé par l'Eurocode 3.

Pour la plage de multiplicateur critique global étudié, nous avons à chaque fois une ruine en travée pour la colonne 1 (Tableau 9.12). Pour l'ensemble des méthodes, nous remarquons que leur précision converge bien ; d'autant plus que le multiplicateur critique global augmente.

A nouveau, la méthode à nœuds mobiles nous donne des résultats beaucoup trop sécuritaires (+ 35 % à 25%) mais elle converge, plus le multiplicateur critique augmente.

La méthode Can L (*alt1*) est un peu trop sécuritaire car son erreur varie entre 7,3% et 5,8 %. L'explication est toujours la même: nous utilisons une longueur de flambement égale à la longueur d'épure alors que nous pouvons tenir compte de la longueur de flambement à nœuds fixes ($L_{fl} < L$).

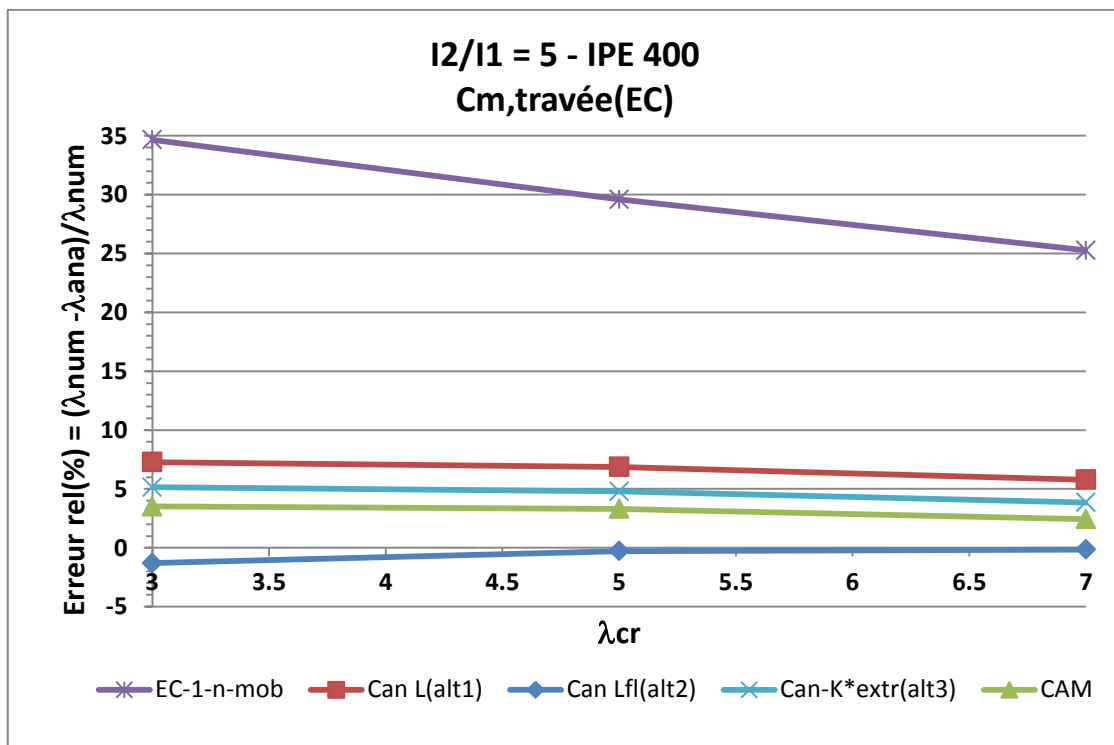


Figure 9.6 - Erreur sur la détermination du multiplicateur ruine analytique (λ_u) en fonction du multiplicateur critique (λ_{cr})

Méthodes $C_{m,span}$ EC		Mode de ruine		
		$\lambda_{cr} = 3$	$\lambda_{cr} = 5$	$\lambda_{cr} = 7$
Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles		En travée, colonne 1		
Can	L (alt1)	En travée, colonne 1		
	L_{lf} (alt2)	En travée, colonne 1		
	K_{extr}^* (alt3)	En travée, colonne 1		
CAM		En travée, colonne 1		

Tableau 9.12-Mode ruine pour les différentes méthodes

En effet, la méthode Can L_{lf} (alt2), qui est similaire à la méthode Can L (alt1) mais avec la bonne longueur de flambement, nous donne d'excellents résultats avec une erreur qui varie entre -1,3 % et 0,15%. Pour rappel, ces méthodes ne tiennent pas compte de l'effet $P - \delta$ sur la détermination des moments d'extrémités.

Pour les deux méthodes qui incluent justement cet effet du second ordre local sur les moments d'extrémités (CAM et Can K_{extr}^* (alt3)), nous observons que leur précision est assez bonne avec la méthode CAM qui un peu plus précise (l'erreur varie entre 3,5% et 2,5%) que la méthode Can K_{extr}^* (alt3) (l'erreur varie entre 5% et 3%). Ces deux méthodes sont toujours sécuritaires.

3.2.2 Multiplicateur de ruine avec coefficient de moment équivalent en travée calculé numériquement

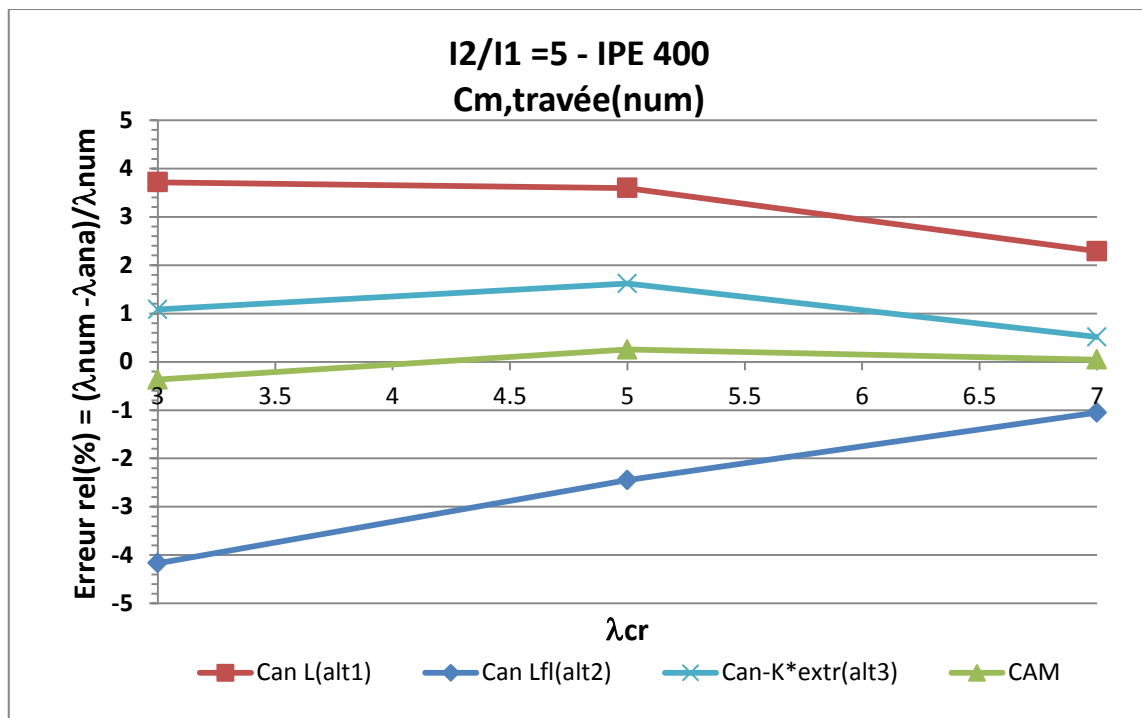


Figure 9.7 - Erreur sur la détermination du multiplicateur de ruine analytique (λ_u) en fonction du multiplicateur critique (λ_{cr})

Méthodes $C_{m,span}$ num	Mode de ruine		
	$\lambda_{cr} = 3$	$\lambda_{cr} = 5$	$\lambda_{cr} = 7$
<i>Eurocode 1 ordre élastique à noeuds mobiles</i>	<i>En travée , colonne 1</i>		
<i>Can</i>	<i>L (alt1)</i>	<i>En travée , colonne 1</i>	
	<i>L_{lf} (alt2)</i>	<i>En travée , colonne 1</i>	<i>Section d'extrémité Colonne 2</i>
	<i>K_{extr}* (alt3)</i>	<i>En travée , colonne 1</i>	
<i>CAM</i>	<i>En travée , colonne 1</i>		<i>Section d'extrémité Colonne 2</i>

Tableau 9.13- Mode de ruine pour les différentes méthodes

Avec ces coefficients de moment équivalent déterminés de manière plus fine par le biais d'un outil numérique, nous notons que la précision de différentes méthodes augmente sauf pour la méthode *Can L_{lf} (alt2)*. Nous observons à nouveau une ruine en travée dans la colonne 1 pour tous les cas de figures sauf pour le multiplicateur global de 7 où la ruine se produit en section d'extrémité de la colonne 2 pour les méthodes *CAM* et *Can K_{extr}* (alt3)*.

La méthode *Can L (alt1)* est toujours sécuritaire mais a une erreur relative qui a diminué de moitié. Cette erreur varie entre 3,7 et 2,3 % au lieu de 7,3% et 5,8 % précédemment.

Les méthodes les plus complètes (*Can K_{extr}* (alt3)* et *CAM*), qui incluent tous les effets du second ordre global et local, nous donne des résultats remarquables. En effet, les erreurs varient entre 1,5 et 0,5 % pour la *Can K_{extr}* (alt3)* et -0,36% et 0,25 % pour la *CAM*.

Contrairement aux autres méthodes qui ont une erreur plus ou moins stable en fonction du multiplicateur critique global, la méthode *Can L_{lf} (alt2)* à une erreur qui augmente en fonction de la diminution de celui-ci . L'explication n'est pas évidente à donner mais pourrait provenir de la détermination de la charge (q_h^*) qui n'est pas assez rigoureuse pour calculer le coefficient de moment équivalent en travée numérique (voir équation (9.22)).

Une autre explication serait la détermination de la longueur de flambement à nœuds fixes qui est trop faible et donc insécuritaire. En effet, si nous déterminions une longueur de flambement comprise entre la longueur de flambement et la longueur d'épure, nous obtiendrions une courbe d'erreur qui se situe entre les deux courbes d'erreur de la méthode *Can L (alt1)* et *Can L_{lf} (alt2)*. Cette courbe serait fort proche des méthodes *CAM* et *Can K_{extr}* (alt3)*.

Une dernière explication, sans doute la plus plausible, serait que l'erreur provienne simplement du moment d'extrémité calculé au second ordre global. En effet, en regardant le Tableau 9.1, nous remarquons que le moment d'extrémité au second ordre global est sous-évalué par rapport au moment d'extrémité au second ordre global acquis numériquement. Pour un multiplicateur global de 5, l'erreur sur les moments (-3 %) est quasiment similaire à l'erreur sur le multiplicateur de ruine (-2.5 %).

4 Conclusion

En analysant ce dernier cas de portique, par le biais d'une géométrie et d'un chargement adéquat, nous avons vraiment réussi à distinguer les différentes méthodes.

De manière générale, l'ensemble des méthodes nous donne satisfaction sauf la méthode avec analyse élastique 1^{er} ordre à nœuds mobiles. Cette dernière est à proscrire dans ce type de portique car beaucoup trop sécuritaire.

La méthode Can L (*alt1*) est toujours un peu trop sécuritaire mais sa précision augmente de manière assez significative lorsque nous utilisons des C_m en travée plus précis que ceux prescrits par l'Eurocode 3, un peu trop sécuritaire.

La méthode Can L_{lf} (*alt2*) est très précise avec les C_m en travée de l'Eurocode. En effet, ces coefficients compensent la sous-évaluation du moment d'extrémité au second ordre global.

Les méthodes les plus complètes (K_{extr}^* (*alt3*) et CAM) ont une bonne précision et cette précision augmente encore quand nous utilisons les C_m travée déterminées numériquement.

Enfin, l'ensemble des méthodes ont une erreur qui diminue lorsque le multiplicateur critique augmente. Cette dernière observation permet de valider la cohérence des méthodes vis-à-vis de la prise en compte des effets du second ordre local et global.

Chapitre 10 : Comparaison des différentes méthodes d'analyse-vérifications

1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous comparons l'ensemble des méthodes étudiées sur base de différents critères établis (domaine d'application, précision et complexité) en vue de fournir certaines recommandations au praticien qui voudrait les utiliser.

La plupart de ces méthodes d'analyse-vérifications se base sur des analyses de type élastique, réalisées au premier ordre. Ensuite nous déterminons des coefficients d'amplification (simulant les effets du second ordre global et parfois local) en vue d'obtenir les moments d'extrémités (au second ordre global ou complet). En connaissant les efforts aux extrémités, nous pouvons réaliser la vérification des sections aux extrémités de chaque élément. Pour finir, la vérification de la stabilité de l'élément en travée à nœuds fixes est réalisée en déterminant notamment le moment maximum en travée incluant l'effet P- δ .

Ces méthodes intègrent l'imperfection globale au niveau de l'analyse et l'imperfection locale au niveau de la vérification de la stabilité de l'élément en travée.

2 Comparaison des méthodes

2.1 Méthode de l'Eurocode 3 avec analyse élastique au premier ordre à nœuds mobiles

2.1.1 Domaine d'application

Cette méthode est applicable pour des portiques symétriques tant au niveau du chargement que de la géométrie. En réalité, il est plus correct de dire qu'elle est valable lorsque le multiplicateur critique global ($\lambda_{cr,global} = V_{cr}/V_{Ed}$) est proche du multiplicateur local ($\lambda_{cr,local} = N_{cr}/N_{ED}$) calculé sur base de la longueur de flambement à nœuds mobiles de la colonne. Ce cas est rencontré lorsque l'ensemble des colonnes d'un même étage est instable au même moment. Dans ce cas, il n'y a pas d'effet significatif de rappel d'une colonne voisine plus résistante.

Si le portique présente une colonne plus faible, instable avant les autres, un effort de rappel apparaît et permet d'éviter l'instabilité précoce de cette même colonne lorsque N_{ED} est proche de N_{cr} (L_{fl} à nœuds mobiles). Dans ce cas, la méthode fournit des résultats très sécuritaires car elle ne tient pas compte de cet effet de rappel, lié à la raideur du reste du portique, modélisée sur notre modèle par le ressort et la restreinte.

2.1.2 Degré de précision

Lorsque le portique a une géométrie et un chargement symétriques ou lorsque $\lambda_{cr,global} \cong \lambda_{cr,local}$, la précision de cette méthode varie entre 3 et 10 % pour le processus complet d'analyse-vérifications lors d'une ruine par instabilité en travée.

Cependant, dans le cas d'une ruine en section d'extrémité, le facteur d'amplification des moments d'extrémités forfaitaires de 1,2 est trop sécuritaire lorsque le multiplicateur critique est élevé (au-dessus de 7) et nous conduit à des erreurs élevées pouvant aller jusqu'à 10-15 %. Il est possible de pallier à ce problème en remplaçant ce facteur de 1,2 par le facteur d'amplification lié au multiplicateur critique local ou global $\left(\frac{1}{1-N_{Ed}/N_{cr}} \text{ ou } \frac{1}{1-1/\lambda_{cr}}\right)$.

Lorsque le portique est non symétrique quant à sa géométrie ou son chargement, la méthode fournit des résultats beaucoup trop sécuritaires avec une erreur qui varie entre (5% et 40-45%). En fait, plus l'effort de rappel est grand et plus la méthode fournit des résultats avec une grande erreur.

2.1.3 Complexité

Analyse

La méthode de l'Eurocode à nœuds mobiles est la plus facile à réaliser car nous faisons une simple analyse au premier ordre en considérant l'ensemble du chargement.

Vérification de résistance des sections d'extrémités

Nous faisons la vérification de résistance des sections d'extrémités utilisant le facteur forfaitaire de 1.2 pour les moments d'extrémités.

Vérification de la stabilité des barres en travée

Pour calculer les différents paramètres de la formule associée à la stabilité en travée, nous utilisons notamment la longueur de flambement à nœuds mobiles.

Le coefficient d'amplification du moment en travée est obtenu par :

$$\frac{C_m}{\left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)} \quad (10.1)$$

Où : -) N_{cr} (L_{fl} à nœuds mobiles)

-) C_m est le coefficient de moment équivalent (), calculé sur base des formules proposée par l'Eurocode 3 en utilisant les longueurs de flambement à nœuds mobiles.

Notons que le calcul de cette longueur de flambement n'est pas toujours évidente à obtenir de façon précise. En outre, cette longueur de flambement est à calculer pour chaque élément.

2.2 Méthode Can L (alternative 1)

2.2.1 Domaine d'application

La méthode est applicable pour tous types de portique avec un multiplicateur critique global de la structure (λ_{cr}) compris entre 3 et 10.

La partie analyse de cette méthode détermine les moments d'extrémités au second ordre global (P- Δ). Elle fournit des résultats plus précis quand l'influence de l'effet P- δ est faible sur les moments d'extrémités. Les effets P- δ sont importants sur les moments d'extrémités lorsque le multiplicateur critique global est faible et lorsque l'effort de rappel est important.

2.2.2 Degré de précision

Si la ruine se produit en travée, cette méthode est toujours sécuritaire en travée car nous définissons une longueur de flambement égale à la longueur d'épure au lieu de prendre comme longueur de flambement, la longueur de flambement à nœuds mobiles. Pour un $L_{fl} \cong 0,7.L$, cette méthode présente une erreur de (5 à 10 %). Cependant, en utilisant les coefficients de moment en travée plus précis (autre que ceux proposés dans l'Eurocode 3), nous pouvons diminuer cette erreur par 2 (+2,5 à 5 %). Notons que cette erreur sécuritaire devient de plus en plus importante au fur et à mesure que la longueur de flambement diminue. En effet, pour une barre rotulée-encastree à nœuds fixes, nous utilisons L au lieu de 0,7 L mais pour une barre bi-encastree à nœuds fixes, nous utilisons L au lieu de 0,5.L. Dans ce dernier cas, la sécurité prise devient fort importante.

Si la rupture se réalise en section d'extrémité, elle peut être légèrement insécuritaire lorsque le moment à l'extrémité au second ordre global est sous-évalué (-2 à -3 %). A contrario, elle est trop sécuritaire quand le moment d'extrémité au second ordre global est plus grand que le moment au second ordre complet.

2.2.3 Complexité

Analyse

Il faut réaliser deux analyses élastiques au premier ordre pour une structure à nœuds fixes « non-sway » et une structure à nœuds mobiles « sway ». Nous utilisons ensuite la formule suivante afin définir les moments d'extrémités au second ordre global :

$$M_{II}^{P-\Delta} = M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \cdot M_S \quad (10.2)$$

Vérification de résistance des sections d'extrémités

Nous faisons la vérification de résistance des sections d'extrémités utilisant les moments obtenus via l'analyse et qui tiennent compte uniquement des effets P-Δ.

Vérification de la stabilité des barres en travée

Pour calculer les différents paramètres de la formule associée à la stabilité en travée, nous utilisons notamment la longueur d'épure. Nous n'avons donc pas besoin de réaliser un calcul de longueur de flambement.

Le coefficient d'amplification du moment en travée est régi par l'équation (10.1). Le coefficient de moment équivalent (C_m) est calculé sur base des formules proposées par l'Eurocode 3 ou en utilisant un outil numérique. Si le diagramme des moments est linéaire, les formules de l'Eurocode 3 sont assez simples, comparées à l'utilisation d'un logiciel numérique, pour modéliser l'élément (voir Figure 2.10). Cependant, si le diagramme de moment est non linéaire avec des moments aux extrémités, nous devons calculer la flèche due au diagramme des moments sollicitants dans la formule de l'Eurocode (voir Figure 2.10), ce qui est plus contraignant. Dans ce cas, nous pouvons utiliser l'outil numérique qui nous fournit une meilleure précision.

2.3 Méthode Can Lfl (alternative 2)

Cette méthode est peu détaillée car fort similaire à la méthode Can L (alternative 1).

2.3.1 Domaine d'application

Exactement similaire au domaine d'application de la méthode Can L (alternative 1).

2.3.2 Degré de précision

Si la ruine se produit en section d'extrémité, la précision est similaire à la méthode Can L (alt. 1) car elle détermine les mêmes moments d'extrémités i.e. des moments au second ordre incluant l'effet P-Δ.

Si la ruine se produit en travée, cette méthode possède une meilleure précision que la méthode Can L (alt. 1) car elle utilise la longueur de flambement à nœuds fixes. Cependant, elle a tendance à être insécuritaire de quelques pourcents (0 à -5%). Cette précision augmente d'autant plus que l'effort de rappel est faible (l'effet P- δ influence moins le moment d'extrémité). D'ailleurs, l'utilisation des coefficients de moment équivalent en travée plus précis est à éviter. En effet, ils ne diminuent pas l'erreur mais au contraire l'augmentent de quelques pourcents (2 à 3 % en plus).

2.3.3 Complexité

Analyse

L'analyse est similaire à la méthode Can L (alt. 1). Les moments d'extrémités au second ordre global sont obtenus avec la même formule que pour la méthode Can L (alt. 1) (voir équation (10.2)).

$$M_{II}^{P-\Delta} = M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \cdot M_S \quad (10.3)$$

Vérification de résistance des sections d'extrémités

Nous faisons la vérification de résistance des sections d'extrémités utilisant les moments obtenus via l'analyse, qui ne tiennent compte que des effets P- Δ .

Vérification de la stabilité des barres en travée

Pour calculer les différents paramètres de la formule associés à la stabilité en travée, nous utilisons notamment la longueur de flambement à nœuds fixes.

Le coefficient d'amplification du moment en travée est toujours similaire à l'équation (10.1). Le coefficient de moment équivalent (C_m) est calculé sur base des formules proposées par l'Eurocode3. Si le diagramme des moments est linéaire, les formules de l'Eurocode sont assez simples et si le diagramme des moments est non linéaire, les formules sont plus compliquées car nous devons notamment calculer la flèche sous le diagramme des moments sollicitants.

2.4 Méthode Can K_{extr}^* (alternative 3)

2.4.1 Domaine d'application

La méthode est applicable pour tous types de portique avec un multiplicateur critique global de la structure (λ_{cr}) compris entre 3 et 10. Vu la précision de cette méthode, il est probablement possible d'étendre son domaine d'application à des structures possédant des multiplicateurs critiques plus faibles que 3. Cependant, l'intérêt en est limité car ces structures ne sont pas très courantes.

Cette méthode détermine les moments d'extrémités et en travée au second ordre complet. Elle prend en considération tous les effets liés au second ordre pour déterminer les moments.

2.4.2 Degré de précision

Pour une ruine en travée, la précision de la méthode est bonne (0 2 %) et elle s'améliore encore lorsque nous utilisons des coefficients de moments en travée plus précis par le biais d'une méthode numérique par exemple.

Pour une rupture en section d'extrémité, la précision de la méthode est bonne mais elle peut être légèrement insécuritaire (0 à -5%) lorsque les moments aux extrémités au second ordre global et local sont sous-évalués. En effet, plus le multiplicateur est faible et l'effort de rappel est grand et plus la précision du calcul des moments d'extrémités diminue.

2.4.3 Complexité

Analyse

Il faut réaliser deux analyses élastiques au premier ordre pour une structure à nœuds fixes « non-sway » et une structure à nœuds mobiles « sway ». Ensuite, nous utilisons la formule suivante afin définir les moments d'extrémités au second ordre global.

$$M_{CAN,alternative\ 3}^{II-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot \left(M_{NS} + \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \right) \quad (10.4)$$

Dans ce cas, nous devons calculer les coefficients d'amplification K_{extr}^* (modèle à nœuds fixes). Ces coefficients sont assez lourds à calculer car ils dépendent de nombreux paramètres dont les fonctions de stabilités (α, β) ainsi que la raideur des restreintes(C). De plus, nous devons effectuer ces calculs lors de la vérification de chaque barre.

Vérification des sections d'extrémités

Nous faisons la vérification des sections d'extrémités utilisant les moments obtenus via l'analyse incluant les effets P- Δ et P- δ .

Vérification de la stabilité des barres en travée

La vérification en stabilité est identique à celle réalisée pour la méthode Can L (alt 1). Pour rappel, nous utilisons la longueur d'épure comme longueur de flambement.

Le coefficient d'amplification du moment en travée est toujours similaire à l'équation (10.1) où le coefficient de moment équivalent (C_m) est calculé sur base des formules proposées par l'Eurocode 3 ou en utilisant un outil numérique. Dans ce cas, nous proposons

d'utiliser l'outil numérique afin d'obtenir une meilleure précision vu la complexité déjà grande de la méthode.

2.5 Méthode CAM

2.5.1 Domaine d'application

Il est similaire à celui de la méthode Can alternative 3. La méthode est applicable pour tous types de portique avec $3 < \lambda_{cr} < 10$. Vu la précision de cette méthode, il est possible d'étendre son domaine d'application pour des multiplicateurs critiques encore plus faibles que 3.

Cette méthode détermine les moments d'extrémités et en travée au second ordre complet. Elle prend en considération tous les effets liés au second ordre.

2.5.2 Degré de précision

Pour une ruine en travée, la précision de la méthode est très bonne (0 à 2%) et elle s'améliore encore lorsque nous utilisons des coefficients de moments en travée plus précis (outil numérique qui discrétise la colonne en plusieurs éléments).

En section d'extrémité, la précision de la méthode est bonne (0 à -5%) mais elle peut être légèrement insécuritaire lorsque les moments aux extrémités au second ordre global sont sous-évalués. En effet, plus le multiplicateur est faible et l'effort de rappel est grand (lié à la restreinte) et plus la précision diminue.

2.5.3 Complexité

Analyse

De nouveau, nous réalisons les analyses élastiques au premier ordre pour une structure à nœuds fixes et une structure à nœuds mobiles. Ensuite, nous utilisons la formule suivante afin définir les moments d'extrémités au second ordre global.

$$M_{CAM}^{\Pi-\Delta-\delta} = K_{extr}^* \cdot M_{NS} + K_{extr} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} M_S \quad (10.4)$$

Dans ce cas, nous devons calculer en plus les coefficients K_{extr} (modèle à nœuds mobiles) et K_{extr}^* (modèle à nœuds fixes) qui sont assez lourds à calculer car ils dépendent de nombreux paramètres liés aux fonctions de stabilité (α, β), à la raideur des restreintes (C) et à la raideur du ressort (K) (uniquement pour le K_{extr}). De plus, nous devons effectuer ces calculs lors de la vérification de chaque barre.

Vérification des sections d'extrémités

Nous faisons la vérification des sections d'extrémités utilisant les moments obtenus via l'analyse incluant les effets $P-\Delta$ et $P-\delta$.

Vérification de la stabilité des barres en travée

La vérification en stabilité est identique à celle réalisée pour la méthode Can K_{extr}^* (alternative 3).

3 Tableau récapitulatif

Nous réalisons un tableau récapitulatif afin d'avoir une vue globale des qualités et défauts des méthodes. Nous nous basons sur une analyse multicritères qualitative en assignant aux méthodes des plus (+) ou des moins (-) pour chaque critère. Ensuite, nous réalisons le total en donnant la valeur de 1 pour chaque plus (+) et la valeur de -1 pour chaque moins (-). Le but de cette analyse multicritères est d'essayer de montrer là où les méthodes ressortent du lot. En plus des méthodes analytiques, nous nous sommes permis d'ajouter la méthode aux éléments finis.

Critères	Méthodes d'analyse-vérification					
	1 ^{er} ordre élastique à nœuds mobiles	CAN			CAM	Éléments finis (FINELG)
		Alt 1 (L)	Alt 2 (L_{fl})	Alt 3 (K_{extr}^*)		
Domaine d'applicabilité	--	+	+	++	++	+++
Complexité d'analyse	+++	++	++	-	--	---
Complexité des vérifications	+	++	+	++	++	/
Précision	--	-	+	++	++	+++
Total	0	4	5	5	4	3

Tableau 10.1-Analyse multicritères sur les méthodes d'analyse-vérifications étudiées

En regardant les résultats, nous voyons directement le lien entre la complexité d'analyse et la précision. Plus l'analyse est compliquée et plus la précision de la méthode, après l'entière du processus d'analyse-vérifications, est bonne.

Au niveau du domaine d'application, nous avons, à l'extrême inférieur, la méthode avec l'analyse au 1^{er} ordre élastique à nœuds mobiles qui ne peut être utilisée que sur des portiques où l'ensemble des colonnes d'un même étage sont instables en même temps. A l'extrême supérieur, nous avons la méthode aux éléments finis qui applicable dans tous les domaines. Les autres méthodes se situent entre ces deux extrêmes avec un domaine un peu

plus large pour les méthodes qui déterminent les moments aux extrémités au second ordre complet (CAM et Can K_{extr}^* alt 3).

Au niveau de la complexité des vérifications, nous remarquons que la difficulté est relativement similaire pour chaque méthode. La seule différence provient de la longueur de flambement prise en compte et du calcul du coefficient de moment équivalent en travée (C_m) plus précis (via modélisation d'une barre en une dizaine d'éléments finis) ou sécuritaire (formules de l' Eurocode3 pour barre bi-appuyée).

En regardant les scores obtenus, nous voyons qu'il est assez difficile de départager les méthodes Can et CAM. Nous remarquons un meilleur total pour les méthodes Can Lfl (alt 2) et Can K_{extr}^* (alt 3). En effet, la méthode Can Lfl (alt 2) possède une meilleure précision que la méthode Can L (alt 1). Cependant, la méthode Can Lfl (alt 2) peut être légèrement insécuritaire. Pour la méthode Can K_{extr}^* (alt 3), elle est presque aussi précise que la méthode CAM mais ne requiert l'évaluation que d'un seul coefficient d'amplification (K_{extr}^*) par extrémité alors que la méthode CAM en requiert deux (K_{extr}^* et K_{extr}).

4 Conclusions et recommandations

Pour finir, nous présentons les conclusions et recommandations pour l'ingénieur calculateur :

- Méthode de l'Eurocode au premier ordre à nœuds mobiles
Méthode d'analyse et de vérification simple qui permet de réaliser un pré-dimensionnement sécuritaire dans son domaine d'application (instabilité simultanée des colonnes d'un étage, pas d'effet de rappel). Ce domaine d'application est assez restreint. Au niveau de la ruine aux extrémités, il faut impérativement modifier le facteur forfaitaire multiplicatif des moments d'extrémités (1.2) qui est trop sécuritaire pour des multiplicateurs critiques élevés ($\lambda_{cr} \geq 7$) et insécuritaire pour des multiplicateurs critiques faibles ($\lambda_{cr} \leq 5$).
- Méthode Can L (alt 1)
Méthode assez simple également qui permet de réaliser un pré-dimensionnement en étant sécuritaire. En effet, pour chaque barre nous ne devons pas calculer de longueur de flambement. Cette erreur sécuritaire augmente d'autant plus que la longueur de flambement est petite vis-à-vis de la longueur d'épure.
- Méthode Can Lfl (alt 2)
Méthode qui permet de réaliser un dimensionnement assez précis d'une structure. La méthode est plus compliquée car nous devons calculer la longueur de flambement de chaque élément. La précision de la méthode peut être légèrement insécuritaire (0 à –

5%) pour des multiplicateurs critiques élevés car l'évaluation des moments d'extrémités au second ordre global peut être sous-évaluée.

- Méthode Can K_{extr}^* (alt 3)

Méthode plus complexe car nous devons calculer pour chaque barre les coefficients d'amplification d'extrémité (K_{extr}^*). Ces coefficients nécessitent notamment l'évaluation de la raideur de la restrainte (C) à chaque extrémité de la barre . Cependant, cette méthode possède une bonne précision, même pour des multiplicateurs critiques faibles. Elle peut être utilisée pour un dimensionnement assez fin. Si cette méthode est implémentée sur un logiciel qui réalise des analyses élastiques au premier ordre (OSSA2D par exemple), elle pourrait être fort intéressante.

- Méthode CAM

Méthode encore plus complexe que la précédente tout en étant un peu plus précise. Personnellement, elle est à éviter car la détermination des moments d'extrémités est trop complexe. En effet, pour chaque barre, nous devons déterminer les coefficients d'amplification d'extrémités (K_{extr}^* et K_{extr}). Ces coefficients nécessitent notamment l'évaluation de la raideur de la restrainte à chaque extrémité (C) ainsi que la raideur du ressort (K).

- Méthode aux éléments finis

Cette méthode modélise le comportement réel de la structure lorsqu'elle tient compte de l'ensemble des non-linéarités (géométrique et matérielle). Contrairement aux autres méthodes, nous devons réaliser autant d'analyses que de combinaisons de cas de charges. De plus, l'utilisation d'un logiciel aux éléments finis requiert des précautions particulières afin de les manipuler correctement. Il est donc intéressant de les utiliser pour des structures spéciales et complexes en vue de valider les résultats d'une méthode plus traditionnelle.

Pour finir, dans ce dernier paragraphe, vous retrouverez mes recommandations personnelles. Pour un pré-dimensionnement ou dimensionnement, j'utiliserais la méthode Can Lfl (alt 2) avec une longueur de flambement intermédiaire située entre la longueur de flambement à nœuds fixes et la longueur d'épure et ceci, afin d'être sécuritaire. Pour un dimensionnement au plus juste, j'utiliserais la méthode Can K_{extr}^* (alt 3) et si cette dernière est implémentée dans un logiciel, elle pourrait être très intéressante et supplanter la précédente.

Conclusions et perspectives

Notre intérêt s'est d'abord porté sur les différentes méthodes d'analyse et vérifications associées existantes pour dimensionner une structure. Nous avons mis en évidence l'utilité de réaliser une analyse élastique linéaire (1^{er} ordre) afin de bénéficier du principe de superposition. De fait, ce principe nous permet de réduire considérablement le nombre d'analyses à réaliser.

Cependant, soucieux de dimensionner des structures sensibles au effet du second ordre global ($\lambda_{cr} < 10$ selon le critère de l'Eurocode 3), nous nous sommes rapidement orientés vers deux types de méthodes. Pour l'ensemble des méthodes étudiées, nous intégrons l'imperfection globale au niveau de l'analyse et l'imperfection locale lors de la vérification de la stabilité des barres en travée.

La première catégorie de méthodes se base sur une analyse élastique approchée au second ordre afin de déterminer les moments d'extrémités au second ordre global (méthode Can L(alt1) et Can Lfl(alt2)) ou complet (Can K_{extr}^* (alt3) et CAM). Ces moments d'extrémités sont calculés en recombinaison des résultats des analyses élastiques au premier ordre pour une structure « sway » (à nœuds mobiles) et « non-sway » (à nœuds fixes). Lors de la recombinaison de ces différents moments d'extrémités « sway » (M_S) et « non-sway » (M_{NS}), nous les multiplions par des facteurs d'amplification liés au second ordre global ($1/(1-\lambda_{cr})$) et pour certaines méthodes (Can K_{extr}^* (alt3) et CAM), liés second ordre local (K_{extr}^* et K_{extr}). Ensuite, les moments aux extrémités étant définis, nous vérifions la résistance des sections d'extrémités. Pour finir, nous vérifions la stabilité des barres en déterminant notamment le moment maximal en travée amplifié (lié aux charges transversales et aux moments d'extrémités). A nouveau, ce moment maximal est obtenu en utilisant un coefficient d'amplification de moment en travée $\left(\frac{C_{m,travée}}{(1-N_{Ed}/N_{cr})}\right)$ qui inclut l'effet P- δ .

La grande difficulté dans cette première catégorie de méthodes est de calculer les coefficients d'amplification (K_{extr}^* et K_{extr}). En effet, la détermination de ces coefficients nécessitent d'isoler la barre de la structure en créant des modèles équivalents (chapitre 4). Cette extraction de barre nécessite notamment de modéliser les liaisons que l'élément a avec les autres éléments de la structure par le biais de restraints (C) et de ressort (K). Ces caractéristiques (C et K) liées à la géométrie de la structure attenante à la barre, doivent être tout d'abord calculées avant de pouvoir déterminer les coefficients d'amplification (K_{extr}^* et K_{extr}). En plus, ces derniers dépendent du chargement appliqué (aux extrémités et en travée). Ces facteurs doivent donc être déterminés pour chaque barre à analyser et pour chaque cas de charges étudié.

La deuxième catégorie, qui n'est en fait constituée que d'une seule méthode, se base sur une analyse élastique au premier ordre de la structure. Ensuite, lors des vérifications, cette méthode amplifie l'ensemble des moments de l'analyse afin d'intégrer les effets du second ordre en utilisant notamment les longueurs de flambement à nœuds mobiles. Cette méthode est assez particulière car elle vérifie les colonnes isolément. De fait, elle considère que le multiplicateur critique global de la structure (λ_{cr}) est égal au multiplicateur critique local (N_{cr}/N_{Ed}) de la barre (calculé sur base des longueurs de flambement à nœuds mobiles). En réalité, si une colonne d'un portique multi-travées commence à être instable avant les autres, il y a un transfert de charge de cette colonne (qui perd de sa raideur) vers les autres colonnes du portique. Ce phénomène, que nous nommons effort de rappel, permet de soulager la colonne trop sollicitée et d'éviter ainsi une ruine prématurée de celle-ci. Lorsque cet effet de rappel apparaît dans une structure, cette méthode est beaucoup trop sécuritaire car elle ne considère pas les interactions possibles entre les colonnes.

Pour l'ensemble des méthodes étudiées, une difficulté réside également dans le calcul des coefficients de moment équivalent en travée ($C_{m,travée}$) qui interviennent au niveau de l'amplification de moment en travée ($\frac{C_{m,travée}}{(1-N_{Ed}/N_{cr})}$). Cependant, cette difficulté est moindre comparée au calcul de K_{extr}^* et K_{extr} .

Dans un premier temps, nous avons donc développé les formules analytiques pour déterminer les coefficients d'amplification (K_{extr}^* et K_{extr}) dans tout une série de cas particuliers. Ce travail a déjà été réalisé en grande partie dans deux mémoires précédents (référence [6] et [9]). Ensuite, nous avons déterminé les systèmes d'équations à résoudre pour calculer ces coefficients d'amplification (K_{extr}^* et K_{extr}) de la manière la plus générale possible et pour tous types de chargement.

Dans un second temps, nous avons validé l'analyse de la méthode CAM (qui utilise les (K_{extr}^* et K_{extr})) en comparant les moments d'extrémités obtenus aux moments d'extrémités provenant d'une analyse élastique au second ordre complet (logiciel numérique). Les erreurs obtenues étant tout à fait acceptables (maximum d'environ 5% pour un multiplicateur critique faible), nous avons validé la méthode d'analyse.

Ensuite, nous avons résumé de manière théorique la partie analyse et puis, nous avons déterminé la partie vérification associée à chaque méthode (1^{er} et 2^{ème} catégories). Nous avons également essayé d'explicitier au mieux chaque terme présent dans les équations de vérifications (résistance des sections d'extrémités et stabilité des barres en travée) afin de bien en comprendre le sens physique. Pour finir, nous avons réalisé un tableau récapitulatif pour l'ensemble du processus analyse-vérification des méthodes étudiées afin d'avoir une vue d'ensemble.

Par la suite, nous avons comparé l'ensemble du processus d'analyse-vérifications pour chaque méthode étudiée en déterminant le multiplicateur de ruine (λ_u) sur deux

exemples de portiques (le premier avec un chargement vertical classique et le second avec en plus une charge horizontale ponctuelle). Avec le premier exemple, nous avons favorisé la rupture en section d'extrémité et, avec le second la rupture en travée ce qui nous a permis de distinguer les méthodes sur les deux types de vérifications. En utilisant des portiques à géométries variables, nous avons également pu mettre en évidence l'influence des effets P- δ sur les moments d'extrémités.

Cette étude de portiques a montré que la méthode Eurocode (1^{er} ordre à nœuds mobiles) est beaucoup trop sécuritaire (15 à 40 %) lorsqu'un effort de rappel apparaît.

Pour les autres méthodes utilisant les moments au second ordre global (pas d'utilisation des coefficients (K_{extr}^* et K_{extr})), nous avons d'assez bons résultats avec la méthode Can L(alt1) qui est souvent trop sécuritaire (5-10%) et la méthode Can Lfl(alt2) qui a une bonne précision (2 % à -5 %) mais qui a tendance à être un peu insécuritaire.

Pour méthodes déterminant les moments au second ordre complet (utilisation des coefficients (K_{extr}^* et K_{extr})), nous avons une précision qui est très bonne (surtout quand la ruine se produit en travée (0 à 2 %)) avec la méthode Can K_{extr}^* (alt3) et CAM. Les résultats de ces deux méthodes sont très proches mais la complexité est moindre avec la méthode Can K_{extr}^* (alt3) qui ne nécessite l'évaluation que d'un coefficient d'amplification (K_{extr}^*) au lieu de deux (K_{extr}^* et K_{extr}) pour la méthode CAM. Cette dernière est légèrement plus précise.

Nous avons également mis en exergue que le calcul des coefficients de moment équivalent en travée via les formules de l'Eurocode 3 pour une barre bi-rotulée sont sécuritaires. En modélisant simplement une barre avec une dizaine d'éléments et les mêmes conditions d'appuis et de chargement (que pour la méthode Eurocode), nous pouvions encore gagner quelques pourcents sur ce calcul de coefficients de moment équivalent en travée.

Dans le dernier chapitre, nous avons comparé l'ensemble des méthodes sur base de leur précision, domaine d'applicabilité et complexité de mise en œuvre (au niveau de la partie analyse et vérifications) afin d'essayer de déterminer la où les méthodes qui ressortent du lot. Au final, nous remarquons que la précision est fortement liée à la complexité de mise en œuvre de la méthode. Il est donc difficile de les distinguer.

Cependant, afin de nous positionner, nous retenons une méthode qui serait un compromis entre la méthode Can L (alt1) et la méthode Can L_{fl} (alt2) en définissant une longueur de flambement intermédiaire entre la longueur d'épure et la longueur de flambement à nœuds fixes. Cette méthode qui peut sembler particulière permettrait d'avoir une bonne précision tout en alliant sécurité. Pour avoir un dimensionnement au plus juste, nous pouvons également utiliser la méthode Can K_{extr}^* (alt3) et pour des structures particulières ou très complexes, nous sommes parfois obligés de passer à un programme numérique aux éléments finis.

Une autre solution est d'essayer d'implémenter la méthode Can K_{extr}^* (alt3). En effet, la difficulté de cette méthode vient du calcul du coefficient K_{extr}^* . La détermination via des formules analytiques de ces coefficients est très lourde mais en réalité, il ne s'agit que de résoudre deux systèmes de deux équations à deux inconnues pour déterminer les K_{extr}^* à chaque extrémité de la barre. Numériquement, la résolution de ces systèmes ne pose pas de problème et de plus, la méthode est assez systématique.

Au niveau de la méthode CAM, nous sommes arrivés au bout de son développement, notamment via les coefficients K_{extr}^* et K_{extr} . Les seules approximations, que nous avons faites, sont d'utiliser l'effort normal au premier ordre et de supposer que la raideur des contraintes (C) et (K) sont constantes quel que soit le chargement. En effet, la raideur de ces paramètres diminue lorsque l'effort de compression devient important dans les éléments. Cependant, au vu de la précision des résultats, intégrer ces différents aspects dans le modèle ne ferait qu'alourdir encore plus le calcul des coefficients K_{extr}^* et K_{extr} pour un gain de précision minime.

Par manque de temps, nous n'avons pu vérifier une structure complète, structure avec des cas de charges réelles en appliquant les différentes méthodes pour la vérification des colonnes. Cet exemple nous aurait permis notamment de voir si les effets P- δ sont réellement importants sur la détermination des moments d'extrémités et donc de mesurer l'utilité réelle des coefficients K_{extr}^* et K_{extr} . De plus, depuis le début, nous ne travaillons que dans le plan et il serait également intéressant d'appliquer les méthodes d'analyse et vérifications dans l'espace incluant notamment les instabilités hors plan (flambement selon l'axe faible et le déversement).

Pour conclure, l'étude de la stabilité est un domaine passionnant mais très complexe. Il nécessite un bon sens physique afin de bien comprendre l'ensemble des phénomènes et leurs interactions.

Bibliographie

- [1] Eurocode 3 – Calcul des structures en acier
Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments
EN 1993-1-1 :2005
- [2] J.P. Jaspart
Constructions métalliques et mixtes II, note de cours
Département ArGENCo – Université de Liège
- [3] SCI (Steel Construction Institute)
In-plane Stability of Portal Frames to BS 5950-1:2000
2001
- [4] J.M. Franssen
Mécanique des structures, note de cours
Département ArGENCo – Université de Liège
- [5] C. Pertersen
Statik und stabilität der baukonstruktionen
Munchen,1992
- [6] T. Hansoulle
Vérification de la résistance et de la stabilité des éléments comprimés et fléchis en construction métallique. Passage d'un élément de structure à un élément isolé équivalent.
Travail de fin d'études – Université de Liège, 2006
- [7] R.M. Maquoi , J.P. Jaspart
Cours de constructions métalliques et en béton (partie Constructions Métalliques), notes de cours
Département ArGENCo – Université de Liège

- [8] ECCS Technical commity 8 – Stability
Rules for Member Stability in EN 1993-1-1 – Background documentation and design guidelines
Seven draft - 2006
- [9] P. Lomba
Vérification de la résistance et de la stabilité des éléments comprimés et fléchis en construction métallique. Définition d'éléments isolés équivalents aux éléments structuraux réels à vérifier.
Travail de fin d'études – Université de Liège, 2005
- [10] Eurocode 3 – Calcul des structures en acier
Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments
ENV 1993-1-1 :1992
- [11] T. Hansoulle , N. Boissonnade , R.Gonçalves , D. Camotin , J.P. Jaspart
Design of beam-columns in steel sway frames : from the actual member to a simply supported equivalent one.
SSRC Annual Technical Session & Metting, 2007
- [12] N. Boissonnade , R.Gonçalves , D. Camotin , J.P. Jaspart
A new method for the analysis and design of steel sway frames
Article scientifique, 2008

Annexes

Annexe A – Application de la méthode des rotations sur un portique simple

Nous allons expliciter les différentes équations pour déterminer les efforts au premier ordre et au second ordre complet d'un portique à un étage, une travée et rotulé en base

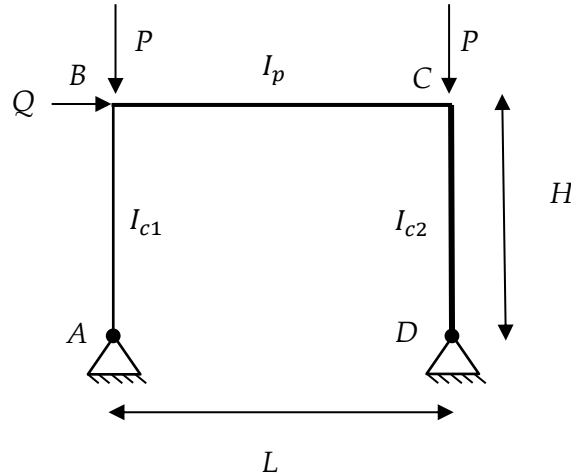


Figure A.1 – Portique simple rotulé en base

La présence d'aucune charge transversale en travée des éléments induit des moments d'encastrement nuls.

- Premier ordre

$$\begin{aligned}
 M_{A_{AB}} &= R_{c1} (2. \phi_A + \phi_B - 3\psi) = 0 \\
 M_{B_{AB}} &= R_{c1} (2. \phi_B + \phi_A - 3\psi) \\
 M_{B_{BC}} &= R_p (2. \phi_B + \phi_C) \\
 M_{C_{BC}} &= R_p (2. \phi_C + \phi_B) \\
 M_{C_{CD}} &= R_{c2} (2. \phi_C + \phi_D - 3\psi) \\
 M_{D_{CD}} &= R_{c2} (2. \phi_D + \phi_C - 3\psi) = 0 \\
 \frac{M_B + M_A + M_C + M_D}{H} &= Q
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

En réalisant l'équilibre à chaque nœud ($M_{B_{AB}} + M_{B_{BC}} = 0$ et $M_{C_{BC}} + M_{C_{CD}} = 0$), nous sommes bien en présence d'un système à 5 équations avec 5 inconnues ($\phi_A, \phi_B, \phi_C, \phi_D$ et ψ).

A noter qu'il est également possible de présenter le système d'équations sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} 2R_{c1} & R_{c1} & -3R_{c1} & 0 & 0 \\ R_{c1} & 2(R_{c1} + R_p) & -3R_{c1} & R_p & 0 \\ R_{c1} & 2R_{c1} & -3(R_{c1} + R_{c2}) + 2P.H & 2R_{c2} & R_{c2} \\ 0 & R_p & -3R_{c2} & 2(R_{c2} + R_p) & R_{c2} \\ 0 & 0 & -3R_{c2} & R_{c2} & 2R_{c2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \psi \\ \phi_C \\ \phi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q.H \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

- Second ordre complet

$$\begin{aligned} M_{AAB} &= R_{c1} (\alpha_{c1} \cdot \phi_A + \beta_{c1} \cdot \phi_B - (\alpha + \beta) \cdot \psi) = 0 \\ M_{BAB} &= R_{c1} (\alpha_{c1} \cdot \phi_B + \beta_{c1} \cdot \phi_A - (\alpha + \beta) \cdot \psi) \\ M_{BBC} &= R_p (\alpha_p \cdot \phi_B + \beta_p \cdot \phi_C) \\ M_{CBC} &= R_p (\alpha_p \cdot \phi_C + \beta_p \cdot \phi_B) \\ M_{CCD} &= R_{c2} (\alpha_{c2} \cdot \phi_C + \beta_{c2} \cdot \phi_D - (\alpha_{c2} + \beta_{c2}) \cdot \psi) \\ M_{DCD} &= R_{c2} (\alpha_{c2} \cdot \phi_D + \beta_{c2} \cdot \phi_C - (\alpha_{c2} + \beta_{c2}) \cdot \psi) = 0 \\ \frac{M_A + M_B + M_C + M_D}{H} &= -(Q + 2P \cdot \psi) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Sous forme matricielle, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \alpha_{c1}R_{c1} & \beta_{c1}R_{c1} & -(\alpha_{c1} + \beta_{c1})R_{c1} & 0 & 0 \\ \beta_{c1}R_{c1} & \alpha_{c1}R_{c1} + \alpha_p R_p & -(\alpha_{c1} + \beta_{c1})R_{c1} & \beta_p R_p & 0 \\ \beta_{c1}R_{c1} & \alpha_{c1}R_{c1} & -(\alpha_{c1} + \beta_{c1})R_{c1} - (\alpha_{c2} + \beta_{c2})R_{c2} + 2P.H & \alpha_{c2}R_{c2} & \beta_{c2}R_{c2} \\ 0 & \beta_p R_p & -(\alpha_{c2} + \beta_{c2})R_{c2} & \alpha_{c2}R_{c2} + \alpha_p R_p & \beta_{c2}R_{c2} \\ 0 & 0 & -(\alpha_{c2} + \beta_{c2})R_{c2} & \beta_{c2}R_{c2} & \alpha_{c2}R_{c2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \psi \\ \phi_C \\ \phi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q.H \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Annexe B – Efforts dans les structure « sway » et « non sway » – Méthode CAM

1 Analyse portique « non sway »

Les unités utilisées sur la valeur de diagrammes sont le kN.m pour le moment, le kN pour l'effort normal et l'effort tranchant et le m pour la déformée.

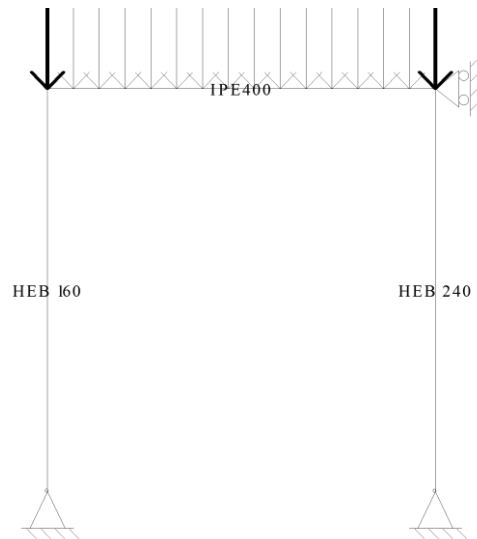


Figure B.1 - Chargement gravitaire de la structure à noeuds fixes (non sway)

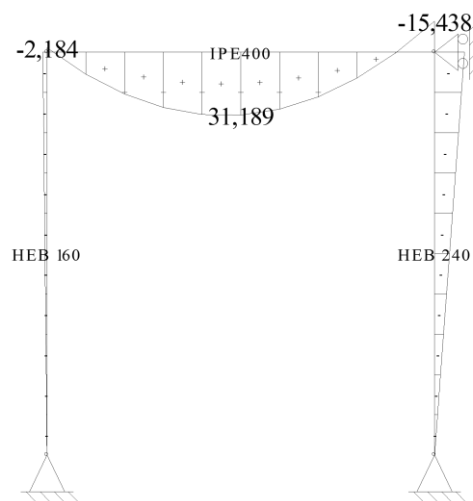


Figure B.2 - Diagramme de moment sous chargement gravitaire de la structure à noeuds fixes

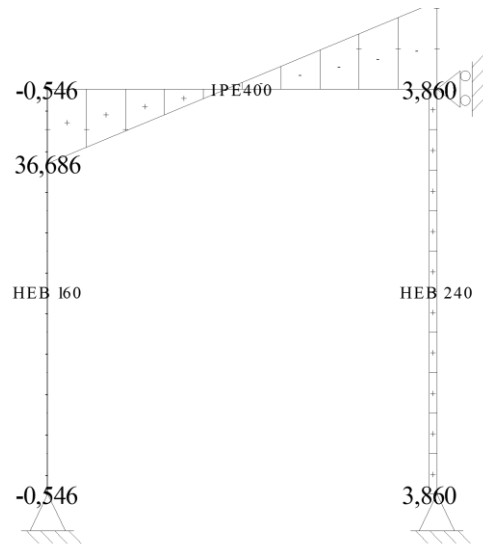


Figure B.3 - Diagramme d'effort tranchant sous chargement gravitaire de la structure à nœuds fixes

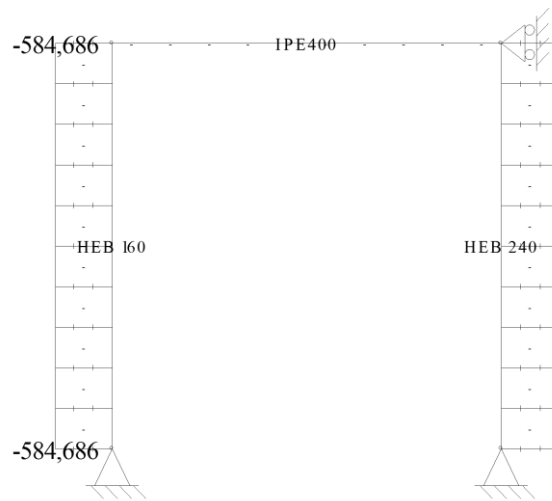


Figure B.4 - Diagramme de l'effort normal sous chargement gravitaire de la structure à nœuds fixes

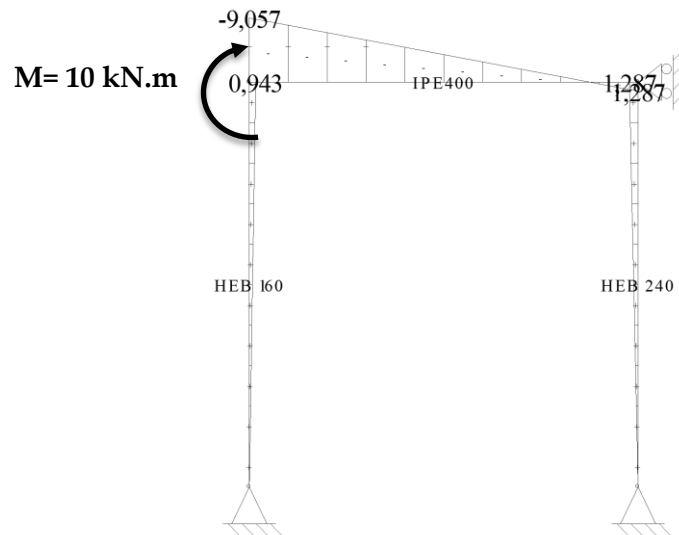


Figure B.5 - Diagramme de l'effort normal sous chargement gravitaire de la structure à nœuds fixes

2 Analyse portique « sway »

Les unités utilisées sur la valeur de diagrammes sont le kN.m pour le moment, le kN pour l'effort normal et l'effort tranchant et le m pour la déformée.

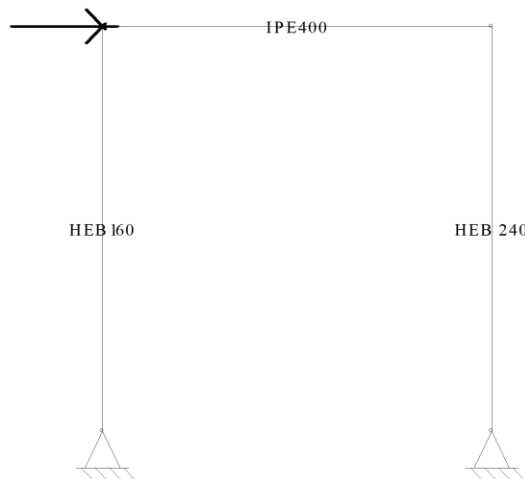


Figure B.6 - Chargement horizontal de la structure à nœuds mobiles (sway)

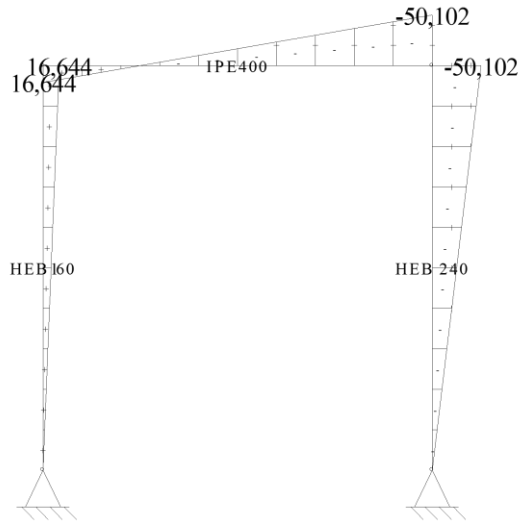


Figure B.7 - Diagramme de moment sous chargement horizontal de la structure à nœuds mobiles

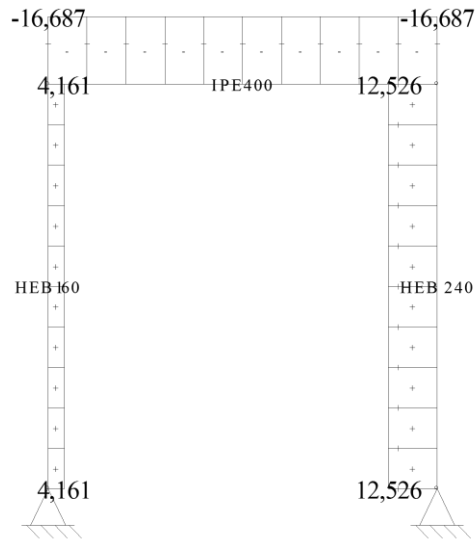


Figure B.8- Diagramme d'effort tranchant sous chargement horizontal de la structure à nœuds mobiles

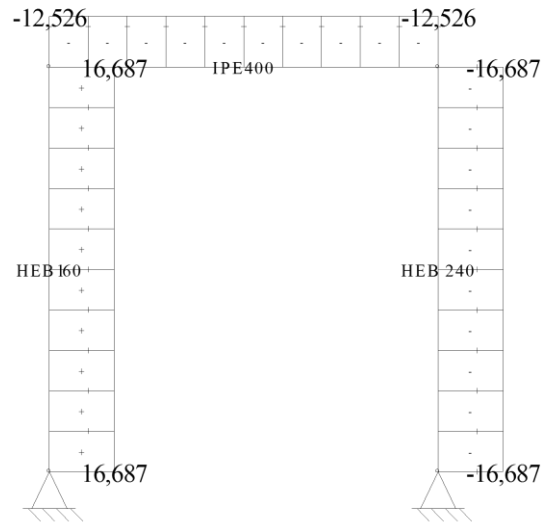


Figure B.9 - Diagramme d'effort normal sous chargement horizontal de la structure à nœuds mobiles

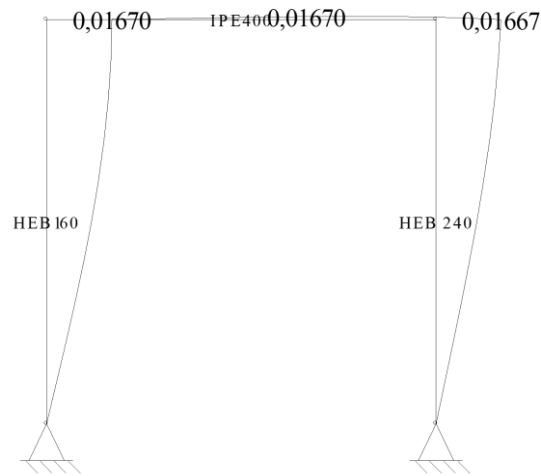
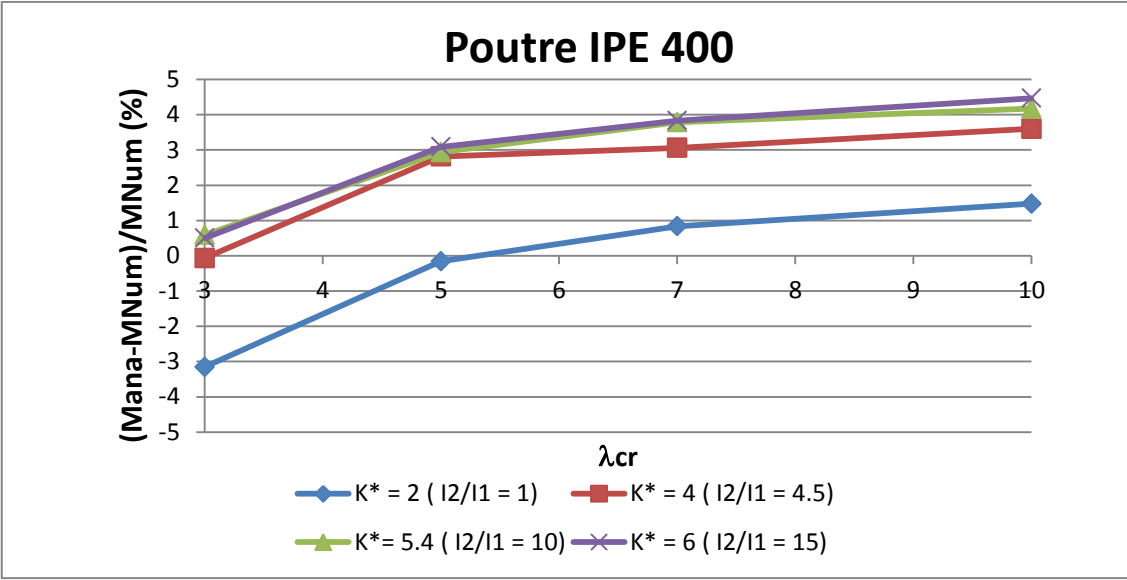


Figure B.10 - Déformée sous chargement horizontal de la structure à nœuds mobiles

Annexe C – Comparaison des efforts de la méthode CAM au second ordre complet par rapport aux résultats d'OSSA2D

1 Avec le calcul du multiplicateur critique proposé par l'Eurocode 3



Figur C.1 - Erreur du moment analytique par rapport au moment numérique (OSSA2D) avec multiplicateur critique global calculé selon l'Eurocode

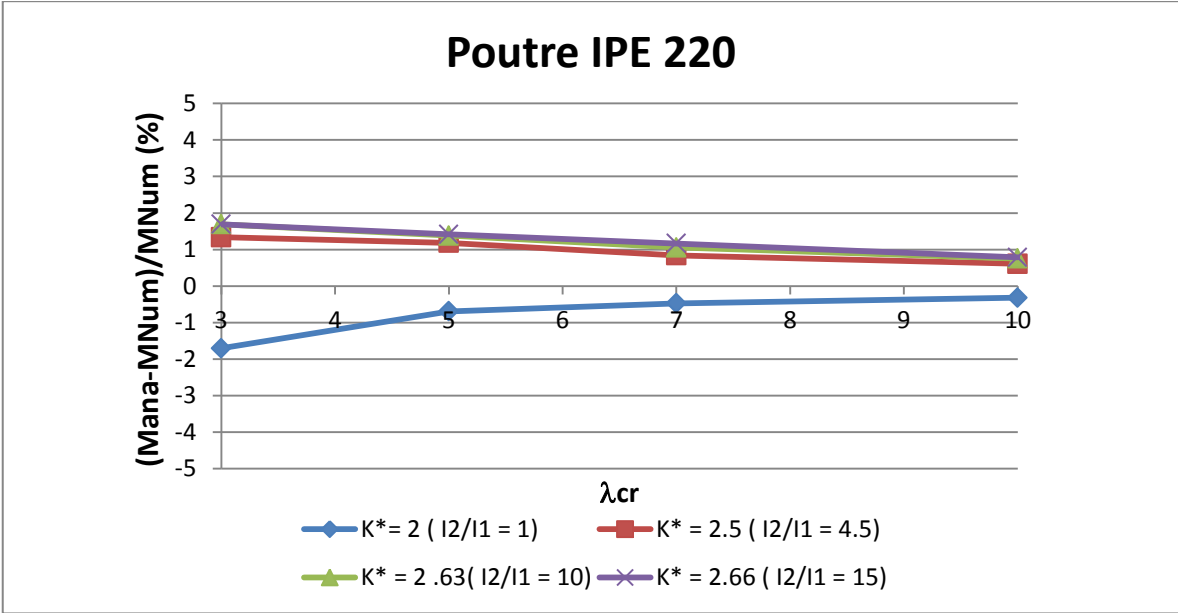


Figure C.2- Erreur du moment analytique par rapport au moment numérique (OSSA2D) avec multiplicateur critique global calculé selon l'Eurocode

2 Avec le multiplicateur critique de FINELG

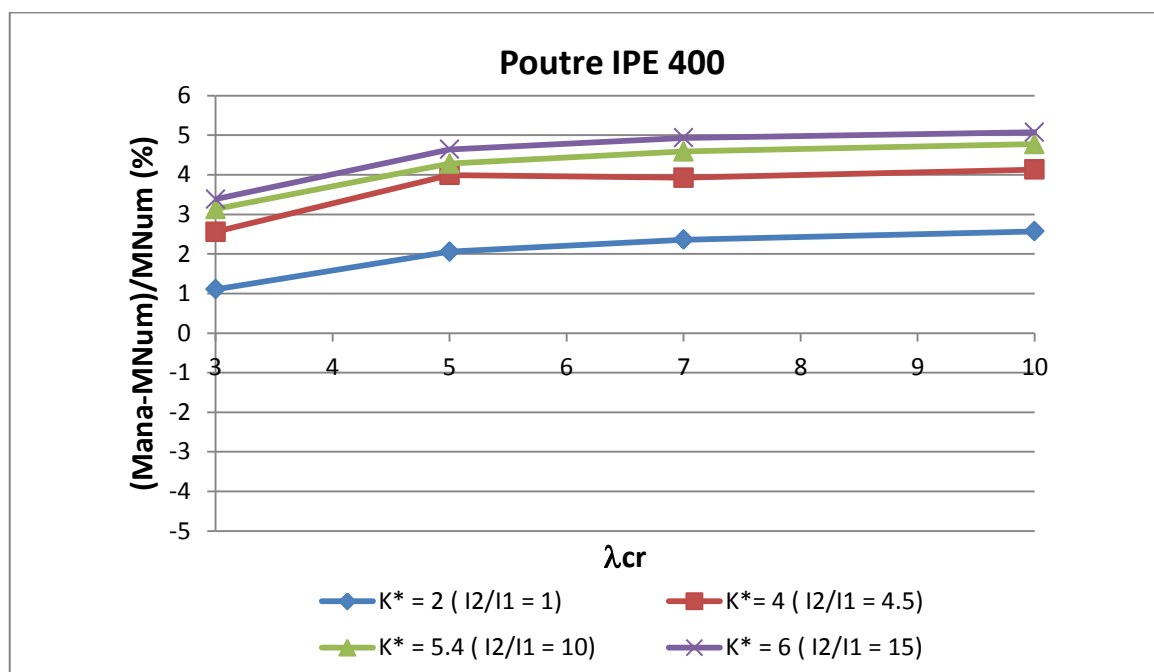


Figure C.3 - Erreur du moment analytique par rapport au moment numérique (OSSA2D) avec multiplicateur critique global de FINELG

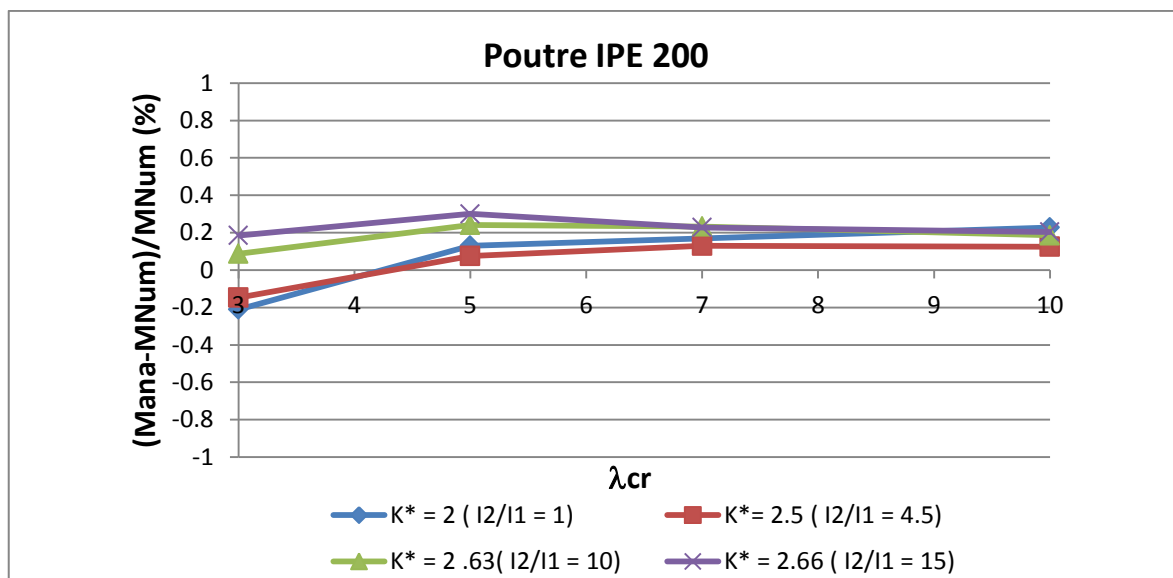


Figure C.4 - Erreur du moment analytique par rapport au moment numérique (OSSA2D) avec multiplicateur critique global de FINELG

Annexe D - Formule de vérification de stabilité de barre à mi-travée

Le développement qui suit provient en grande partie de la **référence** [7] .

Nous supposons un élément bi-rotulé de longueur L qui est comprimé et fléchi selon son axe fort. Cet élément possède une déformée sinusoïdale avec une amplitude maximale à mi-travée ($e_{0,d}$ = excentricité). Nous allons vérifier la stabilité/résistance de cet élément à mi-travée selon l'axe fort en supposant que les instabilités hors plan sont négligées (pas de déversement , ni de flambement selon l'axe faible).

Lorsque nous vérifions la résistance en section plastique de cette élément au premier ordre, nous devons tenir compte de l'effort normal (N_{Ed}), de l'effort tranchant (V_{Ed}) et du moment lié aux sollicitations ($M_{Ed,y}$) mais aussi du moment supplémentaire lié à l'excentricité initial ($N_{Ed} \cdot e_{0,d}$).

Pour rappel, l'effort tranchant est pris en compte au niveau du moment résistant de section plastique ($M_{pl,rd}$) . De plus, vu que nous utilisons un critère plastique et que la section est comprimée et fléchi selon l'axe y, nous devons tenir compte du facteur d'interaction plastique M-N (C_{yy}).

Au premier ordre, le critère de résistance plastique à mi-travée est :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{pl,rd}} + \frac{M_{Ed,y} + N_{Ed} \cdot e_{0,d}}{C_{yy} \cdot M_{pl,rd,y}} \leq 1 \quad (\text{D.1})$$

Afin d'inclure les effets du second ordre local (effet (P- δ)), nous devons amplifier les moments à mi-travée en utilisant le facteur d'amplification $\left(\frac{C_m}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}} \right)$ étant donné que nous sommes à mi-travée et que l'élément est bi-rotulé. Nous avons donc le critère suivant :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{pl,rd}} + \left(\frac{C_m}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \right) \frac{(M_{Ed,y} + N_{Ed} \cdot e_{0,d})}{C_{yy} \cdot M_{pl,rd,y}} \leq 1 \quad (\text{D.2})$$

L'allure de la déformée étant sinusoïdale, le C_m pour le moment supplémentaire ($N_{Ed} \cdot e_{0,d}$) vaut 1. Nous avons donc :

$$\frac{N_{Ed}}{N_{pl,rd}} + \frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \frac{(C_m \cdot M_{Ed,y} + N_{Ed} \cdot e_{0,d})}{C_{yy} \cdot M_{pl,rd,y}} \leq 1 \quad (\text{D.3})$$

Afin de déterminer l'excentricité $e_{0,d}$, nous nous mettons dans le cas particulier tel que ($M_{Ed} = 0$). La poutre n'étant sollicitée que par un effort normal, nous devrions obtenir comme résultat pour la formule (D.3) :

$$N_{Ed} = \chi_y \cdot N_{pl,rd} \quad (\text{D.4})$$

En ajoutant l'équation (D.4) dans l'équation (D.3), nous obtenons :

$$\frac{\chi_y \cdot N_{pl,rd}}{N_{pl,rd}} + \frac{1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} \frac{\chi_y \cdot N_{pl,rd} \cdot e_{o,d}}{C_{yy} \cdot M_{pl,rd,y}} \leq 1 \quad (\text{D.5})$$

Nous pouvons isoler $e_{o,d}$ et nous obtenons

$$e_{o,d} = (1 - \chi_y) \left(1 - \frac{\chi_y N_{pl,rd}}{N_{cr,y}} \right) \cdot \frac{C_{yy} \cdot M_{pl,rd,y}}{\chi_y \cdot N_{pl,rd}} \quad (\text{D.6})$$

En réintégrant l'équation (D.6) dans l'équation (D.3), nous obtenons , après développement :

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \cdot N_{pl,rd}} + \mu_y \frac{\frac{C_m}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}} M_{Ed}}{C_{yy} \cdot M_{pl,rd,y}}, y \leq 1$$

Avec

$$\mu_y = \frac{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}} \chi_y} \quad (\text{D.7})$$

Nous voyons donc bien au final qu'entre les équations (D.2) et (D.7). , le terme $N_{Ed} \cdot e_{o,d}$ a disparu au profit des termes χ_y et μ_y .

Annexe E – Position de la ruine et évolution du multiplicateur de charge en fonction du déplacement

1 Portique avec $I_2/I_1 = 1$ – IPE 400 et $\lambda_{cr} = 5$

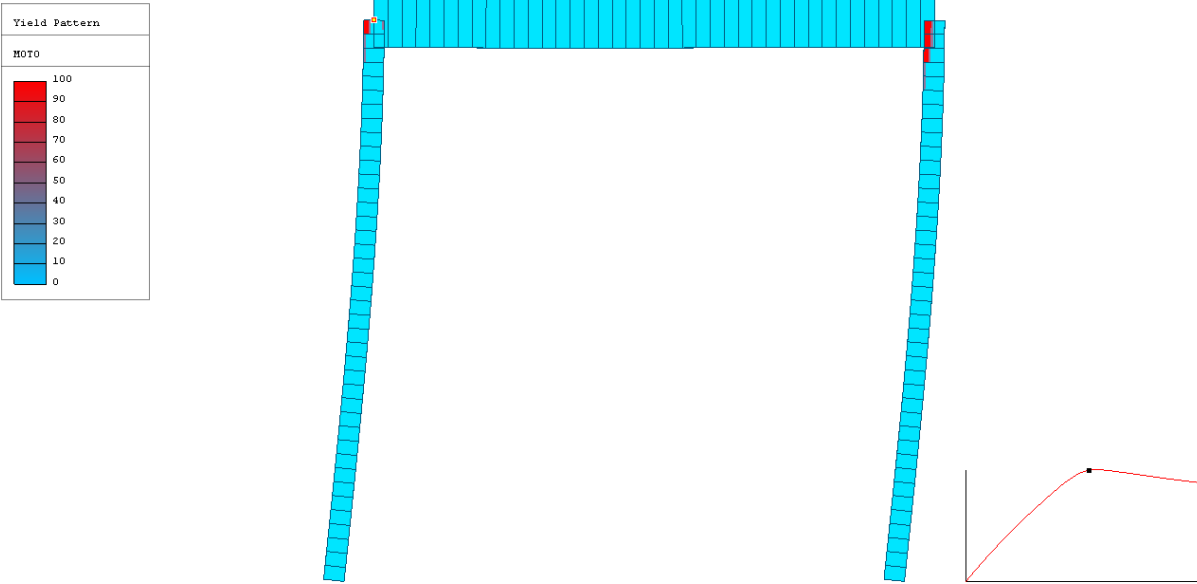


Figure E.1- Plastification de la structure au multiplicateur de ruine

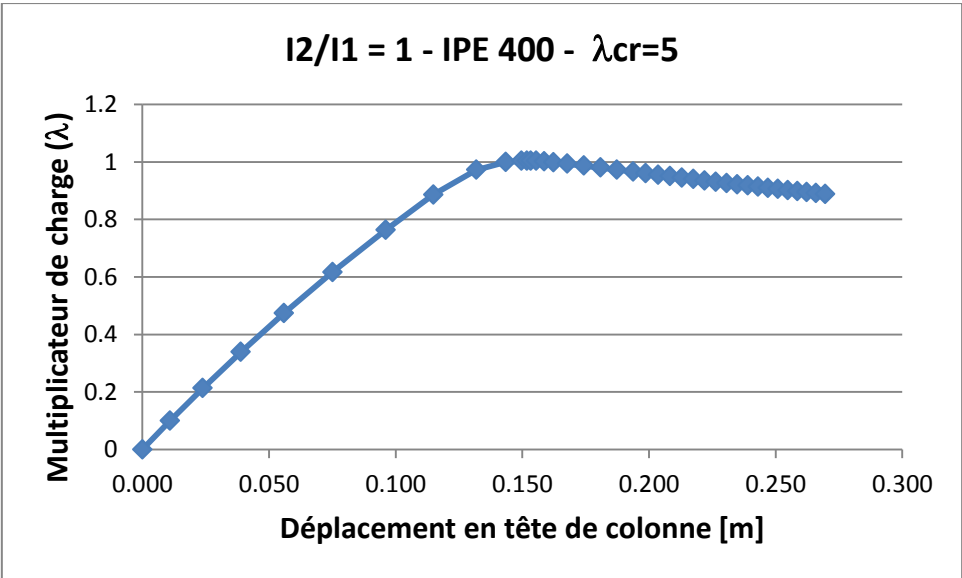


Figure E.2- Evolution du multiplicateur de charge en fonction du déplacement en tête de colonne

2 Portique avec $I_2/I_1 = 5$ – IPE 400 et $\lambda_{cr} = 5$

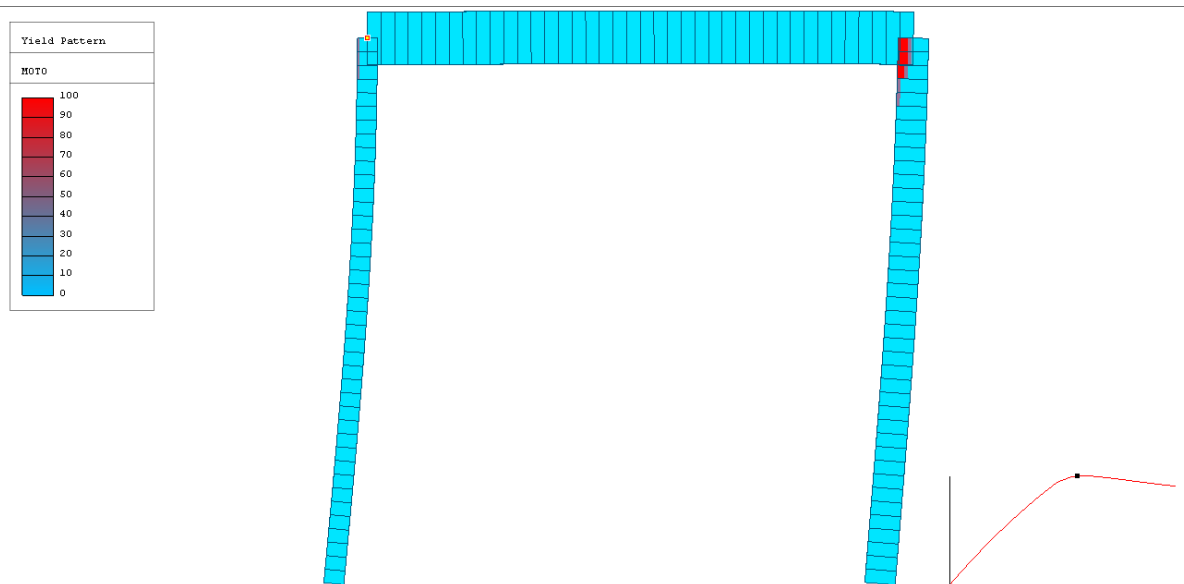


Figure E.3- Plastification de la structure au multiplicateur de ruine

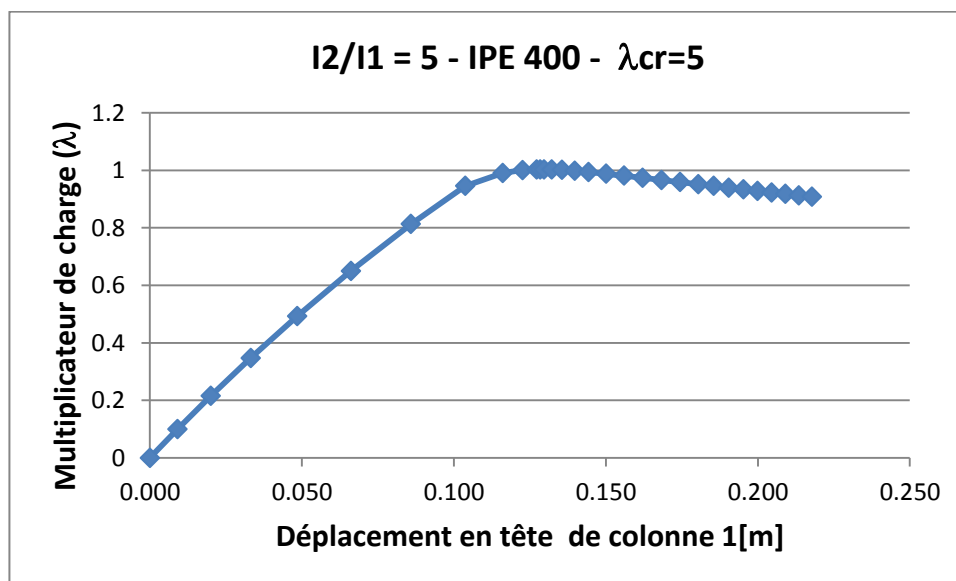


Figure E.4- Evolution du multiplicateur de charge en fonction du déplacement en tête de colonne

3 Portique avec $I_2/I_1 = 10$ – IPE 400 et $\lambda_{cr} = 5$

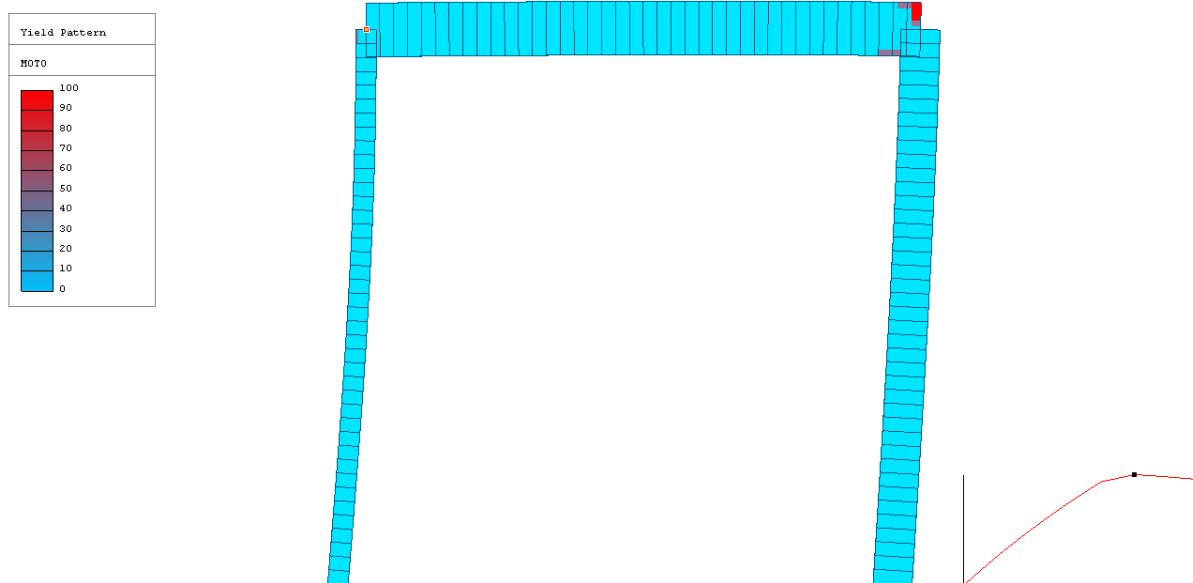


Figure E.5- Plastification de la structure au multiplicateur de ruine

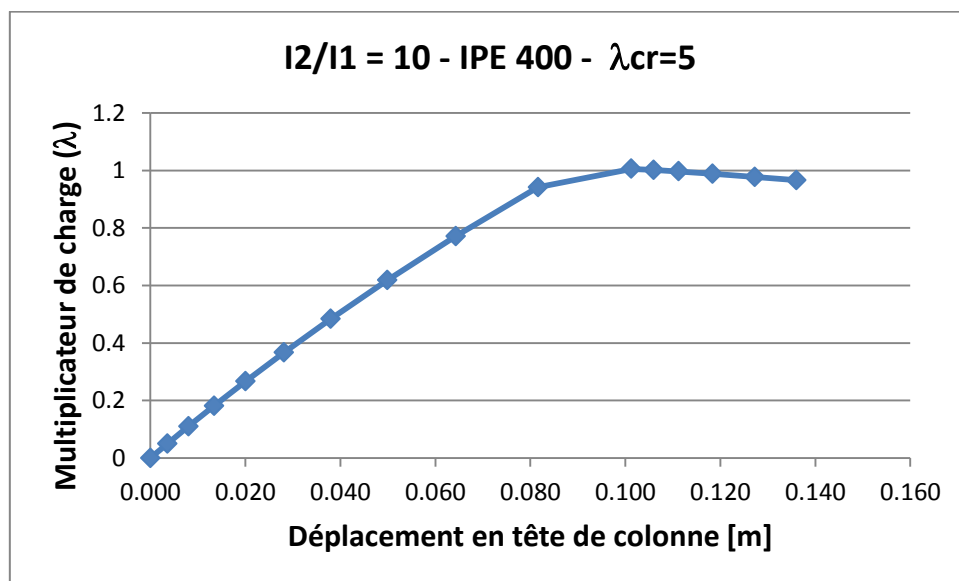


Figure E.6- Evolution du multiplicateur de charge en fonction du déplacement en tête de colonne