



UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

## Modélisation de bateaux à la dérive

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de Master  
Ingénieur Civil des Constructions par DAVID VANHAELE

Le jury :

PIROTTON M.

ARCHAMBEAU P.

ERPICUM S.

DENOËL V.

VANBELLINGHEN D.

Année académique 2013-2014

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de Master Ingénieur Civil  
des Constructions par VANHAELE DAVID

## Modélisation de bateaux à la dérive

L'objectif de ce travail est de caractériser le mouvement d'un corps flottant rigide non guidé, en l'occurrence un bateau capacitif (type péniche, barge ou container) assimilable à une boîte parallélépipédique, dérivant dans un écoulement dont les caractéristiques hydrodynamiques, hauteurs d'eau et débits spécifiques dans les deux directions horizontales, sont connues.

Un modèle de calcul à trois degrés de liberté, dans lequel la rétroaction du bateau sur l'écoulement n'est pas prise en compte, sera développé. Celui-ci sera complété par un module permettant de calculer l'enfoncement du bateau à chaque instant en fonction du champ de hauteur d'eau et des efforts appliqués. Cet enfoncement est supposé s'établir instantanément, de sorte que la dynamique de gîte, d'assiette et de translation verticale du bateau est négligée. Le modèle sera développé selon différentes approches qui diffèrent par le calcul des efforts appliqués sur la structure. Les équations du mouvement seront ensuite formulées en fonction de ces efforts, de manière à estimer translation et rotation au cours du temps.

Tout au long du travail, les approches seront comparées et validées à l'aide d'études issues de la littérature. Une étude approfondie du mouvement du bateau dans des champs hydrodynamiques de référence (écoulement uniforme, écoulement de masse, etc.) sera également menée. Des essais en laboratoire permettront la validation de l'approche en vue d'être exploitée pour des applications grandeur nature.

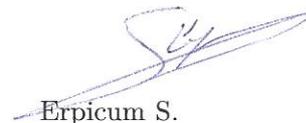
Une application en conditions réelles sera finalement modélisée de manière à tirer des conclusions concernant des positions, vitesses et orientations préférentielles d'impacts sur des éléments de cours d'eau.



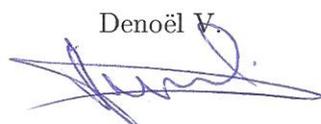
Pirotton M.



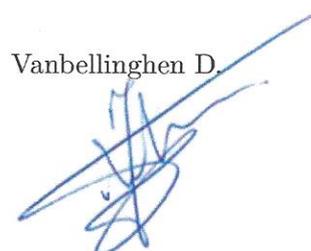
Archambeau P.



Erpicum S.



Denoël V.



Vanbellinghen D.

Dans le cadre du dimensionnement d'ouvrages hydrauliques aux sollicitations accidentelles, cette étude est menée avec l'objectif de prédire la trajectoire de bateaux capacitifs à la dérive, supposés rigides et parallélépipédiques. Dans cette optique, un modèle à trois degrés de liberté, traités de manière dynamique, est développé.

L'enfoncement instantané du bateau ainsi que les translations et rotation en dérive sont actualisés à chaque pas de temps respectivement via un équilibre statique et via une équation de mouvement résolue de manière explicite. Les efforts hydrodynamiques appliqués sur la structure sont calculés suivant deux approches : une approche moyennée sur l'ensemble de la structure et une approche locale par découpage du bateau en éléments, liée au caractère discret des données hydrodynamiques.

Des essais en laboratoire permettent de vérifier l'intégration dans le modèle de prédiction de phénomènes liés à l'inclinaison du bateau ou aux efforts hydrodynamiques. Une validation théorique est également menée sur le cas du calcul de l'effort de traînée d'une sphère. Le comportement du bateau est ensuite analysé dans des champs hydrodynamiques de référence, à savoir les vortex libre et forcé. L'attention est portée sur la présence d'orbites d'équilibre et sur la caractérisation du mouvement autour du centre du vortex.

Une application sur un bief de Meuse est finalement effectuée. L'influence du pas de discrétisation temporelle et la sensibilité d'ouvrages hydrauliques est appréhendée via la collecte de données liées aux impacts de bateaux : répartition spatiale, vitesses et inclinaisons.

As part of hydraulic structures design under accidental loads, a three dynamic degrees of freedom model is developed in order to predict the path of adrift tanker boats. The boats are assumed to be rigid and rectangular.

The instant draught of the vessel together with translations and drift rotation are updated at each time step, respectively via a static equilibrium and via an equation of motion solved explicitly. Hydrodynamic forces applied on the structure are calculated using two approaches : an averaged one across the structure and a local one based on the slicing of the vessel into surface-elements and related to the discrete hydrodynamic data.

Laboratory tests allow to verify the integration in the prediction model of phenomena related to inclination of the boat or to hydrodynamic forces. A theoretical validation is also conducted on the case of calculating the drag force of a sphere. The boat's behavior is then analyzed in hydrodynamic reference fields, namely the free and forced vortex. The study focuses on the presence of equilibrium orbits and characterization the motion around the center of the vortex.

An application to a reach of Meuse is finally conducted. The influence of temporal discretization and the sensitivity of hydraulic structures is approached via collection of data related to impacts of boats : spatial distribution, speeds and inclinations.

L'accomplissement de ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien précieux des camarades de deuxième master et des professeurs impliqués de près ou de loin sur le projet. Je tiens à les remercier vivement.

Je souhaite adresser une mention toute particulière à une personne qui m'est très chère et qui m'a sans cesse soutenu, encouragé et tiré vers le haut durant ces quatre derniers mois.

Merci Hélène.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Prospection bibliographique</b>	<b>3</b>
2.1	Dynamique du corps rigide . . . . .	3
2.2	Statique des structures flottantes . . . . .	4
2.3	Calcul des efforts hydrodynamiques : Résistance à l'avancement . . . . .	5
2.3.1	Hypothèses de calcul . . . . .	6
2.3.2	Approche expérimentale . . . . .	7
2.3.3	Approche semi-empirique . . . . .	8
2.3.4	Approche numérique . . . . .	11
2.4	Simulation en manœuvre . . . . .	12
2.5	Interaction fluide - structure : Concept de masse ajoutée . . . . .	13
2.6	Choix d'un modèle mathématique de prédiction . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Développement d'un modèle de calcul de trajectoire</b>	<b>16</b>
3.1	Données du problème . . . . .	16
3.2	Particularisation à trois degrés de liberté dynamiques . . . . .	19
3.2.1	Équation du mouvement . . . . .	20
3.3	Systèmes d'axes utilisés . . . . .	22
3.4	Calcul de l'enfoncement du bateau . . . . .	25
3.4.1	Méthode complète . . . . .	26
3.4.2	Méthode simplifiée . . . . .	31
3.4.3	Comparaison des méthodes de calcul d'enfoncement . . . . .	33
3.5	Résultante de pression hydrostatique . . . . .	35
3.6	Calcul des efforts hydrodynamiques. . . . .	39
3.6.1	Approche locale . . . . .	39
3.6.2	Approche moyennée . . . . .	43
3.7	Récapitulatif sur le développement du modèle de calcul . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Analyse et validation du modèle de calcul de trajectoire</b>	<b>49</b>
4.1	Validation expérimentale qualitative . . . . .	49
4.1.1	Essais en laboratoire . . . . .	49
4.1.2	Champ de vitesse uniforme . . . . .	54

4.1.3	Champs de vitesse frottants aux bords . . . . .	62
4.2	Validation théorique du modèle . . . . .	71
4.2.1	Cas de la traînée de la sphère . . . . .	71
4.2.2	Vortex forcé . . . . .	76
4.2.3	Vortex libre . . . . .	88
4.3	Conclusions sur les études de validation . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Application au cas d'un bief de Meuse</b>	<b>94</b>
5.1	Description du domaine . . . . .	94
5.1.1	Ouvrages et zones clés . . . . .	94
5.2	Étude de collision . . . . .	96
5.2.1	Influence du pas de temps . . . . .	96
5.2.2	Méthodologie de l'étude . . . . .	98
5.2.3	Tronçon à l'aval de Huy . . . . .	98
5.2.4	Tronçon à l'amont de Huy . . . . .	101
5.2.5	Conclusions sur l'étude de collision . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>105</b>
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>109</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Très tôt, l'Homme a compris l'importance stratégique que représentaient les voies hydrauliques. L'eau, en plus d'être essentielle d'un point de vue hygiène et consommation, constitue une alternative de transport viable et un moyen durable de récupération d'énergie. Il apparaît par conséquent naturel de maîtriser cette composante pour assurer le développement économique d'une communauté.

L'homme a, dans cette optique, multiplié les aménagements sur les cours d'eau de manière à faciliter les échanges de marchandises par voie fluviale et la production d'hydroélectricité. Une dimension inhérente à la mise en place de ces aménagements est d'assurer leur fonctionnement optimal et, par extension, leur viabilité économique et la sécurité des populations environnantes.

Ces ouvrages hydrauliques sont de différentes natures. Ils peuvent tout d'abord être consacrés à la protection contre les événements de crue. C'est le cas des murs de quais surélevés ou des barrages mobiles. Ces aménagements remplissent également un rôle important pour la navigation, respectivement par création d'espaces de stationnement et par garantie de tirant d'eau suffisant. Ils doivent évidemment être complétés par la mise en place de dispositifs de franchissement, tels des écluses ou des plans inclinés. Il existe ensuite des ouvrages dédiés principalement à une fonction de séparation ou de stationnement. Les moles d'approches des écluses et les ducs-d'Albe en font partie. Finalement, certaines constructions sans aucune utilité liée directement aux voies hydrauliques parsèment les cours d'eau, c'est le cas des piles de pont.

Indépendamment de leur influence sur les caractéristiques hydrodynamiques du cours d'eau, le fonctionnement optimal de ces ouvrages est principalement régi par leur stabilité et leur résistance vis-à-vis des sollicitations auxquelles ils sont soumis.

En pratique, le dimensionnement d'un ouvrage est mené par vérification de stabilité sous différentes combinaisons de chargement. Une composante importante de ce chargement est la sollicitation accidentelle dont l'exemple le plus direct est le choc d'un bateau. Un travail important lors du dimensionnement d'un ouvrage hydraulique consiste à caractériser l'intensité mais aussi la probabilité d'occurrence de cet éventuel effort de collision.



(a) Collision d'une péniche avec le barrage mobile à cylindre de Pompey sur la Moselle [ER, 2010]



(b) Péniche en travers de la Meuse à Marche-les-Dames suite à un désamarrage accidentel [L'avenir, 2013]

### Exemples d'accidents de péniche en navigation intérieure

C'est dans cet objectif que s'inscrit cette étude de modélisation de bateaux à la dérive en navigation intérieure. Cette état de dérive est une situation rare liée, par exemple, à un désamarrage accidentel ou une avarie du système de guidage et de propulsion, mais qui peut conduire à des perturbations importantes que ce soit par endommagement d'un ouvrage de régulation ou par obstruction de la voie d'eau par mise en travers. Remarquons qu'une faute de pilotage ou un balisage mal agencé peut également être à l'origine de perturbations similaires. Il existe des dispositifs dédiés uniquement au ralentissement de bateaux (Navistop [EMCC, 2003]) mais, quoiqu'il en soit, ce genre de situation nécessite au minimum l'intervention de remorqueurs pour dégager la voie d'eau et, dans le cas de dégâts matériels importants, la mise en place d'un chantier de reconstruction.

La démarche entreprise dans ce travail de fin d'études est ici menée en amont de la collision et vise à prédire la trajectoire d'une structure flottante de manière à déterminer sa propension à impacter un ouvrage situé sur le cours d'eau ainsi que les caractéristiques de la collision associée. Après une revue de la littérature, un modèle de calcul s'inscrivant de manière pertinente dans le domaine d'application de l'étude est développé et décrit.

Le comportement de la routine de calcul est ensuite validé et analysé à l'aide d'essais en laboratoire et d'études menés dans des écoulements théoriques de référence.

Finalement, le modèle est appliqué sur un set de données réel pour réaliser un avant-projet d'étude de collision bateau-structure sur le bief de Meuse Ampsin-Andenne.

## Chapitre 2

# Prospection bibliographique

La première étape du travail consiste à faire une synthèse des différentes études réalisées à ce jour dans le domaine du mouvement des bateaux et des structures flottantes en général. Ces études peuvent être groupées en différentes catégories selon que l'on s'intéresse, d'une part, à la dynamique sous sollicitations de houle ou, d'autre part, aux manœuvres, à l'avancement et et à la propulsion de bateaux en eaux calmes. Certains travaux traitent également d'un couplage entre les deux phénomènes.

Le cadre de cette étude se limite à la prédiction de la trajectoire de structures flottantes non guidées en navigation intérieure. La dimension liée aux comportement sous sollicitations de houle est par conséquent écarté.

Après un bref récapitulatif des fondamentaux de la dynamique des corps rigides et de la statique des structures flottantes, l'attention est portée successivement sur des notions de résistance à l'avancement, sur le calcul de trajectoire, avec ou sans manœuvres, ainsi que sur l'interaction fluide-structure via le concept de masse ajoutée.

Finalement, le choix d'un modèle mathématique pertinent, compte tenu des objectifs du travail et de l'état de l'art disponible, est posé.

### 2.1 Dynamique du corps rigide

Le bateau est assimilé, dans le cadre de cette étude par une structure à six degrés de liberté (figure 2.1.1) :

- Trois degrés de liberté en translation :
  - Translation selon l'axe longitudinal du bateau ; '*surge*' ,
  - Translation selon l'axe transversal du bateau ; '*sway*' ,
  - Translation verticale ; '*heave*' .
- Trois degrés de liberté en rotation :
  - Rotation autour de l'axe longitudinal du bateau ; '*roll*' ou gîte,

- Rotation autour de l'axe longitudinal du bateau; '*pitch*' ou assiette,
- Rotation autour de l'axe vertical; '*yaw*' ou dérive.

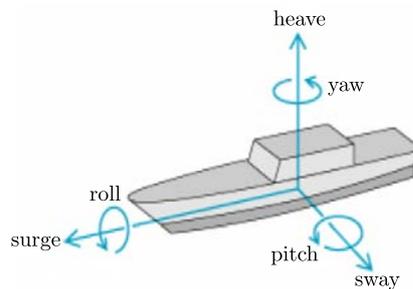


FIGURE 2.1.1 – Structure flottante rigide à six degrés de liberté [Hem Lata and Thiagarajan, 2007]

En toute généralité, l'équation de mouvement d'un corps rigide à  $n$  degrés de liberté ( $n \leq 6$ ) peut être écrite sous la forme suivante [Featherstone, 2008] :

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t), \ddot{\underline{x}}(t), t) \quad (2.1.1)$$

- $\underline{M}$  est une matrice  $[n \times n]$  qui intègre la masse et les moments d'inertie en rotation. Elle est indépendante du temps et de la position et prend une forme diagonale dans les axes principaux d'inertie de la structure.
- $\underline{x}(t)$  ( $[n \times 1]$ ) est un vecteur qui contient les positions (coordonnées) et orientations (angles) du corps.  $\dot{\underline{x}}(t)$  et  $\ddot{\underline{x}}(t)$  sont les vitesses et accélérations associées.

Le nœud du problème se situe dans la définition de la fonction  $\underline{f}$  ( $[n \times 1]$ ) qui regroupe les efforts appliqués sur la structure. En l'occurrence, cette notion d'effort est définie de manière générale, elle est liée à des notions de forces extérieures mais également d'amortissement dynamique (liés à la vitesse propre du corps).

## 2.2 Statique des structures flottantes

Pour aborder la problématique des bateaux à la dérive, il convient tout d'abord de se remémorer les notions fondamentales de la statique des structures flottantes.

Un corps flottant subit un effort vertical, appelé communément poussée d'Archimède, dirigé vers le haut et égal au poids du volume d'eau déplacé. La description de cet effort est un sujet ancien largement abordé dans la littérature et qui constitue la base de l'hydrostatique [Mégel and Kliava, 2009]. La flottabilité du corps est assurée si la poussée est capable d'équilibrer le poids.

La définition de la stabilité en flottaison est également une notion fondamentale. Un corps flottant est en équilibre stable si son centre de gravité  $G$  est situé sous son métacentre de rotation

$M$ . La distance  $GM$  peut être calculé via la formule de Bouguer [Mégel and Kliava, 2009, Rigo and Herbillon, 2010]. Cette dernière définit la distance métacentrique  $BM$  entre le centre de poussée et le métacentre via :

$$|BM| = \frac{I}{V} \quad (2.2.1)$$

où  $I$  est l'inertie de la surface de flottaison et  $V$  le déplacement, i.e le volume d'eau déplacé.

## 2.3 Calcul des efforts hydrodynamiques : Résistance à l'avancement

L'intérêt porté ici sur le calcul de la résistance à l'avancement s'inscrit dans la volonté d'évaluer les efforts agissant sur le bateau.

Il s'agit d'un domaine largement abordé dans la littérature et est d'une importance cruciale, notamment pour les études de profilage et de dimensionnement des systèmes de propulsion. L'évaluation de la résistance à l'avancement peut être abordée de différentes manières. Chronologiquement, ce sont des essais expérimentaux à échelle réduite qui ont tout d'abord été menés. Leur interprétation à échelle réelle a été rendue possible via le développement et l'application de lois de similitude. La collecte des informations liées à ces essais a ensuite permis de développer des lois semi-empiriques d'évaluation de la résistance. On parle alors d'approche statistique. Ces dernières années, avec le développement croissant des performances des outils de calcul, des méthodes numériques de plus en plus complète ont pu être implémentées pour résoudre de manière efficace ce problème.

En pratique, l'utilisation conjointe de ces trois approches est nécessaire. Les modèles numériques permettent en effet de lancer des simulations variées mais doivent être au préalable calibrés et validés par essais expérimentaux et des formulations semi-empiriques.

Selon l'approche utilisée, la résistance à l'avancement est divisée en composantes qui sont évaluées individuellement. La figure 2.3.1 regroupe les différentes composantes de résistance identifiées. Les méthodes numériques se basent généralement sur une décomposition en résistance visqueuse et résistance de vagues (bas de la figure), à l'inverse des méthodes expérimentales qui pratiquent une découpe en résistance de plaque et résistance résiduaire (haut de la figure).

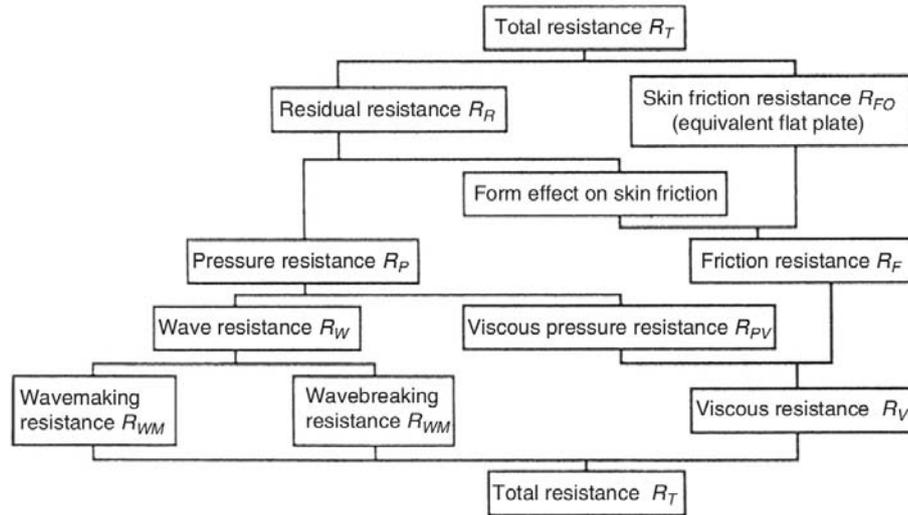


FIGURE 2.3.1 – Décomposition de la résistance à l’avancement [Larsson and Raven, 2010]

En préalable à la description des différentes approches, on introduit la formulation de *Bernoulli* qui permet de relier la vitesse relative  $v_{rel}$  (en l’occurrence entre l’écoulement et la structure flottante) à une pression dynamique  $p$  (appliqué sur la structure) :

$$p = \frac{1}{2} \rho_w C_T v_{rel}^2 \quad (2.3.1)$$

où :

- $\rho_w$  est la masse volumique de l’eau,
- $C_T$  est un coefficient qui intègre toutes les composantes de résistance à l’avancement. Il peut être subdivisé selon l’approche utilisée.

### 2.3.1 Hypothèses de calcul

Le calcul de la résistance à l’avancement d’une structure flottante est généralement mené pour évaluer les efforts de propulsion nécessaires à la mise en mouvement de la structure à une vitesse donnée.

Le cadre de calcul est par conséquent :

- Un champ de vitesse uniforme dont la valeur correspond au différentiel de vitesse entre l’écoulement et le bateau (vitesse relative  $v_{rel}$ ),
- Un bateau, de géométrie de répartition de masse connues, dont l’axe longitudinal est placé parallèlement à la direction du champ de vitesse relative.

### 2.3.2 Approche expérimentale

La résistance à l'avancement est ici évaluée via essais sur modèles réduits en bassin de traction. Dans cette approche, la résistance est décomposée en deux parties :

- Résistance de frottement de la carène (i.e. la surface mouillée du bateau), assimilée à une plaque plane de même surface et même longueur,
- Résistance résiduaire. Elle correspond à la résistance totale à laquelle est retranchée la résistance de frottement.

On définit au préalable à la suite de la description deux nombres adimensionnels :

- Nombre de Froude :  $Fr = \frac{v_{rel}}{\sqrt{gL_c}}$  où  $L_c$  est une longueur caractéristique et  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , l'accélération de pesanteur.
- Nombre de Reynolds :  $Re = \frac{U_c L_c}{\nu}$  où  $U_c$  est une vitesse caractéristique et  $\nu = 1,007 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , la viscosité cinématique de l'eau.

L'hypothèse de Froude postule que le coefficient total  $C_T$  de résistance à l'avancement peut être décomposé en deux parties  $C_W$  et  $C_F$  respectivement dépendantes du nombre de Froude  $Fr$  (résistance résiduaire) et du nombre de Reynolds  $Re$  (résistance de frottement) [Doutreleau et al., 2011] :

$$C_T(Fr, Re) = C_F(Re) + C_W(Fr) \quad (2.3.2)$$

Cette formulation est adoptée par l'ITTC<sup>1</sup> en 1957 et est mise à jour par la suite à l'aide d'un facteur de forme  $1 + k$  qui tient compte du fait que la couche limite formée le long de la carène varie en fonction de la géométrie du bateau. En effet,  $C_F$  est mesuré expérimentalement pour une plaque plane mince disposée parallèlement à la direction de l'écoulement.

$$C_T(Fr, Re) = (1 + k)C_F(Re) + C_W(Fr) \quad (2.3.3)$$

Le coefficient  $k$  peut être calculé de différentes manières [Larsson and Raven, 2010] :

1. Selon *Watanabe* :

$$k = -0.095 + 25.6 \frac{C_b}{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{B}{T}}} \quad (2.3.4)$$

Cette relation ne peut être utilisée qu'en combinaison avec la relation ITTC-57 (équation (2.3.6)),

2. Par détermination expérimentale à faibles vitesses, pour lesquelles la résistance résiduaire est négligeable,

---

1. International Tower Tank Conference.

3. Selon Prohaska qui pose l'hypothèse que la résistance de vagues est proportionnelle à  $Fr^4$  tant que le nombre de Froude est petit :

$$\frac{C_T}{C_F} = (1 + k) + k_1 \frac{Fr^4}{C_F} \quad (2.3.5)$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle peut être menée pour un nombre de Froude plus élevé que dans le cas d'une détermination par faibles vitesses.

La récolte de données expérimentales via essais en bassin de carène est menée de la manière suivante [Doutreleau et al., 2011] :

1. Mise à l'échelle du prototype étudié en conservant le nombre de Froude constant (similitude de Froude). Cette dernière implique que les effets visqueux ne sont pas correctement mis à l'échelle (similitude de Reynolds non respectée),
2. Évaluation de la résistance due au frottement à l'échelle du modèle via une formulation semi-empirique [ITTC, 2002] (éventuellement corrigée par le facteur de forme  $k$ ) :

$$C_f = \frac{0.075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \quad \text{ITTC-57} \quad (2.3.6)$$

3. Récolte de la résistance totale à l'avancement du modèle à laquelle on retranche la composante de frottement précédemment calculée pour obtenir la résistance résiduaire du modèle,
4. Changement d'échelle pour obtenir la résistance résiduaire du prototype,
5. Évaluation de la composante de résistance liée au frottement du prototype via l'équation (2.3.6),
6. Sommation pour obtenir la résistance totale.

Rappelons que l'équation (2.3.6) utilisée ici pour évaluer le frottement est le résultat d'essais de résistance à l'avancement sur plaques planes minces, pour lesquelles la résistance résiduaire est négligeable.

Les essais en laboratoire sont actuellement le meilleur moyen de calculer la résistance à l'avancement. Cependant, le coût et le temps de préparation des essais est tel que cette technique n'est habituellement utilisée que pour calibrer un nouvel outil numérique ou valider un projet.

### 2.3.3 Approche semi-empirique

L'approche semi-empirique (ou approche statistique) consiste à utiliser des lois obtenues par régression sur des valeurs issues d'essais expérimentaux. En pratique, la résistance à l'avancement est calculée comme étant la somme d'une série de composantes individuellement évaluées. Ces dernières sont listées et détaillées ci-après [Rigo and Herbillon, 2010, Larsson and Raven, 2010, Doutreleau et al., 2011] :

**Résistance de frottement** La résistance de frottement peut être évaluée via *Schoenherr* :

$$R_f = \frac{1}{2} C_f \rho_w v_r^2 S_f \quad (2.3.7)$$

où  $S$  est la surface de carène. En pratique, une marge de sécurité  $\Delta C_f = 0.0004$  est prise en compte.

**Résistance de rencontre** La résistance de rencontre, ou résistance tourbillonnaire, est liée au maître-couple  $s$  du bateau :

$$R_r = k s v_r^\beta \quad (2.3.8)$$

où :

- $k = \frac{1}{2} C_r \rho_w$  avec  $C_r$  un coefficient de résistance de rencontre.
- $\beta \simeq 2$ .

**Résistance onde primaire** Lorsqu'un bateau est en mouvement relatif par rapport à un écoulement, il crée un train de vagues. L'énergie nécessaire à la création de ces ondes de surface introduit une composante supplémentaire de résistance à l'avancement (figure 2.3.2). La résistance de l'onde primaire (ondes transversales) seule est généralement considérée.

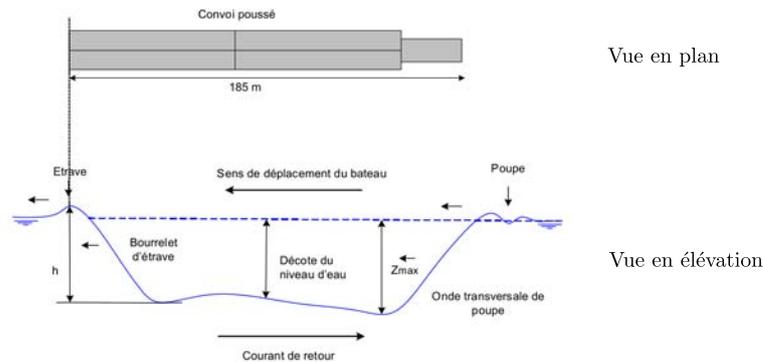


FIGURE 2.3.2 – Système d'onde primaire - exemple d'un convoi poussé [VNF, 2002]

**Composante gravitaire** Lorsque la surface libre est inclinée, i.e. en voie navigable à courant non-nul, il convient de prendre en compte une composante de résistance liée à la pente de surface (figure 2.3.3) :

$$R_g = \bar{\omega} V i \quad (2.3.9)$$

où :

- $\bar{\omega} = \rho_w g$  est le poids spécifique de l'eau,
- $V$  est le volume de carène,
- $i$  est la pente de surface.

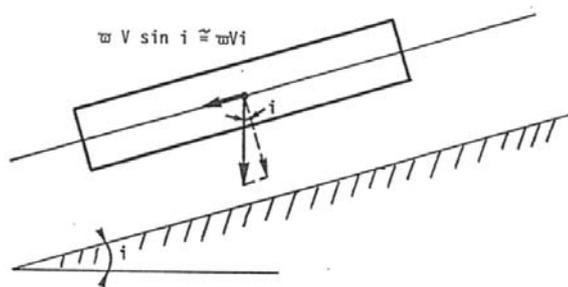


FIGURE 2.3.3 – Composante de résistance à l'avancement liée à la pente de surface libre [Rigo and Herbillon, 2010]

**Section limitée** En section limitée, la vitesse relative subit un incrément lié au courant de retour au droit du bateau. Ce phénomène est accompagné d'un abaissement du plan d'eau (figure 2.3.4).

En réalité, un phénomène additionnel à prendre en compte est lié à l'inclinaison du bateau sous l'effet de ce courant de retour. L'abaissement du plan d'eau au droit du bateau n'est en effet pas brusque du fait du frottement entre le canal et le fond du bateau.

D'ailleurs, en vue de parfaire l'expression de la résistance de frottement (équation (2.3.7)), certains expérimentateurs ont proposé une réduction liée à l'abaissement du niveau d'eau au droit du bateau en section limitée (figure 2.3.4).

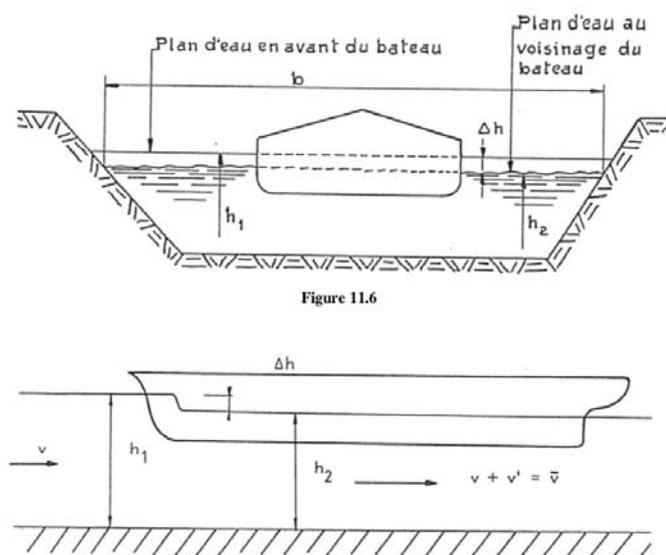


FIGURE 2.3.4 – Résistance à l'avancement en section limitée [Rigo and Herbillon, 2010]

### 2.3.4 Approche numérique

L'une des approches utilisées pour le calcul de résistance à l'avancement est basée sur la résolution numérique des équations de *Navier-Stokes* pour un fluide incompressible [Piroton, 2014] :

- Continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3.10)$$

- Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3.13)$$

La méthodologie appliquée est de particulariser ces équations pour évaluer deux composantes de résistance à l'avancement :

**Résistance des vagues** Le train de vagues du bateau est constitué d'un système primaire (transverses) et d'une système secondaire (divergentes) (figure 2.3.5). L'objectif est ici déterminer l'énergie dépensée pour leur création et, par extension, leur contribution à la résistance à l'avancement.

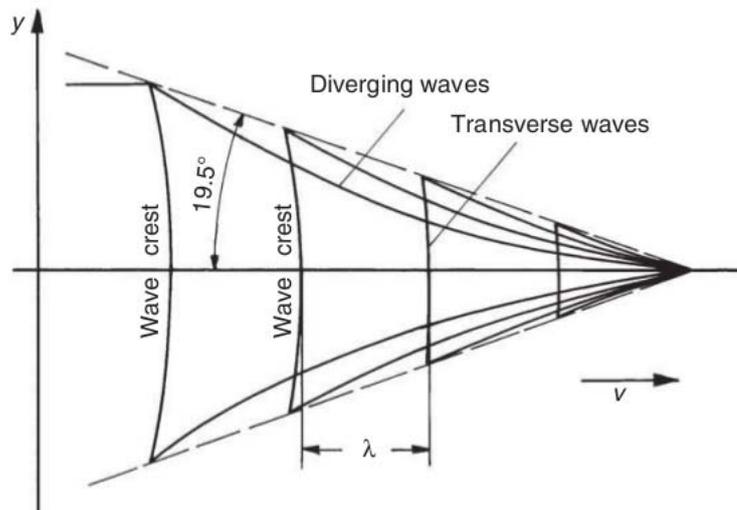


FIGURE 2.3.5 – Forme du système de vagues secondaires [Larsson and Raven, 2010]

[Larsson and Raven, 2010] posent les hypothèses suivantes pour détermination la contribution des vagues à la résistance à l'avancement :

1. Le fluide (en l'occurrence, l'eau) est non-visqueux. Les équations de quantité de mouvement se particularisent et forment l'équation d'*Euler* :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \underline{v} = \underline{\nabla} \left( -\frac{p}{\rho} - gz \right) \quad (2.3.14)$$

2. La vitesse dérive d'un potentiel, i.e. l'écoulement est irrotationnel :

$$\underline{v} = \underline{\nabla} \phi \quad (2.3.15)$$

Sous ces hypothèses, les équations de quantité de mouvement (équation (2.3.11) à (2.3.13)) et de continuité (équation (2.3.10)) se ramènent respectivement à :

- La formulation de *Bernoulli* en instationnaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{\nabla} \phi \cdot \underline{\nabla} \phi + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.3.16)$$

- L'équation de *Laplace* :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.3.17)$$

Les équations sont ensuite discrétisées et résolues dans un repère fixe lié au bateau par imposition de conditions aux limites de surface libre (conditions de *Kelvin*) et d'interface fluide-structure.

**Résistance visqueuse** Pour évaluer cette seconde composante de résistance à l'avancement, les équations de *Navier-Stokes* sont résolues dans un repère normal à la surface mouillée de la coque et tiennent compte de la formation d'une couche limite sur le pourtour de la coque. Les développements sont basés le cas d'une plaque plane mince et sont particularisés pour tenir compte de la géométrie de la carène.

## 2.4 Simulation en manœuvre

Dans cette section, l'intérêt est porté sur le type de simulations menées en pratique pour le calcul des manœuvres de bateaux, telles que le demi-tour, le zig-zag ou les manœuvres menées pour suivre une trajectoire imposée.

Certains auteurs [Hyunse, 2009, Yoshimura and Masumoto, 2011] passent par la définition des coefficients de manœuvre (*'Hydrodynamic Derivatives'*) pour décrire les efforts et le mouvement d'un bateau en manœuvre. Ces coefficients de manœuvres pondèrent les différentes variables du problème (accélérations, vitesses, inclinaison du système de propulsion, etc.), ces termes sont

ensuite sommés pour identifier les efforts agissant sur la structure.

Il existe en réalité trois niveaux de simulation [Hyunse, 2009] :

- *'No simulation'* : Aucun modèle mathématique n'est utilisé. Les paramètres de manœuvres sont directement mesurés lors d'essais à échelle réelle ou sur modèles réduits. Il permet de constituer une base de données exploitable,
- *'System based manœuvring simulation'* : Le calcul des coefficients de manœuvre est mené via régression de valeurs présentes dans des bases de données, éventuellement combinée à un modèle théorique (par exemple, *Cross flow drag model* [MARIN, 2013]) pour ensuite rentrer dans une équation de mouvement,
- Computational fluid dynamics (CFD) : Des schémas numériques sont utilisés soit pour déterminer les coefficients de manœuvre soit pour résoudre directement l'équation de mouvement. Par exemple, pour la résistance à l'avancement (cfr.section 2.3.4) :
  - résistance de vagues : *'inviscid method'*,
  - résistance visqueuse : *'Random Average Navier-Stokes'*.

Cette notion de coefficients de manœuvres combiné à *'System based manœuvring simulation'* est largement utilisée dans le cadre des simulateurs de navigation en temps réel [MARIN, 2013, ARI, 2009]. L'information disponible dans la littérature, relative à la méthodologie de simulation, ne permet cependant pas de reproduire la méthode de calcul utilisée car les simulateurs de navigation sont, bien souvent, des logiciels commerciaux dont le code de fonctionnement est protégé.

## 2.5 Interaction fluide - structure : Concept de masse ajoutée

L'interaction fluide - structure est un vaste domaine d'étude qui peut être abordé via le concept de masse ajoutée.

Physiquement, cette masse ajoutée provient du fait que le déplacement accéléré du corps provoque également un déplacement du fluide environnant. En pratique, elle consiste en un incrément négatif d'effort  $f_{ij} = -a_{ij}u_i$  dans la direction  $i$  lorsque la structure est soumise à une accélération unitaire  $u_j$  dans la direction  $j$ . Autrement dit, il s'agit d'une extension fictive du corps qui introduit un effort de résistance à l'avancement supplémentaire.

L'évaluation des coefficients de masse ajoutée peut être menée suivant différentes approches :

- *'radiation problem solution'* [Bhatta and M., 2003]
- *'conformal mapping techniques'* [Hem Lata and Thiagarajan, 2007]
- *'boundary elements method'* [Hem Lata and Thiagarajan, 2007]

Pour des corps élancés, i.e. des corps pour lesquels la longueur caractéristique dans la direction longitudinale est considérablement plus grande que les longueurs caractéristiques dans les deux autres directions, les coefficients de masse ajoutée totaux peuvent être évalués par intégration sur la dimension élancée de coefficients de masse ajoutée bidimensionnels (figure 2.5.1).

Cette méthode ne permet cependant pas de calculer les coefficients de masse ajoutée dans la direction liée à la dimensions élancée [Yuming, 2013].

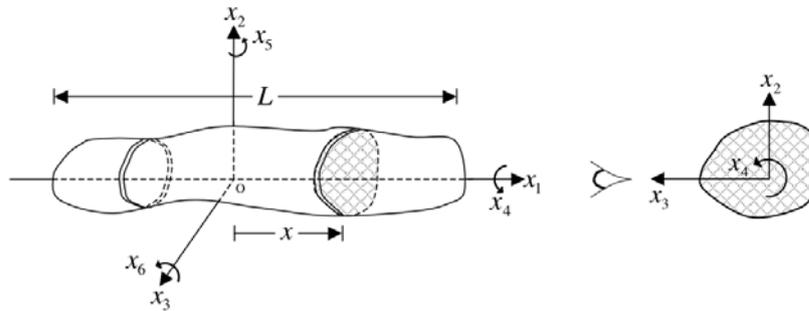


FIGURE 2.5.1 – Masse ajoutée - 'slender body approximation' [Yuming, 2013]

Newman [Newman, 1977] a tabulé des valeurs de coefficients de masse ajoutée pour différents corps bidimensionnels dans son ouvrage *Marine Hydrodynamics*. Elle sont présentées à la figure 2.5.2.

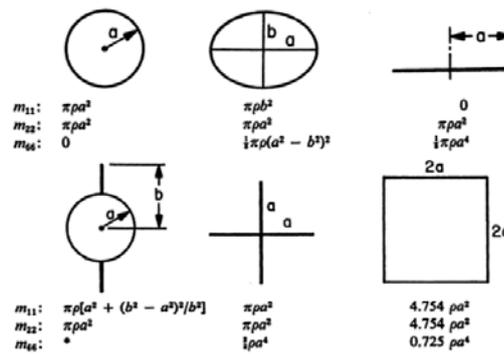


FIGURE 2.5.2 – Coefficients de masse ajoutée pour géométries 2D simples [Newman, 1977]

## 2.6 Choix d'un modèle mathématique de prédiction

Au terme de cette revue de la littérature, plusieurs aspects ont été mis en évidence et vont permettre de définir un cadre pertinent pour la définition d'une modèle mathématique de prédiction.

Tout d'abord, la dynamique des degrés de liberté d'assiette, de gîte et de translation verticale n'est souvent considérée que pour des configurations de bateaux sollicités par des mouvements de houle.

Ensuite, la majorité des études sont menées dans l'objectif de déterminer des efforts de résistance à l'avancement pour dimensionner *in fine* un système de propulsion dans le domaine d'application restreint d'un champ de vitesse uniforme et d'intensité constante.

Finalement, les développements liés aux manœuvres de bateaux sont menés dans le cadre de structures flottantes guidées. La trajectoire du bateau est donc forcée. Les outils utilisés dans cette approche sont soit uniquement disponibles pour des géométries particulières de bateaux (coefficients de manœuvre tabulés) soit très lourds à mettre en œuvre, que ce soit au niveau des schémas numériques, ou du dispositif d'acquisition de données en laboratoire.

Dans le cadre de ce travail, la donnée d'entrée est un champ hydrodynamique discrétisé<sup>2</sup>. En définitive, le choix est par conséquent fait de réutiliser des formulations qui relient la vitesse à une pression appliquée sur la structure par l'intermédiaire d'un coefficient issu d'études expérimentales. Ces formulations de pressions seront appliquées localement et intégrées de manière à trouver des efforts et couples de rotation résultants sur la structure, et, par extension, à pouvoir résoudre une équation de mouvement au cours du temps. La rétroaction du bateau sur l'écoulement sera négligée en raison des faibles différentiels de vitesse observés en dehors de la phase de mise en mouvement du bateau. Les termes de masse ajoutée seront par conséquent omis dans l'équation de mouvement.

Un modèle de calcul original sera ainsi développé. Seuls les degrés de liberté en translation dans le plan et en rotation de dérive seront traités de manière dynamique, les trois degré de liberté supplémentaires interviendront lors du calcul statique, à chaque pas de temps, de l'enfoncement du bateau<sup>3</sup>.

---

2. cfr. section 3.1.

3. Dans la suite du travail, ils sont référencés respectivement sous les appellations 'degrés de liberté dynamiques' et 'degrés de liberté statique'.

## Chapitre 3

# Développement d'un modèle de calcul de trajectoire

Dans ce chapitre, nous nous attelons à développer et à décrire un modèle original de prédiction de la trajectoire du bateau à la dérive considéré comme une structure à trois degrés de liberté dynamiques et trois degrés de liberté statiques.

Tout d'abord, l'équation du mouvement est écrite pour le problème posé. Ensuite, les données du problème ainsi que les systèmes d'axes utilisés sont décrits. Finalement, la méthodologie du calcul des efforts agissant sur le bateau est présentée. Dans cette optique, le calcul de l'enfoncement du bateau et des résultantes de pressions hydrostatiques et hydrodynamiques est détaillé.

Cette premier chapitre s'inscrit dans un soucis de reproductibilité. La construction du modèle est décrite en détail de manière à permettre son implémentation par un lecteur tiers. Son analyse et sa validation fait l'objet du chapitre suivant.

### 3.1 Données du problème

L'objectif du travail est de prédire la trajectoire de bateaux à la dérive dans des chenaux de navigation intérieure. L'expression à la dérive suppose qu'aucun contrôle extérieur (propulsion, modification de l'angle de gouvernail, etc.) ne peut être appliqué pour modifier la trajectoire du bateau. Le problème est donc exclusivement dépendant du champ hydrodynamique local, de la géométrie du bateau et de la répartition de masse sur ce dernier.

Le champ hydrodynamique est défini de manière discrète, typiquement selon un maillage  $5 \times 5 m$ . Il est issu de simulations bidimensionnelles menées à l'aide du logiciel `WOLF 2D` pour différents cours d'eau en région wallonne sujets à des débits de crues. Les simulations ont été menées jusqu'à l'atteinte d'un écoulement stationnaire et fournissent une information de débit spécifique dans deux directions, de hauteur d'eau et de topographie en chacun des points de

discrétisation. La donnée de débit spécifique est aisément reliée à une valeur de vitesse car la hauteur d'eau.

Dans les étapes de développement et d'analyse du modèle, le terme 'hauteur d'eau' sera assimilé à celui de 'cote de surface libre' sans considérer une information quelconque de topographie. Cette dernière sera utilisée dans l'application étudiée au chapitre 5 pour définir une condition d'arrêt par collision avec le lit.

Dans le cadre de ce travail, la géométrie de bateau étudiée sera celle d'un parallélépipède de longueur  $l$  et de largeur  $b$ . La troisième dimension importe peu car on considère simplement que, quel que soit le chargement du bateau, elle est suffisante pour permettre une flottaison du bateau sans surverse latérale (figure 3.1.1).

Cette géométrie simplifiée permet de représenter adéquatement des barges ou des péniches ainsi que des embâcles type containers, etc.

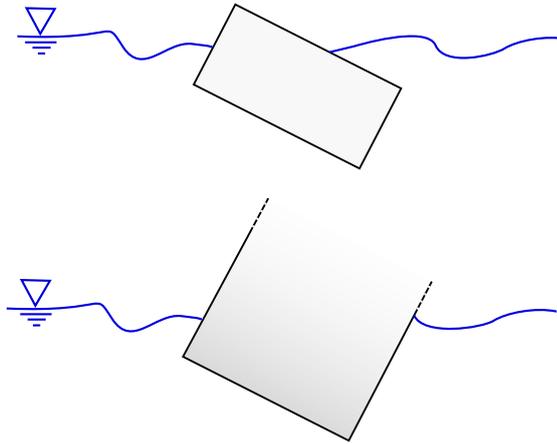


FIGURE 3.1.1 – Hypothèse de non-surverse latérale

La répartition du chargement est également une donnée du problème et peut être définie par l'utilisateur dans la routine de calcul. Le bateau est divisé, en plan, en différents compartiments auxquels on attribue une masse donnée (figure 3.1.2)<sup>1</sup>. Le compartimentage est régulier et composé d'éléments de dimension  $dl' \times db'{}^2$  au centre desquels sont disposées des masses  $m_i$ . Cette répartition permet de calculer la position en plan  $(x_{cm}, y_{cm})$  du centre de masse. La nomenclature utilisée pour décrire la répartition de chargement est donnée par (ici pour le cas particulier du compartimentage présenté à la figure 3.1.2) :

$$R = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_5 & m_6 & m_7 & m_8 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

---

1. Le détail des systèmes d'axes utilisés est introduit à la section 3.3

2. Par opposition à  $dl$  et  $db$  qui sont les tailles de discrétisation du bateau dans la méthode locale (cfr. section 3.6.1)

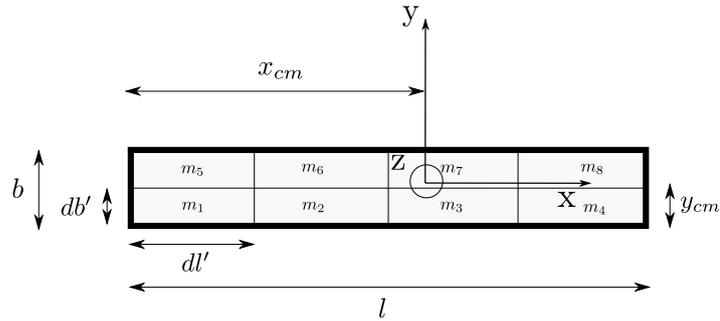


FIGURE 3.1.2 – Chargement du bateau et position du centre de masse associée

La position verticale du centre de masse  $h_{cm}$  est, quant à elle, introduite directement dans la routine. Lors du choix de cette valeur, il convient d'assurer la stabilité au renversement du bateau. Il est ainsi nécessaire de garantir que la position du centre de masse est située sous la position du métacentre de poussée du bateau [Mégel and Kliava, 2009]. L'élévation maximale  $h_{cm}$  est discuté dans le paragraphe ci-après consacré à la stabilité au renversement.

Dans le cadre de ce travail, nous supposons le chargement fixe. Les phénomènes liés aux carènes liquides ou à un éventuel déplacement du chargement sous des inclinaisons données sont ainsi écartés.

La structure flottante de référence utilisée est une Barge Europa type III [ITB, 2008] de dimensions  $l \times b = 100 \times 11,4$  m et dont la masse  $m$  en état chargé varie entre 3000 et 4500 tonnes. Lorsqu'une simulation est menée avec un bateau de dimensions différentes, sa masse est mise à l'échelle via :

$$m_{\text{mod}} = \frac{b_{\text{mod}} l_{\text{mod}}}{bl} m \quad (3.1.2)$$

**Stabilité au renversement** Ce paragraphe est consacré à définir une limite maximale de l'élévation  $h_{cm}$  du centre de masse pour garantir la stabilité au renversement. Le chargement est considéré uniforme de sorte que le tirant est constant est que la stabilité est nécessairement plus critique dans la direction transversale.

Le tirant d'eau est donné par :

$$T = \frac{m}{bl\rho_w} \quad (3.1.3)$$

Différents points de référence sont définis (figure 3.1.3) :

- Le centre de carène B,
- Le centre de gravité G,
- Le métacentre de carène M, défini comme le point d'intersection entre une verticale passant par le centre de gravité G et la verticale passant par la centre de carène B pour une petite inclinaison par rapport à l'enfoncement d'équilibre du bateau,
- Le fond du bateau K.

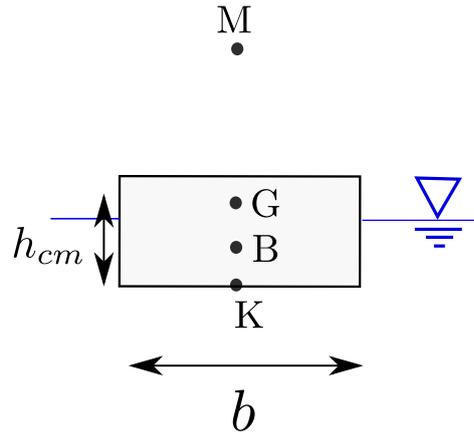


FIGURE 3.1.3 – Stabilité au renversement - points de référence

La stabilité au renversement est assurée si le centre de masse est situé sous le métacentre, i.e. si (cfr. section 2.2) :

$$\begin{aligned}
 |GM| &= |KB| + |BM| - |KG| > 0 \\
 &\Updownarrow \\
 |KG| = h_{cm} &< |KB| + |BM| \\
 &< \frac{T}{2} + \frac{I}{\Delta} = \frac{T}{2} + \frac{b^3 l}{12 T b l} \\
 &< \frac{m}{2 l b \rho_w} + \frac{\frac{b^3 l}{12}}{\frac{m}{\rho_w}}
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Ce qui donne respectivement en condition de faible chargement ( $m = 3000$  tonnes) et de plein chargement ( $m = 4500$  tonnes) :

$$\begin{aligned}
 h_{cm} &< 5,43 \text{ m - faible chargement} \\
 h_{cm} &< 4,72 \text{ m - plein chargement}
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

## 3.2 Particularisation à trois degrés de liberté dynamiques

Les données du problèmes étant maintenant définies, nous allons porter notre attention sur l'équation du mouvement de corps rigide, notamment sur sa particularisation à trois degrés de liberté et sur sa résolution numérique.

Dans tout le travail, le choix est fait de considérer le bateau comme une structure à trois degrés de liberté dynamiques :

- Deux degrés de liberté de translation en plan du centre de masse du bateau ;  $X_{cm}$  et  $Y_{cm}$ ,
- Un degré de liberté de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de translation ; la rotation de dérive  $\theta$ .

À chaque pas de temps, l'enfoncement<sup>3</sup> stabilisé du bateau sera calculé en fonction du champ de hauteur d'eau connu. On suppose que cet état d'enfoncement stable est atteint instantanément en début de pas de temps de sorte que les trois degrés de liberté supplémentaires (translation verticale, rotation d'assiette et rotation de gîte) sont introduits de manière détournée sans considérer de comportement dynamique.

Cette hypothèse est justifiée en pratique par l'absence de variation spatiale brutale du champ de hauteur d'eau et par les petites inclinaisons de gîte ou d'assiette du bateau. Ce dernier constat est lié au fait qu'un chargement relativement uniforme du bateau est généralement préconisé, de sorte que le tirant d'eau est plus ou moins uniforme.

Les efforts associés à l'écoulement et appliqués sur la structure sont liés à la pression. Cette dernière présente deux composantes :

- La première est d'origine hydrodynamique et liée à la vitesse relative entre l'écoulement et la structure flottante,
- la seconde est d'origine hydrostatique et liée au différentiel de hauteur d'eau sur le pourtour de la structure.

Le bateau est également soumis à son poids propre. Les efforts de résistance à l'avancement introduits par la pression de vent exercée sur les parties non immergées du bateau sont négligés.

### 3.2.1 Équation du mouvement

Pour estimer l'évolution des trois degrés de liberté dynamiques du système, nous allons particulariser la formulation générale de l'équation du mouvement (équation (2.1.1)).

La matrice  $\underline{M}$  est de forme diagonale et écrite dans les axes  $O'_{x'y'z'}$ . Les deux premiers éléments diagonaux sont liés aux translations dans le plan et le troisième est lié à la rotation.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

$I_{z'}$  est le moment d'inertie autour de l'axe  $z'$  et est défini par :

$$I_{z'} = \int_{\text{bateau}} r^2 dm = \sum_i r_i^2 m_i \quad (3.2.2)$$

où :

- $m_i$  est une des masses ponctuelles définies lors de la description du chargement (cfr. section 3.1),
- $r_i$  la distance entre l'origine du repère et la position de cette masse.

---

3. Dans ce travail, l'enfoncement du bateau fait référence au tirant d'eau. Il n'est généralement pas uniforme en raison du chargement du bateau et des variations spatiales de hauteur d'eau.

La modèle est développé sous l'hypothèse que le mouvement du bateau n'introduit pas de rétroaction sur l'écoulement, de sorte que toute interaction entre le fluide et la structure est négligée. En pratique cela revient à omettre la dépendance de  $\underline{f}$  en  $\underline{\ddot{x}}$  par la non-prise en compte d'effets de masse ajoutée.

L'équation du mouvement est résolue pas à pas en considérant une accélération constante sur le pas de temps. Cela revient à écrire une équation de mouvement uniformément accéléré entre  $t$  et  $t + 1$  où l'accélération est évaluée en  $t$  via :

$$\underline{\ddot{x}}_t = \underline{M}^{-1} \underline{f}_t \quad (3.2.3)$$

Ainsi, vitesses et positions au pas temps suivant peuvent être évaluées :

$$\underline{\dot{x}}_{t+1} = \underline{\dot{x}}_t + \Delta t \underline{\ddot{x}}_t \quad (3.2.4)$$

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{x}_t + \Delta t \underline{\dot{x}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \underline{\ddot{x}}_t \quad (3.2.5)$$

Dans le cadre de travail, nous nous bornerons à ce schéma de résolution. Il est cependant important de préciser qu'il existe d'autre manière de calculer l'accélération constante calculée à chaque pas de temps. L'accélération peut ainsi être évaluée de manière implicite en  $t + 1$ . Nous procéderions dans ce cas à un processus itératif (figure 3.2.1).

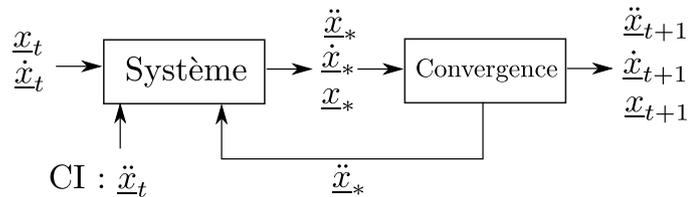


FIGURE 3.2.1 – Schéma implicite pour le calcul de l'accélération

Le bloc système résout l'équation du mouvement à l'aide de  $\underline{x}_t$ , de  $\underline{\dot{x}}_t$  et de  $\underline{\ddot{x}}_*$ . En prenant comme condition initiale  $\underline{\ddot{x}}_* = \underline{\ddot{x}}_t$ . Le bloc convergence sauve les positions et vitesses et les compare aux valeurs calculées à l'itération précédente. Si le critère de convergence est vérifié, les positions et vitesses sont actualisées et le calcul est lancé pour le pas de temps suivant. En pratique, les itérations ne sont généralement pas menées jusqu'à atteinte stricte d'un critère de convergence, les résultats des  $n$  premières itérations sont combinés et pondérés selon un processus dit de *Runge-Kutta* à  $n - 1$  pas prédicteurs ; le dernier résultat faisant office de correcteur.

Le choix est ici fait de conserver un schéma explicite de manière à éviter d'éventuels problèmes de convergence ou à limiter le calcul de prédicteurs, quitte à diminuer le pas de temps en conséquence<sup>4</sup>.

### 3.3 Systèmes d'axes utilisés

Pour clarifier la suite des développements, nous regroupons dans cette section la description de l'ensemble des systèmes d'axes utilisés dans la résolution du problème.

Le champ des débits spécifiques (et par extension des vitesses) est décrit dans le système d'axes global  $O_{XYZ}$ . Les efforts et le couple résultants nécessaires à la résolution de l'équation du mouvement sont ramenés dans le système d'axes  $O'_{x'y'z'}$  lié uniquement à la dérive  $\theta$  du bateau. Ce repère diffère du repère  $O$  par une translation plan  $\underline{r} = (X_{cm}, Y_{cm}, 0)$  égale à celle du centre de masse et par une rotation d'un angle  $\theta$  (positif dans le sens trigonométrique) autour de l'axe  $Z$  (figure 3.3.1). Les axes  $Z$  et  $z'$  sont donc identiques et définissent la direction verticale du problème<sup>5</sup>.  $X$  et  $Y$  définissent le plan horizontal.

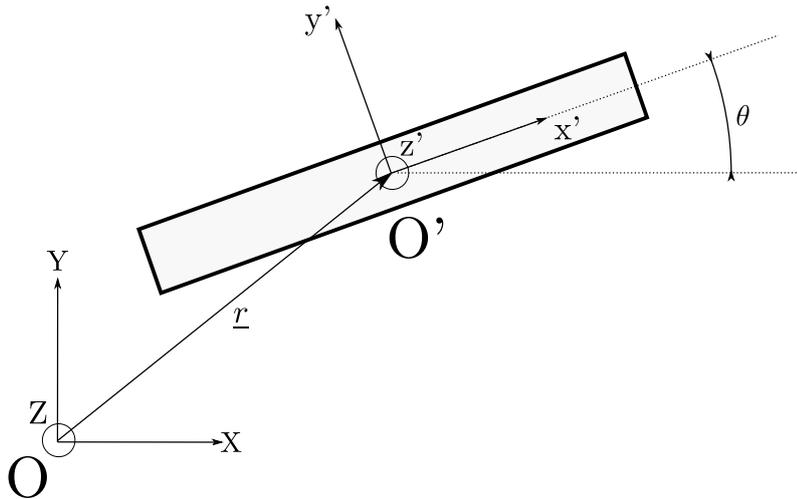


FIGURE 3.3.1 – Passage du repère  $O$  au repère  $O'$

Nous passons de  $O$  à  $O'$  via :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \underline{r} \right) = \underline{R}_\theta \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \underline{r} \right) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

En plus de subir une dérive, le bateau est également sujet à deux autres inclinaison  $\phi$  et  $\psi$  appelées respectivement assiette et gîte. Rappelons que ces deux inclinaisons sont traitées

4. Cfr. étude menée sur le pas de temps pour l'application au bief de Meuse (section 5.2.1)

5. Celle selon laquelle agit le poids.

uniquement de manière statique via un calcul d'enfoncement du bateau. La figure 3.3.2 présente ces deux inclinaisons (à nouveau définies positivement dans le sens trigonométrique) ainsi que le repère d'axe  $o_{xyz}$  associé.

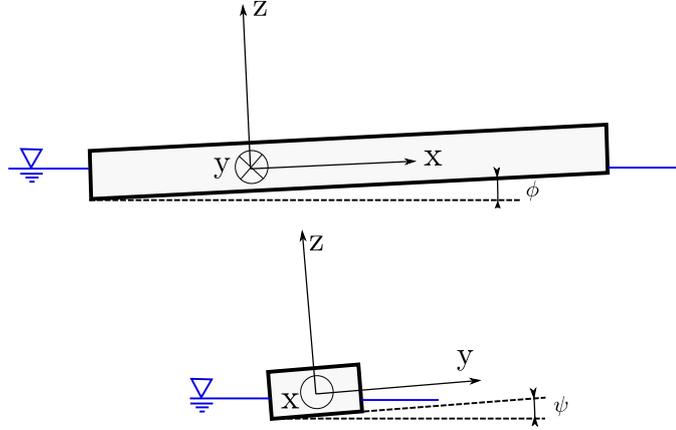


FIGURE 3.3.2 – Illustration des angles de gîte ( $\psi$ ) et d'assiette ( $\phi$ )

Pour passer du repère  $O$  au repère  $o$ , l'opération suivante est pratiquée :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \underline{r} \right) \\
 &= \underline{R}_{\psi} \underline{R}_{\phi} \underline{R}_{\theta} \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \underline{r} \right) \\
 &= \underline{R}_{\psi\phi\theta} \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \underline{r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

L'opération de rotation n'est pas commutative et la convention choisie est ici  $\psi\phi\theta$ <sup>6</sup>.

Un ensemble de système d'axes est ensuite défini dans le cadre d'une résolution par approche locale (Cfr. section 3.6.1). Dans cette approche, le bateau est discrétisé en différents type d'éléments plan (facettes correspondant à une fraction de l'aire immergée de la coque). Des repères liés à chaque type d'élément sont ainsi introduits (figure 3.3.3) selon l'orientation de leur normale.

6. Cette définition des angles d'inclinaison est choisie car elle permet une interprétation facile sur des vues en élévation. Il existe cependant d'autres manières de définir une opération de rotation de repère d'axe dans l'espace, par exemple via la définition des angles d'Euler.

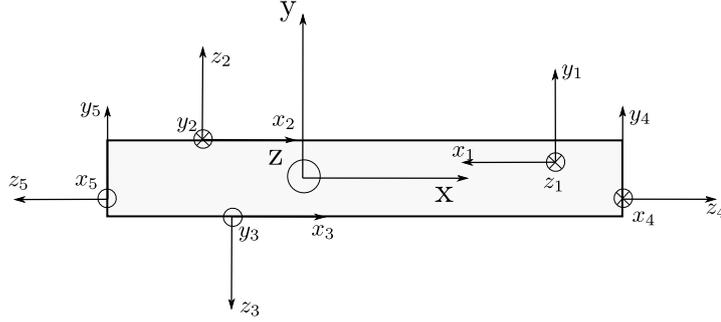


FIGURE 3.3.3 – Repères liés aux types d'éléments.

Dans cette optique, une matrice de rotation est associée à chaque type  $i$  d'élément et permet de passer du repère  $o$  au repère  $O_i$   $x_i y_i z_i$  où l'axe  $z_i$  est normal à la facette et pointe vers l'extérieur du bateau.

$$\underline{R}_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \underline{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{R}'_3 ; \underline{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{R}'_5 \quad (3.3.4)$$

Un autre repère, utile pour déterminer les vitesses liées à la rotation de dérive  $\dot{\theta}$  seule du bateau, est le repère  $O_\kappa$   $x_\kappa y_\kappa z_\kappa$  (Figure 3.3.4). Dans ce système d'axe  $\theta$  n'a en effet qu'une seule composante non-nulle, dirigée selon  $y_\kappa$ . La matrice de rotation permettant de passer de  $O'$  à  $O_\kappa$  est donnée par :

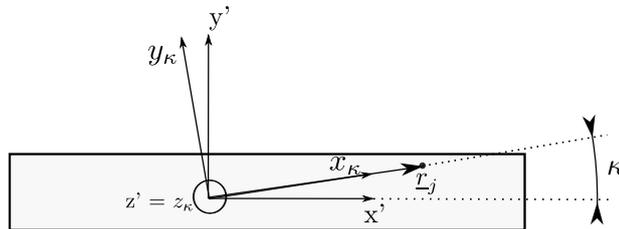


FIGURE 3.3.4 – Repère  $O_\kappa$

La matrice de rotation permettant de passer de  $O'$  à  $O_\kappa$  est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}_{\kappa} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\kappa} \\ y_{\kappa} \\ z_{\kappa} \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

Pour déterminer  $\kappa$ , nous disposons en pratique des coordonnées  $\underline{r}_j = (x'_j, y'_j)$  de l'élément  $j$  dans le repère  $O'$ , il vient donc :

$$\begin{aligned} \kappa &= \arctan\left(\frac{y'_j}{x'_j}\right) & \text{si } x'_j > 0 \\ \kappa &= \arctan\left(\frac{y'_j}{x'_j}\right) + \pi & \text{si } x'_j < 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

En effet, l'image de la fonction  $\arctan$  est comprise entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

Nous introduisons finalement un système d'axes local  $O_c x_c y_c z_c$  centré sur le coin inférieur gauche du bateau (figure 3.3.5). Le passage du repère  $O_c$  au repère  $O'$  consiste en une translation  $(x_{cm}, y_{cm})$ . Il est utilisé dans la section 3.4 et sert de base pour la réalisation d'équilibres statiques d'enfoncement du bateau.

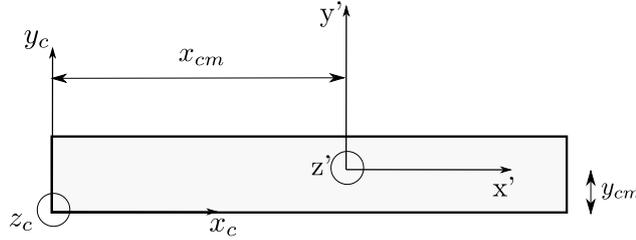


FIGURE 3.3.5 – Passage du repère  $O'$  au repère  $O_c$

Remarquons que l'ensemble des matrices de rotation sont caractérisées par le fait que leur inverse est égale à leur transposée, ce qui allège les opérations inverses de changement d'axes.

Dans la suite du travail, nous appelons les systèmes d'axes par leur origine.

### 3.4 Calcul de l'enfoncement du bateau

Dans cette section, l'attention est portée sur la détermination de l'enfoncement stabilisé du bateau. Cette opération doit être menée au début de chaque pas de temps pour permettre l'évaluation des efforts horizontaux nécessaires à la résolution de l'équation du mouvement.

Dans un premier temps, le calcul est mené de manière complète via un équilibre vertical et en rotation avec l'ensemble des efforts agissant sur la structure. La non-linéarité du problème, liée à l'inclinaison du bateau, impose une résolution itérative.

Dans un second temps, le système est simplifié moyennant plusieurs hypothèses, de manière à le rendre linéaire. La solution peut ainsi être obtenue directement et servir de condition initiale pour le problème complet.

Le domaine d'application de la méthode linéarisée est finalement étudié.

Ces méthodes de résolution d'enfoncement statique du bateau sont utilisées telles quelles dans l'approche locale. Dans les développements qui suivent, nous anticipons la description de cette approche présentée à la section 3.6.1.

Le calcul de l'enfoncement du bateau est particularisé dans l'approche moyennée qui est limitée au cas d'une surface libre horizontale (Cfr. section 3.6.2).

### 3.4.1 Méthode complète

Ce problème vise à obtenir le tirant d'eau vertical stabilisé de chacun des points du fond du bateau pour un temps  $t$  donné.

Les entrées du problème sont :

- Le champ de hauteur d'eau  $H(X, Y)$ ,
- La position  $\underline{r}^{t-1} = (X_{cm}, Y_{cm})^{t-1}$  du centre de masse dans le domaine, issue du pas de temps précédent. En fonction de la répartition de masse sur le bateau, on connaît également sa position dans les repères  $O'$  et  $O_c$ . Son élévation  $h_{cm}$  est connue dans le repère  $o$ ,
- La dérive  $\theta$  du bateau, issue du pas de temps précédent.

En pratique, la donnée  $H(X, Y)$  est le résultat du traitement du champ discret de hauteurs d'eau :

- Pour un pas de temps donné, nous identifions la position de chaque point de discrétisation du bateau dans le repère d'axe  $O$ ,
- Nous évaluons la hauteur  $H$  en chacun des points de discrétisation par une moyenne pondérée des valeurs (du champ connu de hauteur d'eau) les plus proches. Le choix est porté sur une moyenne arithmétique ou mais la possibilité d'une moyenne pondérée par rapport à la distance et incluse dans la routine de calcul.

Pour chaque point de discrétisation, nous associons donc une valeur de hauteur d'eau qui indépendante du système d'axe (valeur scalaire).

On commence par décrire le plan du fond du bateau dans le repère  $O_c$  lié au coin inférieur gauche du bateau. Les trois paramètres de description du plan, qui constituent les inconnues du problème, sont  $h_{00}$ ,  $h_{10}$  et  $h_{01}$ <sup>7</sup> (figure 3.4.1 et 3.4.2), les élévations des coins du fond du bateau par rapport à une cote de référence dans le repère  $O_c$  :

---

<sup>7</sup>. Cette notation binaire est introduite pour identifier facilement à quel coin du fond du bateau est associé chaque inconnue.

$$\begin{aligned}
 h(0,0) &= h_{00} \\
 h(0, b \cos(\phi)) &= h_{01} \\
 h(l \cos(\psi), 0) &= h_{10}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1}$$

En définissant au préalable les angles d'assiette et de gîte  $\phi$  et  $\psi$  en fonction des inconnues (cfr. section 3.3 pour la convention de signe) :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \arcsin\left(\frac{h_{10} - h_{00}}{l}\right) \\
 \psi &= \arcsin\left(\frac{h_{01} - h_{00}}{b}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.4.2}$$

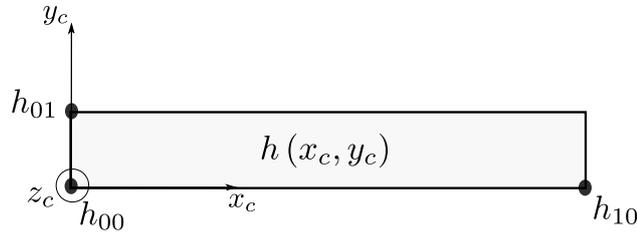


FIGURE 3.4.1 – Description du fond plan du bateau - vue en plan

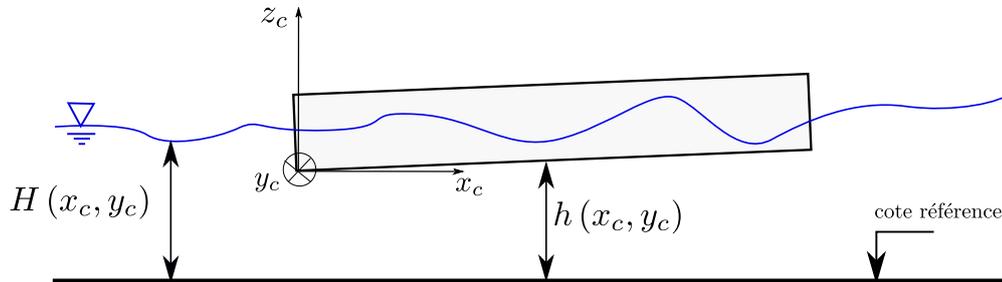


FIGURE 3.4.2 – Description du fond plan du bateau - vue en élévation

On remarque que les positions auxquelles les hauteurs  $h_{00}$ ,  $h_{10}$  et  $h_{01}$  sont définies dépendent d'elles-mêmes en vertu des inclinaisons  $\phi$  et  $\psi$  du fond du bateau. Cet aspect constitue une première non-linéarité.

Le plan  $\Gamma$  du fond du bateau est ainsi décrit par l'équation :

$$\Gamma \equiv h(x_c, y_c) = \frac{x_c (h_{10} - h_{00})}{l \cos(\phi)} + \frac{y_c (h_{01} - h_{00})}{b \cos(\psi)} + h_{00} = 0
 \tag{3.4.3}$$

On introduit une notation plus compacte pour clarifier le développement

$$\Gamma \equiv h(x_c, y_c) = A (h_{10} - h_{00}) + B (h_{01} - h_{00}) + h_{00} = 0
 \tag{3.4.4}$$

L'inconnue finale est le tirant d'eau, défini dans le repère  $O_c$  par :

$$T(x_c, y_c) = H(x_c, y_c) - h(x_c, y_c) \quad (3.4.5)$$

Nous pouvons écrire un système de trois équations à trois inconnues  $h_{00}$ ,  $h_{10}$  et  $h_{01}$  en considérant un équilibre vertical et deux équilibres en rotation autour du centre de masse.

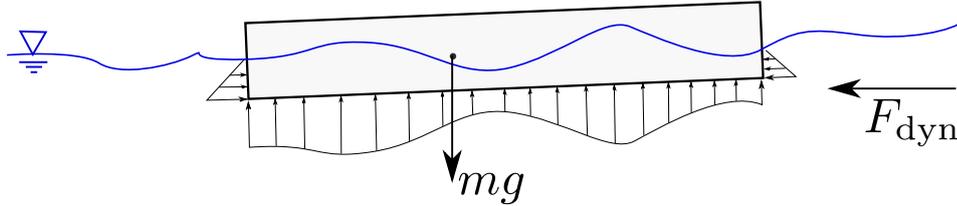


FIGURE 3.4.3 – Schéma d'équilibre et efforts appliqués

Les efforts intervenant dans l'équilibre sont détaillés ci-dessous (figure 3.4.3) :

- Le premier effort appliqué est la pression hydrostatique, appliquée perpendiculairement à la coque dans toute la partie immergée du bateau. Dans les axes  $O_i$  liés au type d'élément, elle prend la forme (avec  $j$  un élément de type  $i$ ) :

$$p_{\text{hydrostat},j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_j \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

Pour des éléments de fond,  $p_j$  vaut :

$$p_j = -\rho_w g (H_j - h_j) dl db \quad (3.4.7)$$

Tandis que pour les éléments de bords :

$$p_j = -\rho_w g \frac{(H_j - h_j)^2}{2 \cos \phi} dl \quad (3.4.8)$$

sur les bords latéraux et :

$$p_j = -\rho_w g \frac{(H_j - h_j)^2}{2 \cos \psi} db \quad (3.4.9)$$

sur les bords d'extrémités.

La configuration pour un bord latéral est présentée à la figure 3.4.4. Nous faisons ici l'hypothèse que  $T_j = \tilde{T}_j$ . Et nous avons ainsi :

$$T_j^* = \frac{T_j}{\cos \psi} \quad (3.4.10)$$

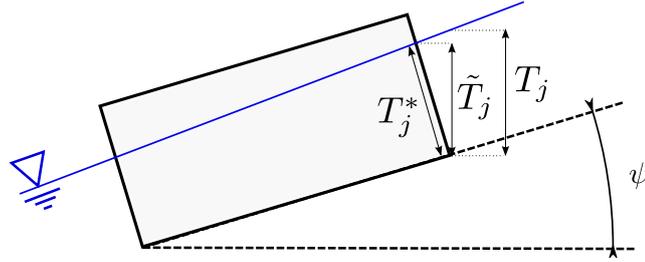


FIGURE 3.4.4 – Pression hydrostatique sur les bords

Remarquons que les pressions hydrostatiques sont dirigés selon la normale à la coque. Exprimées dans les repères  $O_i$ , elles sont donc négatives car  $z_i$  pointe vers l'extérieur de la coque.

- Le deuxième effort est le poids propre  $mg$  appliqué au centre de masse et vertical,
- Le troisième effort regroupe les contributions hydrodynamiques. Celles-ci sont liés à la vitesse relatives entre le bateau et l'écoulement qui est quoiqu'il en soit comprise dans le plan horizontal, de sorte que l'effort est dirigé horizontalement<sup>8</sup>. En pratique, pour soulager la résolution du système, nous considérerons les moments introduits par les efforts hydrodynamiques du pas de temps précédent. La condition initiale consistera à effectuer une approximation de ces moments en calculant les efforts hydrodynamiques agissant sur le bateau pour un enfoncement calculé uniquement sur base du poids et des pressions hydrostatiques.

Cet composante liée à l'hydrodynamique n'est pas négligeable comme le montre les essais menés au laboratoire (cfr. section 4.1.1).

On définit les  $\underline{R}_{i\psi\phi}$  comme étant les matrices de rotation qui permettent de passer des axes  $O_i$  aux axes  $O'$ . Elles permettent de ramener les pressions hydrostatiques (calculées dans  $O_i$ ) dans le repère  $O'$  pour effectuer l'équilibre vertical.

$$\underline{R}_{i\psi\phi} = \underline{R}_i \underline{R}_\psi \underline{R}_\phi \quad (3.4.11)$$

Les équilibres vont ainsi être menés par intégrations des efforts et moments sur les  $n_f$  éléments de fond et les  $n_b = n_{b,\text{lat}} + n_{b,\text{ext}}$  éléments de bords.

8. En réalité, il existe une composante verticale liée aux efforts hydrodynamiques, son origine peut être expliquée par analogie au développement effectué à la section 4.1.2. En raison des petits angles de gîte et d'assiette elle sera ici considérée comme nulle de sorte que les efforts hydrodynamiques n'interviennent pas dans l'équilibre vertical.

**Équilibre vertical**

$$\begin{aligned}
 & \sum_j^{n_f} \underline{R}_{i\psi\phi}^{-1}(3,3) (-\rho_w g (H_j - h_j) dl db) \\
 & + \sum_j^{n_{b,lat}} \underline{R}_{i\psi\phi}^{-1}(3,3) \left( -\rho_w g \frac{(H_j - h_j)^2}{2 \cos \psi} dl \right) \\
 & + \sum_j^{n_{b,ext}} \underline{R}_{i\psi\phi}^{-1}(3,3) \left( -\rho_w g \frac{(H_j - h_j)^2}{2 \cos \phi} db \right) \\
 & - mg = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Nous réécrivons de manière compacte cette expression :

$$\begin{aligned}
 & \sum_j^{n_f} \underline{R}_{i\psi\phi}^{-1}(3,3) (\rho_w g h_j dl db) + C \\
 & + D = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

**Équilibres en rotation** Les équilibres en rotation sont écrits autour du centre de masse dans le repère  $o$  de sorte que le poids introduit un moment nul.

**Autour de  $x$** 

$$\begin{aligned}
 & \sum_j^{n_f} -\rho_w g (H_j - h_j) dl db (y_{c,j} - y_{cm}) R_{type,i}^{-1}(3,3) \\
 & + \sum_j^{n_{b,lat}} -\rho_w g \frac{(H_j - h_j)}{2 \cos \psi} dl \left( \frac{1}{3} \frac{(H_j - h_j)}{\cos \psi} - h_{cm} \right) R_i^{-1}(2,3) \\
 & + M_{dyn,x} = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Nous réécrivons de manière compacte cette expression :

$$\begin{aligned}
 & \sum_j^{n_f} -\rho_w g h_j dl db (y_{c,j} - y_{cm}) R_i^{-1}(3,3) + E \\
 & + F = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

**Autour de  $y$** 

$$\begin{aligned}
 & \sum_j^{n_f} -\rho_w g (H_j - h_j) dl db (x_{c,j} - x_{cm}) R_i^{-1}(3,3) \\
 & + \sum_j^{n_{b,lat}} -\rho_w g \frac{(H_j - h_j)}{2 \cos \phi} dl \left( \frac{1}{3} \frac{(H_j - h_j)}{\cos \phi} - h_{cm} \right) R_i^{-1}(1,3) \\
 & + M_{dyn,y} = 0
 \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Nous réécrivons de manière compacte cette expression :

$$\sum_j^{n_f} -\rho_w g h_j d l d b (x_{c,j} - x_{cm}) R_i^{-1}(3, 3) + G \quad (3.4.17)$$

$$+ H = 0$$

### Système complet

$$\begin{bmatrix} \sum_j^{n_f} \underline{R}_{i\psi\phi}^{-1}(3, 3) (-\rho_w g d l d b) [(A + B - 1) & -A & -B] \\ -\sum_j^{n_f} \rho_w g d l d b (y_i - l_{y,m}) R_i^{-1}(3, 3) [(A + B - 1) & -A & -B] \\ -\sum_j^{n_f} \rho_w g d l d b (x_i - l_{x,m}) R_i^{-1}(3, 3) [(A + B - 1) & -A & -B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} \\ h_{10} \\ h_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C - D \\ -E - F \\ -G - H \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} h_{00} \\ h_{10} \\ h_{01} \end{bmatrix} = \underline{\underline{b}} \quad (3.4.18)$$

Le système est écrit de manière linéaire en  $h_{00}$ ,  $h_{10}$  et  $h_{01}$  mais  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{b}}$  sont fonction de  $h_{00}$ ,  $h_{10}$  et  $h_{01}$ . Le système doit ainsi être résolu de manière itérative. Nous utilisons comme condition initiale le résultat de la méthode simplifiée (cfr. section 3.4.2).

Une fois la convergence atteinte, il suffit d'utiliser l'équation (3.4.4) du plan  $h(x_c, y_c)$  et l'équation (3.4.5) pour déterminer le tirant d'eau en chacun des points de discrétisation.

#### 3.4.2 Méthode simplifiée

Les données du problème sont :

- Le champ de hauteur d'eau  $H(X, Y)$ ,
- La répartition surfacique de masse  $\mu(x, y)$ ,
- Les moment hydrodynamiques autour de  $x_c$  et  $y_c$  issus du pas de temps précédent.

L'inconnue est toujours le tirant d'eau, défini dans  $O_c$  par :

$$T(x_c, y_c) = H(x_c, y_c) - h(x_c, y_c) \quad (3.4.19)$$

où  $h(x_c, y_c)$  désigne la hauteur du fond plan  $\Gamma$  du bateau qui est décrit par les inconnues  $h(0, 0) = h_{00}$ ,  $h(l, 0) = h_{10}$  et  $h(0, b) = h_{01}$ .

$$\Gamma \equiv h(x_c, y_c) \frac{x_c}{l} (h_{10} - h_{00}) + \frac{y_c}{b} (h_{01} - h_{00}) + h_{00} \quad (3.4.20)$$

$H(x_c, y_c)$  est récupérée de manière identique à celle employée pour la méthode complète.

Dans le cadre de cette méthode simplifiée, nous faisons l'hypothèse que les inclinaisons de gîte et d'assiette du bateau sont petites, ce qui est généralement le cas pour des bateaux capacitifs. De plus nous considérons que la pente de surface libre est elle aussi petite. Ces hypothèses permettent de négliger les moments introduits par les composantes horizontales de la pression hydrostatique, tout simplement car cette dernière se compense de part et d'autre du bateau. Sous ses conditions, les repères  $O'$  et  $o$  se confondent.

Au final, les équilibres ne font intervenir que le poids, les efforts dynamiques et la composante verticale de la pression hydrostatique, i.e la poussée d'Archimède.

**Équilibre vertical** Cet équilibre exprime le fait que le poids du bateau est équilibré par la poussée d'Archimède.

$$\int_0^l \int_0^b \mu(x_c, y_c) g dx_c dy_c = \int_0^l \int_0^b T(x_c, y_c) \rho_w g dx_c dy_c \quad (3.4.21)$$

### Équilibres en rotation

#### Autour de l'axe $x_c$

$$\int_0^l \int_0^b \mu(x_c, y_c) y_c g dx_c dy_c + M_{\text{dyn},x} = \int_0^l \int_0^b T(x_c, y_c) y_c \rho_w g dx_c dy_c \quad (3.4.22)$$

#### Autour de l'axe $y_c$

$$\int_0^l \int_0^b \mu(x_c, y_c) x_c g dx_c dy_c + M_{\text{dyn},y} = \int_0^l \int_0^b T(x_c, y_c) x_c \rho_w g dx_c dy_c \quad (3.4.23)$$

L'accélération de pesanteur  $g$  est constante et présente dans les deux termes et peut donc être simplifiée.

L'information  $T(x_c, y_c)$  est discrète et son intégration se calcule par sommation sur l'ensemble des  $n$  points de discrétisation.

La répartition surfacique de masse est définie par l'utilisateur en fonction du chargement du bateau. Dans la routine elle est définie de manière discrète ( $m$  points) suivant un schéma de discrétisation différent de celui utilisé pour le calcul de la trajectoire du bateau (figure 3.1.2).

les équations peuvent ainsi être réécrites de la manière suivante :

$$\sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) \rho_w dl db = \int_0^l \int_0^b -h(x_c, y_c) \rho_w dx_c dy_c \quad (3.4.24)$$

$$\sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) y'_j dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) y_{c,i} \rho_w dl db + M_{\text{dyn},x} = \int_0^l \int_0^b -h(x_c, y_c) y_c \rho_w dx_c dy_c \quad (3.4.25)$$

$$\sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) x'_j dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) x_{c,i} \rho_w dl db + M_{\text{dyn},y} = \int_0^l \int_0^b -h(x_c, y_c) x_c \rho_w dx_c dy_c \quad (3.4.26)$$

Les intégrales du terme de droite sont directes (fonction polynomiale)

$$\sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) \rho_w dl db = h_{00}(0) + h_{10} \left( -\frac{bl}{2} \right) + h_{01} \left( -\frac{bl}{2} \right) \quad (3.4.27)$$

$$\sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) y'_j dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) y_{c,i} \rho_w dl db + M_{\text{dyn},x} = h_{00} \left( \frac{b^2 l}{12} \right) + h_{10} \left( -\frac{b^2 l}{4} \right) + h_{01} \left( -\frac{b^2 l}{3} \right) \quad (3.4.28)$$

$$\sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) x'_j dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) x_{c,i} \rho_w dl db + M_{\text{dyn},y} = h_{00} \left( \frac{bl^2}{12} \right) + h_{10} \left( -\frac{bl^2}{3} \right) + h_{01} \left( -\frac{bl^2}{4} \right) \quad (3.4.29)$$

Ce set d'équations linéaires en  $h_{00}$ ,  $h_{10}$  et  $h_{01}$  peut ainsi être réécrit sous forme matricielle.

$$\rho_w \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bl}{2} & -\frac{bl}{2} \\ \frac{bl^2}{12} & -\frac{b^2 l}{4} & -\frac{b^2 l}{3} \\ \frac{bl^2}{12} & -\frac{bl^2}{3} & -\frac{bl^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} \\ h_{10} \\ h_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) \rho_w dl db \\ \sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) y'_j dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) y_{c,i} \rho_w dl db + M_{\text{dyn},x} \\ \sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) x'_j dl' db' - \sum_{i=1}^n H(x_{c,i}, y_{c,i}) x_{c,i} \rho_w dl db + M_{\text{dyn},y} \end{bmatrix} \quad (3.4.30)$$

Nous inversons finalement le système pour obtenir les trois inconnues qui décrivent le plan du fond du bateau et on obtient le tirant via l'équation (3.4.19). Comme annoncé précédemment, cette solution peut servir de condition initiale pour la résolution itérative du problème complet.

### 3.4.3 Comparaison des méthodes de calcul d'enfoncement

Les deux méthodes peuvent être comparées pour déterminer le domaine d'application de la méthode simplifiée. Cette dernière est basée sur l'hypothèse que les pressions hydrostatiques latérales se compensent et n'introduisent donc pas de couple résultant selon l'assiette ou le gîte dans les équilibres statiques en rotation. En d'autres termes, la méthode simplifiée est indépendante de l'élévation  $h_{\text{cm}}$  du centre de masse.

On se place dans le cas général d'un bateau chargé non-uniformément, i.e. :

$$R = \begin{bmatrix} 500 & 550 & 850 \\ 500 & 500 & 700 \end{bmatrix} \text{ tonnes} \quad (3.4.31)$$

La figure 3.4.5 présente les solutions obtenues pour les trois inconnues ( $T_{00} = H(0, 0) - h_{00}$ ,  $T_{01} = H(0, b) - h_{01}$  et  $T_{10} = H(l, 0) - h_{10}$ ) en fonction de l'élévation du centre de masse.

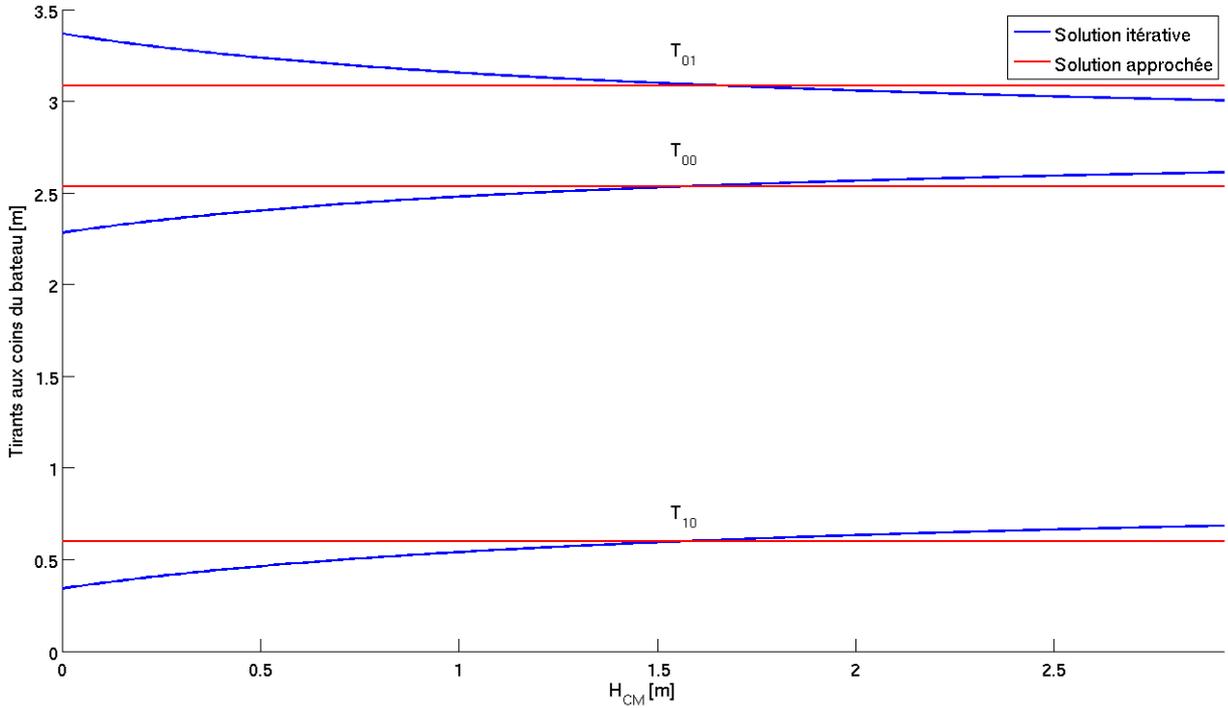
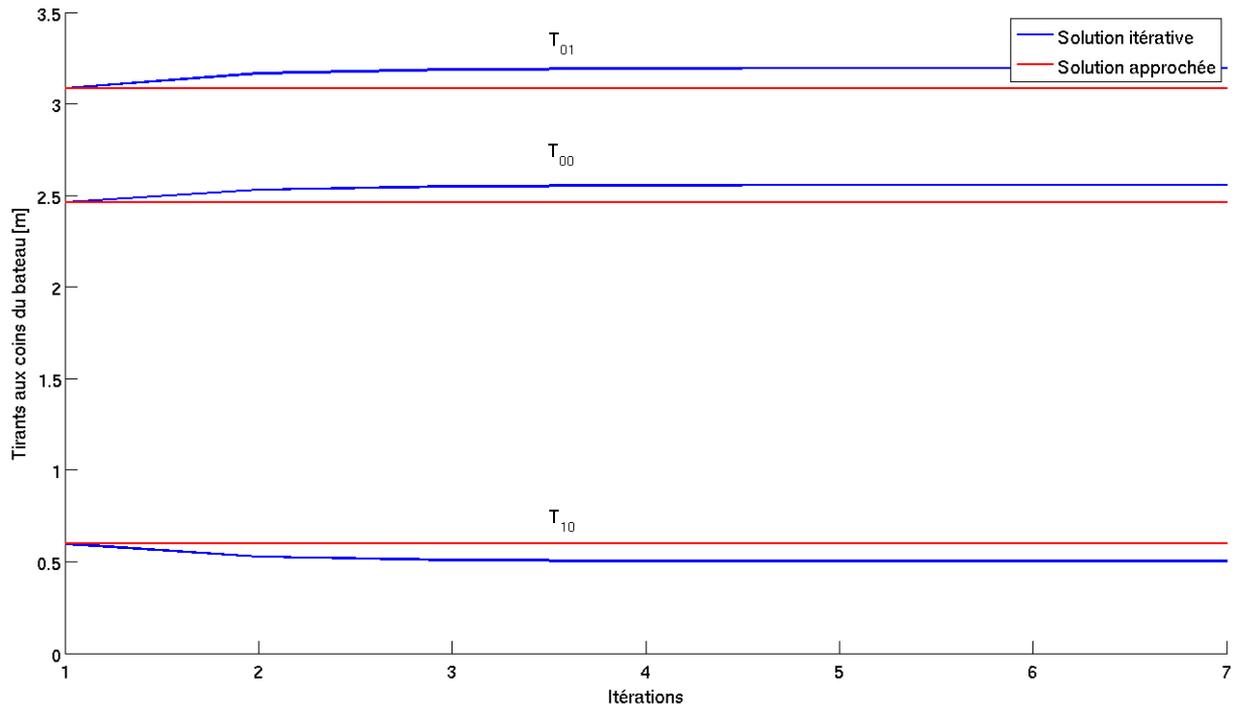


FIGURE 3.4.5 – Divergence entre les méthodes simplifiée et complète en fonction de  $h_{cm}$

Il existe une élévation donnée  $h_{cm,eq}$  qui est telle que les pressions hydrostatiques latérales se compensent réellement. Dans cette configuration, la méthode complète fournit, après convergence, le même résultat que la méthode simplifiée. Plus on s'écarte de cette valeur plus les méthodes divergent. En bonne approximation, la valeur de  $h_{cm,eq}$  vaut la moitié du tirant constant qui serait calculé si le bateau était uniformément chargé ; en l'occurrence :

$$T = \frac{m}{\rho_w l b} = 3,15 \text{ m} \quad (3.4.32)$$

Pour illustrer la vitesse de convergence de la méthode complète, nous considérons une configuration avec une élévation  $h_{cm}$  donnée et nous observons le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. En pratique, un critère de convergence qui stipule une différence inférieure au centimètre entre deux itérations successives sur les trois inconnues est spécifié. La figure 3.4.6 présente la convergence de la méthode complète, atteinte après 7 itérations, pour  $h_{cm} = 0,73m$ .

FIGURE 3.4.6 – Convergence de la solution complète pour  $h_{cm} = 0,73m$ 

Étant donné la bonne approximation apportée par la méthode simplifiée, nous choisissons de travailler avec cette dernière dans la routine de calcul, de manière à réduire le temps de calcul. L'approximation est d'autant meilleure que  $h_{cm} \rightarrow h_{cm,eq}$  ce qui est généralement le cas pour un bateau capacitif où le centre de masse est situé dans la partie immergée du bateau.

### 3.5 Résultante de pression hydrostatique

Le calcul de l'enfoncement du bateau présenté à la section précédente est basé sur un équilibre entre deux efforts de direction verticale : le poids du bateau et la résultante de pression hydrostatique verticale (poussée d'Archimède verticale) et sur deux équilibres en rotation. Aucun équilibre horizontal lié à la statique n'est considéré.

À vrai dire cet équilibre horizontal mène à une résultante nulle dans des cas usuels du calcul statique de l'enfoncement d'un bateau, à savoir un plan d'eau au repos caractérisé par une surface libre horizontale. Le bateau est alors au repos avec l'enfoncement calculé.

Dans le cas qui nous occupe, la situation est différente ; la surface libre n'est pas nécessairement horizontale et comme le calcul du tirant ne garantit que l'équilibre vertical, il convient d'évaluer une éventuelle résultante horizontale.

L'illustration de ce propos est présentée à la figure 3.5.1. Nous nous plaçons en deux dimensions avec une surface libre linéaire. Cette dernière est horizontale dans le cas a) et inclinée d'un angle<sup>9</sup>

9. Cet angle est considéré petit de sorte que  $\sin \phi \simeq \tan \phi \simeq \phi$  et  $\cos \phi \simeq 1$

$\phi$  dans le cas b).

Il est évident que le bateau est au repos dans la situation a), pour autant que les équilibres pré-étudiés soient vérifiés.

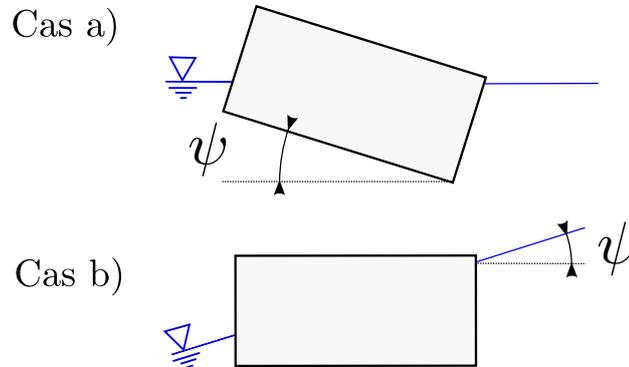


FIGURE 3.5.1 – Différence entre surface libre horizontale et inclinée

Dans la situation b), il y a deux manières de mettre en évidence le déséquilibre horizontal (illustrées à la figure 3.5.2). Pour illustrer, nous nous plaçons dans le cas simplifié où le fond du bateau est horizontal. Cette situation existe et est liée à un chargement particulier du bateau combiné à une sollicitation dynamique particulière elle aussi.

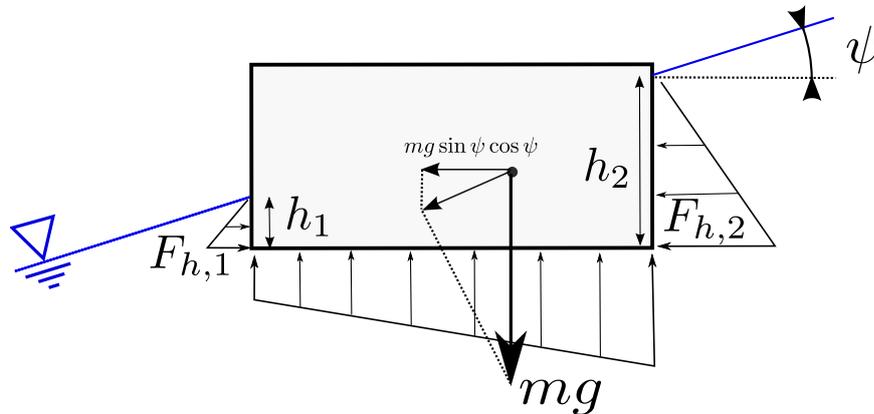


FIGURE 3.5.2 – Illustration d'une résultante statique horizontale dans un cas simplifié

D'une part, le problème peut être abordé en considérant que la force motrice est le poids. C'est l'approche traditionnellement employée dans la littérature (cfr. section 2.3.3) quand l'inclinaison de la surface libre est connue et constante (en écoulement uniforme par exemple). À la manière d'un corps rigide posé sur un plan incliné, on décompose le poids en deux composantes respectivement normale et tangentielle à la surface libre :

•

$$W_{\perp} = mg \cos \psi \simeq mg \quad (3.5.1)$$

Cette composante est compensée par la poussée hydrostatique verticale.

$$W_{\parallel} = mg \sin \psi \simeq mg \psi \quad (3.5.2)$$

est l'effort moteur en  $N/m$ . Projetée sur l'horizontale, elle vaut :

$$W_{\parallel,h} = mg \sin \psi \cos \psi \simeq mg\psi \simeq W_{\parallel} \quad (3.5.3)$$

En réalité, le poids est entièrement compensé par la poussée hydrostatique verticale. Nous préférons donc voir l'effort résultant horizontal comme un différentiel de pression hydrostatique.

$$F_h = \frac{\rho_w g}{2} (h_2^2 - h_1^2) \quad (3.5.4)$$

Nous allons cependant prouver que les deux approches sont équivalentes dans le cas d'un petit angle  $\psi$ . En effet, le poids du bateau (calculé ici comme étant le poids du volume d'eau déplacé) est donné par :

$$m = \frac{h_1 + h_2}{2} b \rho_w \quad (3.5.5)$$

et le différentiel de hauteur d'eau par :

$$dh = h_2 - h_1 = b \tan \psi \simeq b\psi \iff b \simeq \frac{h_2 - h_1}{\psi} \quad (3.5.6)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} W_{\parallel,h} &\simeq mg\psi \\ &\simeq \frac{h_1 + h_2}{2} b \rho_w g \psi \\ &\simeq \frac{h_1 + h_2}{2} \frac{h_2 - h_1}{\psi} \rho_w g \psi \\ &\simeq \frac{\rho_w g}{2} (h_2^2 - h_1^2) = F_h \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Malgré l'équivalence des deux approches, il est difficile en pratique de se baser sur le poids projeté pour déduire l'effort moteur statique horizontal. En effet, pour une surface libre irrégulière, on ne peut pas identifier l'angle d'inclinaison  $\psi$ .

Un module intégré dans la routine de prédiction de trajectoire évalue donc l'effort horizontal par calcul d'un différentiel de pression hydrostatique.

Ce calcul est mené en associant à chaque élément de discrétisation un vecteur écrit dans les axes  $O_i$  liés au type d'élément qui prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\Omega \end{bmatrix} \quad (3.5.8)$$

La valeur  $d\Omega$  correspond à la surface associée à l'élément considéré. On peut ainsi projeter cette surface dans les axes globaux  $O$  de l'écoulement :

$$\underline{\underline{R}}_{\psi\phi\theta}^{-1} \underline{\underline{R}}_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\Omega_X \\ d\Omega_Y \\ d\Omega_Z \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

Ces surfaces projetées contiennent un signe. Pour comprendre physiquement à quoi il correspond, prenons le cas de  $d\Omega_X$  ; si la valeur est positive (resp. négative), la surface projetée pointe vers les  $X$  positifs (res. négatifs). Cela signifie que la pression hydrostatique qui agit sur cette facette projetée contribue à un effort moteur dirigé vers les  $X$  négatifs (resp. positifs).

En pratique, on n'utilise pas l'information  $d\Omega_Z$  la pression hydrostatique associée est compensée par le poids du bateau (équilibre vertical résultat du calcul de l'enfoncement du bateau).

En intégrant sur l'ensemble des éléments de discrétisation, on peut ainsi déterminer des efforts résultants liés au différentiel de pression hydrostatique. Pour déterminer les efforts locaux, il convient de distinguer :

- les éléments de fond : On peut considérer que la pression hydrostatique est constante sur la surface projetée car d'une part la taille de l'élément est limitée (raffinement de la discrétisation) et d'autre part, l'inclinaison du bateau est faible. Les efforts associés valent :

$$\begin{aligned} F_{\text{hydrostat},X,j} &= d\Omega_X T_j \rho_w g \\ F_{\text{hydrostat},Y,j} &= d\Omega_Y T_j \rho_w g \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

- les éléments latéraux : ces éléments ont une extension verticale égale au tirant local, les efforts associés valent donc :

$$\begin{aligned} F_{\text{hydrostat},X,j} &= d\Omega_X \frac{T_j}{2} \rho_w g \\ F_{\text{hydrostat},Y,j} &= d\Omega_Y \frac{T_j}{2} \rho_w g \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

On évalue également un couple résultant de dérive lié à ce différentiel de pression hydrostatique en projetant les efforts calculés dans les axes locaux du bateau et en les multipliant par leur bras de levier. La convention est que le moment de rotation en dérive est positif dans le sens trigonométrique (figure 3.5.3).

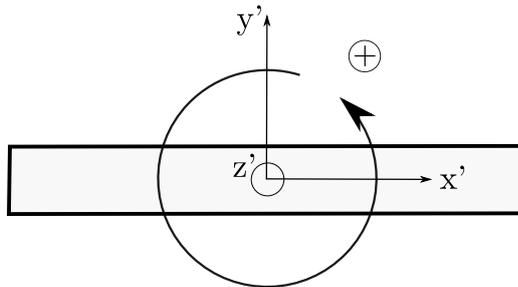


FIGURE 3.5.3 – Convention pour le moment de rotation de dérive

## 3.6 Calcul des efforts hydrodynamiques

À ce stade du calcul, l'enfoncement du bateau ainsi que la résultante horizontale de pression hydrostatique sont connus. Pour résoudre l'équation du mouvement, il convient de déterminer les efforts hydrodynamiques. Leur évaluation est menée selon deux approches :

- L'approche locale lie l'information locale de vitesse à une information locale de pression hydrodynamique et intègre cette dernière sur l'ensemble de la surface mouillée.
- L'approche moyennée transforme les informations locales de vitesse en une information de vitesse moyennée sur l'emprise du bateau. Cette vitesse moyennée est liée à un effort résultant.

Le passage d'une vitesse à une pression dynamique est de la forme :

$$p = \frac{1}{2} \rho_w C v_{\text{rel}}^2 \quad (3.6.1)$$

L'effort est obtenu en multipliant  $p$  par une surface (surface locale en approche locale, maître couple global en approche moyennée).

La caractérisation et le sens physique qui peut être affecté au coefficient  $C$  selon l'approche envisagée est également discuté dans cette section.

### 3.6.1 Approche locale

La première approche de calcul des efforts dynamiques appliqués sur le bateau consiste à associer à une vitesse, agissant localement sur un point donné du bateau, une pression dynamique.

Par intégration sur l'ensemble de la surface mouillée de la coque, des efforts résultants dynamiques sont évalués de manière à rentrer dans l'équation du mouvement.

Le bateau est initialement décrit dans le repère  $o$ . Il est discrétisé en différents éléments plans auxquels sont associés une surface et une normale. Les pas spatiaux de discrétisation sont respectivement de longueur  $dl$  et  $db$  dans les directions  $x$  et  $y$ .

- Type 1 : élément de fond du bateau, la surface associée vaut  $dl \times db$ ,
- Type 2 et 3 : élément des faces latérales (définies comme les faces du grand côté du bateau), la surface associée est le produit du tirant d'eau local<sup>10</sup> par  $dl$ ,
- Type 4 et 5 : élément des faces d'extrémités (définies comme les faces du petit côté du bateau), la surface associée est le produit du tirant d'eau local par  $db$ .

La méthodologie utilisée à chaque pas temporel est la suivante :

---

10. Cfr. section 3.4 pour l'explication du calcul du tirant d'eau dans un champ de hauteur d'eau quelconque.

1. Identifier au pas de temps étudié les coordonnées des éléments du bateau dans les axes  $O$ .  
On utilise pour ce faire la matrice de rotation  $\underline{R}_{\psi\phi\theta}$ ,
2. Calculer l'enfoncement du bateau et la résultante horizontale de pression hydrostatique,
3. Évaluer les deux composantes de vitesse de l'écoulement  $v_X$  et  $v_Y$  agissant en chacun des points de discrétisation par une moyenne pondérée des  $n$  valeurs les plus proches du champ connu de vitesse :

- soit arithmétique (solution retenue, avec  $n = 4$ ) :

$$v_X = \frac{1}{n} \sum_i^n v_{X,i} \quad (3.6.2)$$

- soit pondérée par rapport à la distance  $r_{X,i}$  entre le point connu  $i$  du champ de vitesse et le point de discrétisation du bateau considéré :

$$v_X = \frac{\sum_i^n r_{X,i} v_{X,i}}{\sum_i^n r_{X,i}} \quad (3.6.3)$$

Une interpolation plus fine peut être réalisée à l'aide de la commande `interp2`. Mais cette opération est assez coûteuse en temps de calcul,

4. Retrancher à ces vitesses les vitesses de translation du bateau  $v_{\text{bateau},X}$  et  $v_{\text{bateau},Y}$  calculées au pas de temps précédent,
5. Se ramener aux axes locaux  $o$  grâce à  $\underline{R}_{\psi\phi\theta}$ ,
6. Soustraire les composantes de vitesse liées à la vitesse de rotation du bateau. Pour ce faire, on détermine pour chaque point de discrétisation une matrice de rotation qui permet de passer des axes  $O'$  aux axes  $O_\kappa$  (cfr. section 3.3). La vitesse de rotation est dirigée selon  $y_\kappa$  et vaut  $v_{y_\kappa,j} = \dot{\theta}r_j$ . À ce stade, les vitesses relatives agissant sur chacun des éléments de discrétisation sont connues,
7. Projeter les vitesses relatives dans les axes  $O_i$  liés au type d'élément via  $R_i$ ,
8. Relier les vitesses à des efforts :

- normal à la facette :

$$F_\perp = \frac{1}{2} C_\perp \rho_w S_j v_{z_i}^2 \quad (3.6.4)$$

- tangentiels à la facette

$$F_\parallel = \frac{1}{2} C_\parallel \rho_w S_j (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2) \quad (3.6.5)$$

avec  $S_j$  la surface liée à l'élément  $j$ ,

9. Ramener ces efforts dans le repère  $o$  puis dans le repère  $O$  en calculant leurs résultantes ainsi que les couples résultants. Le couple de dérive est utilisé dans l'équation de mouvement, les deux autres couples sont utilisés pour le calcul de l'enfoncement au pas de temps suivant,
10. Utiliser l'équation de mouvement décrite dans le section 2.1 pour calculer les coordonnées et vitesses du bateau au pas de temps suivant.

### Correction liée à la définition du coefficient de traînée

La méthodologie présentée ci-dessus introduit l'utilisation de deux coefficients  $C_{\perp}$  et  $C_{\parallel}$  qui permettent respectivement de relier la vitesse normale et tangentielle à des efforts appliqués localement sur la coque.

Le  $C_{\parallel}$  est associé à un effort de frottement et est calculé via la formule 58 de l'ITTC pour le frottement sur carène [Larsson and Raven, 2010].

$$C_{\parallel} \simeq C_f = \frac{0.075}{(\log_{10} Re - 2)^2} \quad \text{ITTC-58} \quad (3.6.6)$$

Pour des gammes de Reynolds classiques associées à ce genre d'application<sup>11</sup>, i.e.  $Re \in [10^6, 10^8]$  :

$$C_f = \mathcal{O}(10^{-3}) \quad (3.6.7)$$

Cet ordre de grandeur rend les composantes tangentielles négligeables par rapport à la composante normale, toute autre chose restant égale (ce qui est bien le cas ici). Dans la routine de calcul,  $C_f$  est ainsi fixé à une valeur nulle.

La définition du  $C_{\perp}$  est quant à elle plus ardue. Nous choisissons de l'assimiler à un coefficient de traînée. Étant donné le découpage du bateau en éléments associés à des surfaces planes, le choix est fait d'utiliser des coefficients de traînée théoriques liés à une plaque plane rectangulaire plongée dans un écoulement uniforme et normal à la plaque. Selon les dimensions de la plaque, le coefficient est compris entre 1,1 et 1,9 (figure 3.6.1).

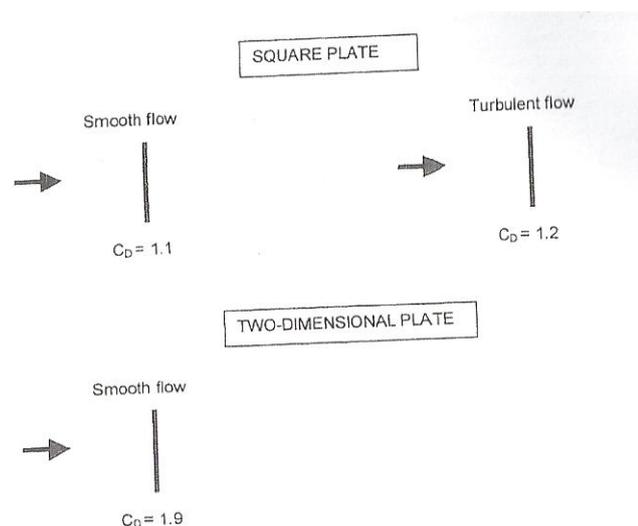


FIGURE 3.6.1 – Coefficient de traînée pour des plaques planes [Holmes, 2007]

11. En prenant une vitesse caractéristique et une longueur caractéristique égales respectivement à 1 m/s et 50 m.

L'utilisation directe d'une valeur comprise dans cet intervalle pour chaque élément du bateau n'est pas correcte. En effet, les coefficients de traînée théoriques sont évalués pour un corps pris dans son ensemble<sup>12</sup> et intègrent par conséquent les effets à l'amont et à l'aval du corps. Dans cette optique, le calcul d'un effort local normal à une facette de discrétisation doit être mené en considérant également la facette en vis-à-vis. De cette manière, l'utilisation de coefficients de traînée théoriques présents dans la littérature devient pertinente.

Dans la routine de calcul, la démarche est conservée jusqu'au moment où les efforts sont calculés. À cette étape du développement, les vitesses relatives agissant sur chaque des éléments dans les axes  $O_i$  liés au type d'élément sont connues. Le traitement des éléments de fond reste inchangé et on procède aux aménagements suivants pour les éléments de bord :

- Pour chaque élément  $j$  considéré, on identifie son vis-à-vis ( $j + 1$  dans la routine) situé de l'autre côté du bateau,
- Les forces liées aux vitesses tangentielles sont calculées pour chaque élément de la même manière que précédemment (nulles sous l'hypothèse  $C_{\parallel} = 0$ ),
- En ce qui concerne la force liée à la vitesse normale, on prend comme base la moyenne des surfaces immergées ainsi que la moyenne des vitesses relatives des deux éléments. Pour ces dernières, il convient de faire attention au fait que les deux éléments considérés diffèrent par le sens de leur axe normal, i.e.  $e_{z_j} = -e_{z_{j+1}}$  de sorte que la moyenne s'écrit :

$$\frac{v_{\text{rel},z_j} - v_{\text{rel},z_{j+1}}}{2} \quad (3.6.8)$$

Cette force est appliquée avec son signe sur l'élément  $j$ . Aucune force n'est appliquée sur l'élément  $j + 1$ ,

- Le couple résultant n'est pas influencé par le point d'application de cette force résultante pour deux éléments en vis-à-vis. En effet, seul le bras de levier compte, la force peut donc être appliquée n'importe où sur la droite reliant les deux éléments  $j$  et  $j + 1$  sans modifier la contribution au couple résultant.

Pour illustrer, supposons les éléments de bords 1 et 2, placés en vis-à-vis. Dans la routine non-corrigée, il vient l'effort résultant :

$$F_{\text{non-cor}} = 0,5\rho_w C_{\perp,\text{non-cor}}(S_1 v_1^2 + S_2 v_2^2) \quad (3.6.9)$$

Dans la routine corrigée, il vient l'effort résultant :

$$\begin{aligned} F_{\text{cor}} &= 0,5\rho_w C_{\perp,\text{cor}} \frac{S_1 + S_2}{2} \left( \frac{v_1 + v_2}{2} \right)^2 \\ &= 0,5\rho_w C_{\perp,\text{cor}} \frac{1}{8} \left( S_1 v_1^2 + S_2 v_2^2 + 2S_1 v_1 v_2 + 2S_2 v_1 v_2 + S_1 v_2^2 + S_2 v_1^2 \right) \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

---

12. Cet aspect a motivé le développement de l'approche moyennée développée à la section 3.6.2

L'utilisation de coefficients de traînée théoriques devient pertinente pour définir  $C_{d,cor}$ . Tandis que la valeur de  $C_{d,non-cor}$  reste difficile à décrire.

Une simplification peut être adoptée en champ de vitesse uniforme (cfr. section 4.1.2). Dans cette configuration,  $v_1 = v_2 = v$ , et l'utilisation de la méthode moyennée revient à considérer  $C_{d,non-cor} = 0,5C_{d,cor}$  pour les éléments de bords. En effet, il suffit de comparer  $F_{non-cor}$  et  $F_{cor}$  dans ce cas de figure. Il vient :

$$\begin{aligned}
 F_{non-cor} &= 0,5\rho_w \frac{C_{\perp,cor}}{2} v^2 (S_1 + S_2) \\
 &= 0,5\rho_w \frac{1}{8} C_{\perp,cor} v^2 (4S_1 + 4S_2) \\
 &= 0,5\rho_w \frac{1}{8} C_{\perp,cor} v^2 (S_1 + S_2 + 2S_1 + 2S_2 + S_1 + S_2) = F_{cor}
 \end{aligned}
 \tag{3.6.11}$$

La méthode locale implémentée dans la routine intègre cette correction et justifie l'utilisation de coefficients de traînée théoriques liée à des plaques planes pour définir  $C_{\perp,cor}$ .

### 3.6.2 Approche moyennée

La seconde méthode de prédiction de trajectoire développée vise à évaluer une vitesse relative moyenne (ou intégrée) agissant sur le bateau, de manière à calculer en une fois les efforts appliqués.

L'avantage de cette méthode est de limiter le temps de calcul lié à la discrétisation du bateau en éléments. En revanche, elle limite le champ d'application de la prédiction de trajectoire, le plan d'eau doit en effet être horizontal. L'existence de cette limitation sera expliquée dans la suite du développement.

Cette approche permet également de se relier de manière plus pertinente à des coefficients de traînée issus d'études sur des profils type ; par exemple, un barreau rectangulaire (figure 3.6.2).

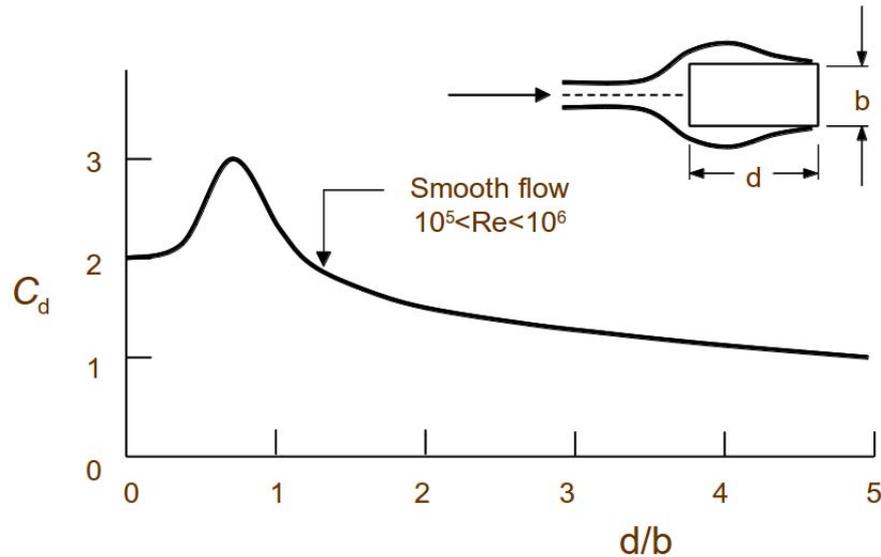


FIGURE 3.6.2 – Coefficient de traînée pour un barreau rectangulaire [Holmes, 2007]

La méthodologie utilisée à chaque pas temporel est la suivante :

1. Nous commençons par définir une emprise de la structure dans le repère  $O'$  (cfr. figure 3.6.3). Cette emprise n'est pas nécessairement limitée à la surface occupée par le bateau dans le domaine (dimensions  $l + 2l_e \times b + 2b_e$ ), elle peut être étendue pour intégrer des informations hydrodynamiques situées au voisinage du bateau.

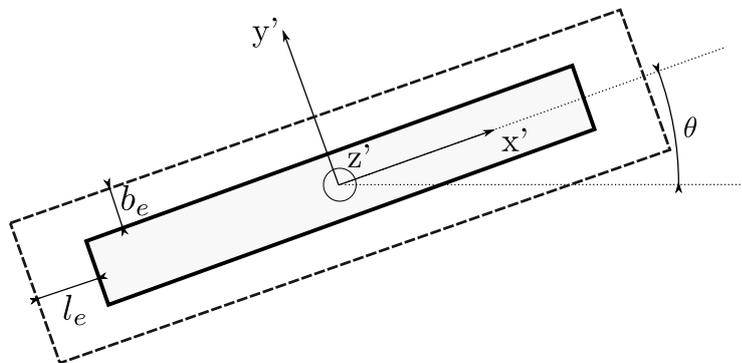


FIGURE 3.6.3 – Emprise du bateau en approche moyennée

2. Nous procédons au découpage de cette emprise en un grid régulier (mailles rectangulaires). Les vitesses en chaque point du grid liées à la vitesse de rotation du bateau sont calculées via  $R_{\kappa}$ ,
3. À l'aide de la matrice de rotation plan  $\underline{R}_{\theta}$  et des informations sur la position du centre de masse, nous récupérons les coordonnées du grid de l'emprise dans les axes globaux  $O$ ,
4. Les vitesses absolues de l'écoulement sont calculées en chaque point du grid en identifiant les informations de vitesses adjacentes et en pratiquant une moyenne, éventuellement pondérée (cfr. section 3.6.1). Nous leur retranchons les vitesses de translation du bateau,

5. Les vitesses obtenues sont projetées dans les axes du bateau via  $\underline{R}_{\psi\phi\theta}$  et les vitesses relatives réelles en axes locaux  $xyz$  sont calculées en leur retranchant les vitesses liées à la rotation du bateau,
6. Nous calculons les moyennes arithmétiques  $v_{\text{moy,long}}$  et  $v_{\text{moy,trans}}$  de ces vitesses relatives respectivement selon les axes longitudinal et transversal du bateau. Elles sont reliées à des pressions dynamiques via :

$$p_{\text{dyn,long}} = 0,5C_{\text{long}}\rho_w |v_{\text{moy,long}}| v_{\text{moy,long}} \quad (3.6.12)$$

$$p_{\text{dyn,trans}} = 0,5C_{\text{trans}}\rho_w |v_{\text{moy,trans}}| v_{\text{moy,trans}} \quad (3.6.13)$$

Cette pression est évaluée pour le corps dans son ensemble. Les coefficients  $C_{\text{long}}$  et  $C_{\text{lat}}$  peuvent donc être reliés valablement à des coefficients de traînée de barreau. La figure 3.6.2 présente la valeur de ce coefficient en fonction du rapport d'aspect du barreau pour un nombre de Reynolds compris dans l'intervalle  $[10^5, 10^6]$ ,

7. Pour connaître les efforts résultants appliqués sur le bateau, il est nécessaire de calculer les maîtres couples (i.e. les surfaces d'application) de ces pressions. Ils sont évalués via l'enfoncement du bateau qui peut être calculé suivant la méthodologie présentée à la section 3.4.2. Étant donné l'hypothèse de plan d'eau horizontal, il n'est plus nécessaire de passer par la définition du plan  $h(x_c, y_c)$  du fond du bateau. Il suffit de définir le tirant par un plan :

$$T(x_c, y_c) = \frac{x_c}{l} (T_{10} - T_{00}) + \frac{y_c}{b} (T_{01} - T_{00}) + T_{00} \quad (3.6.14)$$

où  $T(0, 0) = T_{00}$ ,  $T(l, 0) = T_{10}$  et  $T(0, b) = T_{01}$  deviennent les inconnues du problème.

Le système à résoudre devient ainsi :

$$\rho_w \begin{bmatrix} 0 & \frac{bl}{2} & \frac{bl}{2} \\ -\frac{bl^2}{12} & \frac{b^2l}{4} & \frac{b^2l}{3} \\ -\frac{bl^2}{12} & \frac{bl^2}{3} & \frac{bl^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{00} \\ T_{10} \\ T_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) dl' db' \\ \sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) y_{c,j} dl' db' + M_{\text{dyn},x} \\ \sum_{j=1}^m \mu(x_{c,j}, y_{c,j}) x_{c,j} dl' db' + M_{\text{dyn},y} \end{bmatrix} \quad (3.6.15)$$

La résolution du système permet de trouver l'enfoncement des quatre coins du bateau avec  $T(l, b) = T_{11} = T_{10} + T_{01} - T_{00}$ . Les maîtres couples sont évalués via (figure 3.6.4) :

$$S_{\text{trans}} = \frac{\max(T_{00} + T_{0b}) + \max(T_{l0} + T_{lb})}{2} l \quad (3.6.16)$$

$$S_{\text{long}} = \frac{\max(T_{00} + T_{l0}) + \max(T_{0b} + T_{lb})}{2} b \quad (3.6.17)$$

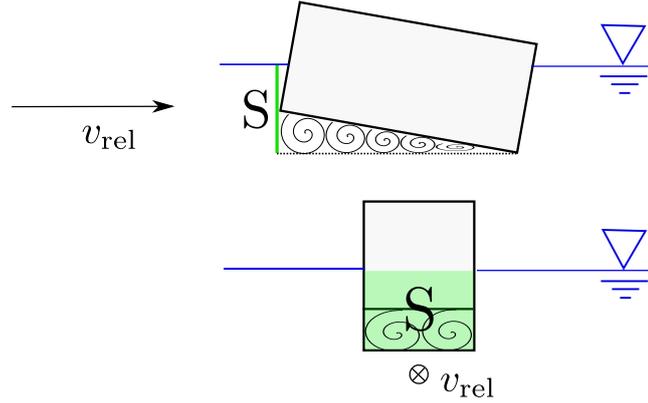


FIGURE 3.6.4 – Calcul du maître couple en approche moyennée

Nous mettons ici en évidence pourquoi la méthode est limitée à des domaines caractérisés par une surface libre horizontale. Les surfaces exposées  $y$  sont en effet précisément évaluées. Dans le cas d'un plan d'eau de hauteur irrégulière, seule une discrétisation permet le calcul d'un tirant ponctuel et donc d'une surface exposée résultante.

Les efforts résultants en axes locaux peuvent ainsi être calculés :

$$F_{\text{lat}} = p_{\text{dyn,lat}} S_{\text{lat}} \quad (3.6.18)$$

$$F_{\text{long}} = p_{\text{dyn,long}} S_{\text{long}} \quad (3.6.19)$$

8. Le couple résultant est calculé via la détermination d'un bras de levier des efforts résultants  $F_{\text{lat}}$  et  $F_{\text{long}}$ . Ce bras de levier est calculé à l'aide de la répartition des vitesses relatives  $v_i = \sqrt{v_{i,x'}^2 + v_{i,y'}^2}$  en axes  $O'$ .

$$\begin{aligned} x_{\text{levier}} &= \frac{\sum_i x'_i |v_{i,y'}| v_{i,y'}}{\sum_i |v_{i,y'}| v_{i,y'}} \\ y_{\text{levier}} &= \frac{\sum_i y'_i |v_{i,x'}| v_{i,x'}}{\sum_i |v_{i,x'}| v_{i,x'}} \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

où les  $x'_i$  et  $y'_i$  sont les distances entre le point considéré de l'emprise et le centre de masse. Pour se convaincre que le signe obtenu est bien exact, prenons l'exemple présenté à la figure 3.6.5. La pression (et par extension la force) contient son signe (cfr équation (3.6.13)) et est ici négative. Le bras de levier  $x_{\text{levier}}$  doit donc être également négatif. Il s'agit bien du signe obtenu car  $\sum_i v_{i,y'} = \int_l v_{y'}(x') dx' < 0$  et car  $x'_i v_{i,y'} = x' v_{y'}(x')$  est positif quel que soit  $x'$ .

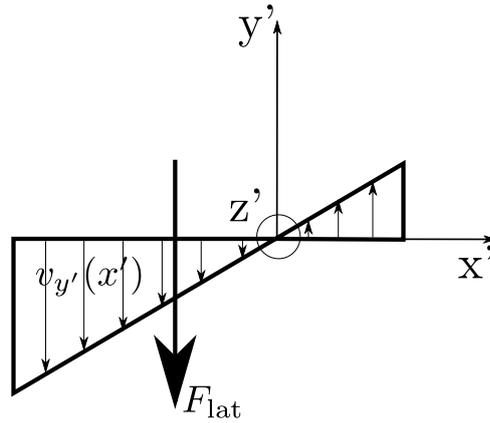


FIGURE 3.6.5 – Illustration du calcul de bras de levier des efforts résultants

9. Les efforts sont finalement projetés en axes globaux  $O$ , et les positions et vitesses au pas temps suivant sont évaluées. L'équation du mouvement est résolue pas à pas et réitérant le processus. Notons que, la surface libre étant horizontale, la composante horizontale de pression hydrostatique est nulle.

## 3.7 Récapitulatif sur le développement du modèle de calcul

Cette section est consacrée à la mise en évidence toutes les hypothèses qui ont été posées pour le développement du modèle de prédiction de la trajectoire d'un bateau à la dérive, thématique à laquelle ce chapitre est entièrement dédié.

### 1. Équation du mouvement

- Trois degrés de liberté actualisés de manière dynamique via une équation de mouvement de corps rigide : translations en plan et rotation de dérive,
- Accélération constante sur le pas de temps et égale à la valeur en début de pas temps (schéma explicite),
- Pas de rétroaction sur l'écoulement de sorte que les effets de masse ajoutée sont négligés.

### 2. Calcul de l'enfoncement du bateau

- Méthode complète
  - Faible variation de la pente de surface libre,
- Méthode linéarisée (justifiée par l'étude de précision menée à la section 3.4.3)
  - Faible variation de la pente de surface libre,
  - Petites inclinaisons d'assiette et de gîte,
  - Pas d'influence de l'élévation du centre de masse.

### 3. Calcul des efforts hydrostatiques

- Aucune hypothèse posée.

### 4. Calcul des efforts hydrodynamiques

- Vitesse liée à une pression via :

$$p = \frac{1}{2}\rho_w C v^2 \quad (3.7.1)$$

- Approche locale
  - vitesse locale projetée normalement et tangentiellement aux éléments de discrétisation,
  - Pressions liées au composantes tangentielles négligées,
  - Composante normale liée à une pression via des coefficients de traînée de plaque planes.
- Approche moyennée
  - Surface libre horizontale,
  - Composantes moyennes de vitesse liées à une pression via des coefficients de traînée de barreau.
  - Bras de levier des efforts évalués uniquement au prorata des vitesses (pas de prise en compte des surfaces).

Le modèle de calcul est ainsi clairement défini et son analyse ainsi que sa validation peuvent maintenant être menées.

## Chapitre 4

# Analyse et validation du modèle de calcul de trajectoire

Le modèle de prédiction à trois degrés de liberté dynamique défini au chapitre précédent est ici analysé. Son application est tout d'abord validée de manière qualitative à l'aide d'essais réalisés en laboratoire. Ensuite le comportement des méthodes est étudié via l'étude de différents cas théoriques soit liés à la géométrie du corps, soit liés à l'écoulement dans lequel le bateau est abandonné.

### 4.1 Validation expérimentale qualitative

#### 4.1.1 Essais en laboratoire

Dans le cadre du travail et parallèlement au développement du modèle de prédiction, des essais en canal au laboratoire d'hydrauliques des constructions de l'Université de Liège ont été réalisés afin d'appréhender la physique du phénomène et d'identifier les caractéristiques importantes du mouvement du bateau.

#### Dispositif d'essai

Les études sont menées dans un canal vitré d'une largeur de 98 cm. Le débit est fixé à l'aide d'un système de pompes et le niveau aval est réglé à l'aide d'une vanne située à la fin du canal. L'écoulement sur la vanne est un écoulement de surface, il n'existe pas d'ouverture de fond.

La hauteur d'eau  $h_w$  est mesurée à l'aide d'un limnimètre mécanique et est supposée constante sur la longueur du canal lorsque l'état stationnaire est atteint (en réalité, il existe une mise en charge car la hauteur d'eau tend à l'amont vers la hauteur uniforme).

Pour récupérer des informations photo et vidéo, un dispositif caméra à prise de vue en plan



FIGURE 4.1.1 – Modèles réduits réalisés au laboratoire

est fixé sur une potence installée au dessus du canal. Le champ de la caméra est de 120 cm de longueur.

Deux boîtes parallélépipédiques sont ensuite réalisées en PVC sur base d’un gabarit de Barge Europa Type III [ITB, 2008] :

- Réel :  $100 \times 11,4$  m - 3000 à 4500 t en état chargé,
- Modèle réduit à l’échelle  $E = 1/300$  :  $33,3 \times 3,8$  (cm) - 105 g non lesté,
- Modèle réduit à l’échelle  $E = 1/150$  :  $66,7 \times 7,6$  cm - 1320 g lesté uniformément avec une plaque de PVC ou non uniformément à l’aide de petits gabions de graviers.

La figure 4.1.1 présente les deux modèles réduits réalisés. Les marques de peintures présentes sont le résultat d’un essai préalable de tirant statique en état uniformément chargé. La différence observée entre la mesure de tirant (à l’aide de marques de bombe colorée) et l’estimation théorique :

$$T = \frac{m}{\rho_w l b} \tag{4.1.1}$$

est de l’ordre du mm et liée à la tension superficielle.

### Configurations étudiées

Les essais sont menés dans le canal pour différents débits et hauteurs de vanne  $h_v$ . Le modèle réduit est abandonné dans l’écoulement après installation de l’état stationnaire dans le canal. Il existe en réalité toujours des phénomènes perturbateurs dont les origines sont difficilement maîtrisables (vibrations du canal, turbulence, etc.). De plus, des perturbations supplémentaires sont introduites par la mise en place, juste à l’amont de la vanne, d’un grillage permettant d’éviter que le modèle ne tombe dans les canalisations du laboratoire après avoir parcouru la longueur du canal.

Les tableaux 4.1.1 et 4.1.2 présentent les conditions stabilisées dans lesquelles les essais ont été menés. Pour passer des valeurs  $X_M$  du modèle au valeur  $X_P$  du prototype, une similitude de Froude (d’échelle géométrique  $E = 1/150$  ou  $1/300$ ) doit être pratiquée. Il vient respectivement pour les débits et les vitesses :

- $Q_M = Q_P \cdot E^{5/2}$ ,
- $v_M = v_P \cdot E^{1/2}$ .

n°	$h_v$ [cm]	Q		$h_w$		$\Omega$		v	
		M [l/s]	P [ $10^3 \cdot m^3/s$ ]	M [cm]	P [m]	M [ $m^2$ ]	P [ $10^3 \cdot m^2$ ]	M [m/s]	P [m/s]
1	3,5	45,8	12,6	12	18	0,12	2,6	0,39	4,78
3	13,2	12,1	3,3	16,6	24,9	0,18	4	0,07	0,91
4	13,2	19,8	5,5	18	27	0,16	3,7	0,11	1,37
5	3,5	19,8	5,5	8,4	12,6	0,08	1,8	0,24	2,95

TABLEAU 4.1.1 – Configurations des essais - échelle 1/150

n°	$h_v$ [cm]	Q		$h_w$		$\Omega$		v	
		M [l/s]	P [ $10^3 \cdot m^3/s$ ]	M [cm]	P [m]	M [ $m^2$ ]	P [ $10^3 \cdot m^2$ ]	M [m/s]	P [m/s]
1	3,5	45,8	71,4	12	35,9	0,12	10,6	0,39	6,76
3	13,2	12,1	30,9	16,6	54,1	0,18	15,9	0,07	1,94
4	13,2	19,8	18,9	18	49,9	0,16	14,7	0,11	1,29
5	3,5	19,8	30,9	8,4	25,1	0,08	7,4	0,24	4,18

TABLEAU 4.1.2 – Configurations des essais - échelle 1/300

### Observations

Au préalable, avant même de lancer les modèles réduits dans l'écoulement, on se propose d'identifier plus clairement la forme du profil de vitesse. Pour ce faire, une bande de sciure de bois est lancée dans l'écoulement avec une vitesse initiale nulle. La bande est perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Les morceaux de sciure, selon leur position, se déplacent ainsi à la vitesse locale de l'écoulement et un profil de vitesse, différent du profil uniforme vers lequel on désire idéalement tendre, se dessine.

La figure 4.1.2 présente les profils de sciure observés respectivement pour les essais 3 et 5. L'essai 3 est caractérisé par une vitesse moyenne sur la section plus faible, de sorte que l'écoulement est moins turbulent<sup>1</sup>. Cependant, il présente un profil de vitesse moins uniforme que pour l'essai 5 en raison d'une décroissance à la fois au centre et sur les bords du canal.

---

1. Un repère parlant et visuel de cette différence de turbulence est le reflet de la lumière des néons dans l'eau.

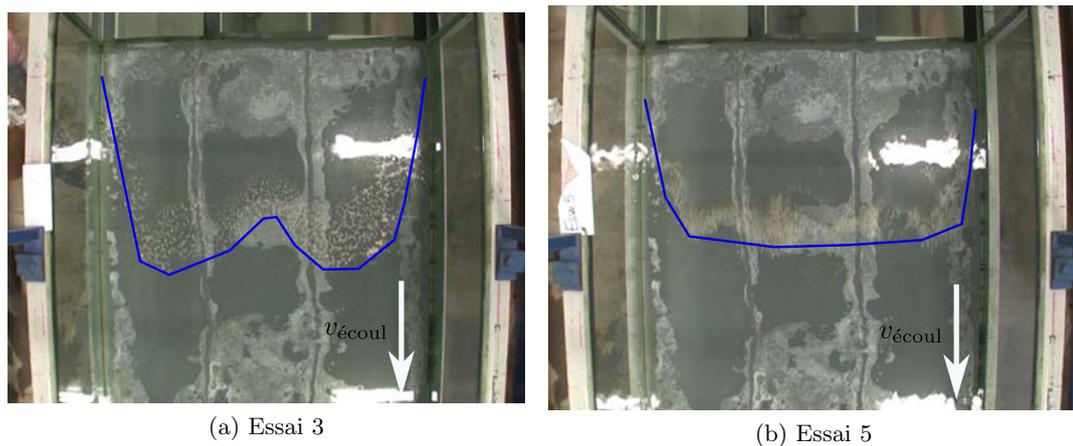


FIGURE 4.1.2 – Profils de sciure observés au laboratoire

Après avoir mené ces observations du profil de vitesse, le bateau est lancé dans les différentes configurations d'essais avec une vitesse initiale nulle. Lorsque le bateau est initialement placé au centre du canal de manière perpendiculaire ou parallèle à l'écoulement, il se translate uniquement selon la direction de l'écoulement. Lorsque le bateau est lancé initialement en biais (toujours au centre), un phénomène important est observé, le bateau ne subit pas de dérive (il conserve son inclinaison en plan initiale) et possède une composante de translation de la direction perpendiculaire à l'écoulement, la trajectoire a une forme courbe asymptotique à une droite parallèle au bord (figure 4.1.3).

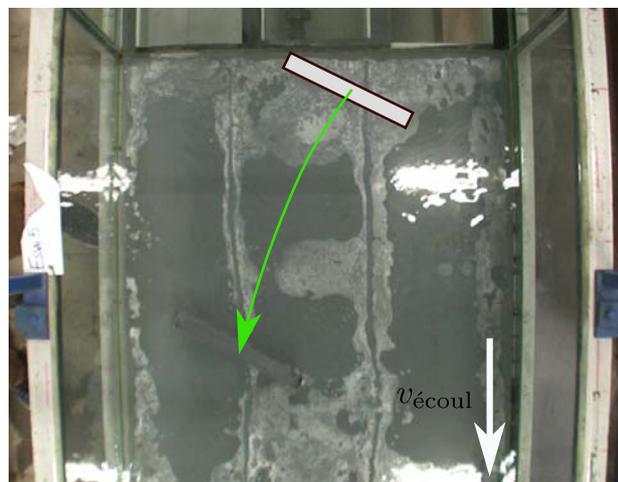


FIGURE 4.1.3 – Translation perpendiculaire au sens du courant et sans variation de dérive pour un bateau initialement en biais

Lorsque le bateau est lancé en biais et arrive à proximité des bords, il subit alors une dérive qui tend à l'aligner parallèlement aux bords (figure 4.1.4). Une collision avec les parois est parfois observée.

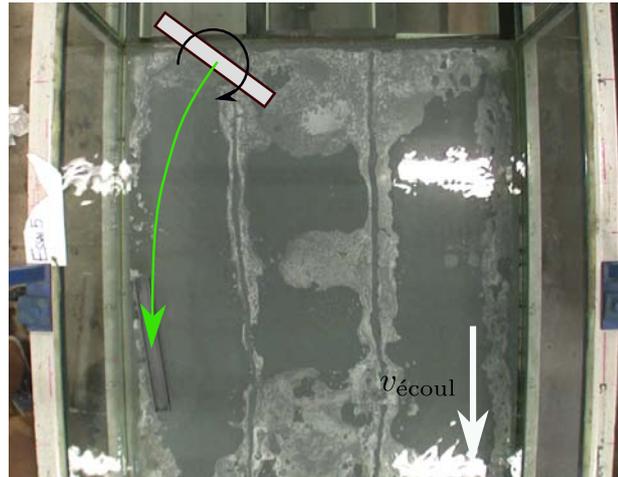


FIGURE 4.1.4 – Comportement à proximité du bord

Finalement, un dernier phénomène est mis en évidence. Juste avant le lâcher et quand le bateau (même chargé uniformément) est déjà dans l'eau, le tirant stabilisé est différent du tirant constant qui est calculé pour le bateau sur une surface libre horizontale. Cette effet est lié à l'importance de la vitesse relative entre le bateau et l'écoulement en début d'essais. Plus la vitesse du bateau s'approche de la vitesse de l'écoulement, i.e. plus la vitesse relative diminue, plus le tirant stabilisé tend vers le tirant constant suscité. Ce phénomène est illustré à la figure 4.1.5 et confirme la nécessité de prendre en compte un effet lié à la pression dynamique dans le calcul de l'enfoncement stabilisé du bateau (cfr. section 3.4).

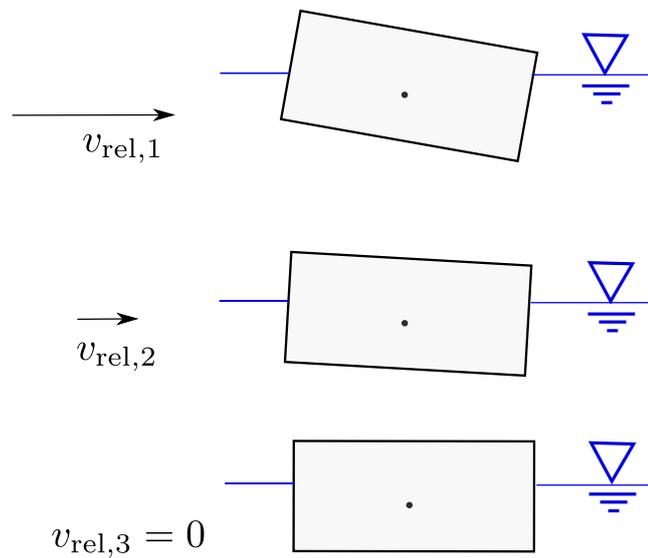


FIGURE 4.1.5 – Variation de tirant d'eau dû aux efforts hydrodynamiques

### 4.1.2 Champ de vitesse uniforme

La champ de vitesse étudié est un champ uniforme de direction parallèle à l'axe  $X$  de sens positif et d'intensité  $V_{X,\text{dom}}$ . La surface libre associée est horizontale.

Nous allons tout d'abord vérifier que le modèle développé reproduit bien certains phénomènes et trajectoires caractéristiques observés au laboratoire.

Les observations importantes issues des essais menés en laboratoire sont que le bateau, chargé de manière quelconque et placé en biais par rapport à l'écoulement :

- Ne subit pas de rotation de dérive autour de son centre de masse, du moins tant qu'il reste au centre du canal, là où le profil est uniforme<sup>2</sup>. La routine de calcul reproduit cette observation, quelle que soit la répartition de masse sur le bateau,
- Ne se translate pas uniquement selon la direction de l'écoulement :

Cet aspect est capturé dans la routine de calcul car le coefficient  $C_{\perp}$  est nettement supérieur à  $C_{\parallel}$  dans la gamme de Reynolds ( $Re \geq 10^6$ ) associée aux phénomènes étudiés. L'origine de la translation perpendiculaire à la direction de l'écoulement est illustrée à la figure 4.1.6.

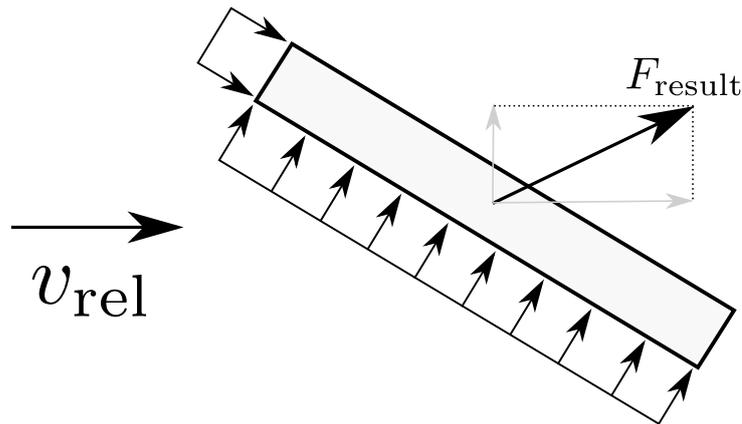


FIGURE 4.1.6 – Origine de la translation perpendiculaire à la direction de l'écoulement

Nous pouvons discuter de l'influence de la répartition de masse sur la rotation du bateau. Si le bateau est uniformément chargé, le centre de masse dans le repère  $O_c$  est situé en  $(l/2, b/2)$ . Les pressions calculées dans la routine conduisent ainsi à un couple nul. Il en va de même pour la composante frottante liée à la vitesse tangentielle.

Si le bateau est chargée de manière non-uniforme, les pressions restent inchangées alors que la position du centre de masse varie. Cependant, les efforts calculés latéraux dépendent des surfaces immergées et donc du tirant d'eau. Les efforts liés aux tirants d'eau importants agissent avec un bras de levier plus réduit et vice-versa, de sorte que le couple résultant est également nul dans cette configuration.

Nous pouvons également étudier plus en détail la translation perpendiculaire à l'écoulement. La contribution frottante liée aux vitesses tangentielles est négligée (cfr. section 3.6.1). Au temps

2. Les effets de bords liés au fait que le profil n'est en réalité pas uniforme seront discutés dans la section 4.1.3

initial, la vitesse relative entre le bateau et l'écoulement vaut la vitesse de l'écoulement. Les paramètres qui vont déterminer la translation selon  $Y$  sont l'inclinaison  $\theta$  du bateau (sa dérive) et son rapport d'aspect  $a = \frac{l}{b}$ .

Il vient la situation présentée à la figure 4.1.7. La condition pour observer une translation uniquement dirigée selon  $X$  est que les résultantes de pression liées respectivement aux faces d'extrémités et latérales du bateau s'équilibrent dans la direction  $Y$ . Pour un bateau uniformément chargé (et donc présentant un tirant d'eau constant). Il suffit de vérifier :

$$\begin{aligned} p_{\text{dyn,lat}} &= p_{\text{dyn,extr}} \\ v^2 l \sin^2 \theta \cos \theta &= v^2 b \cos^2 \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

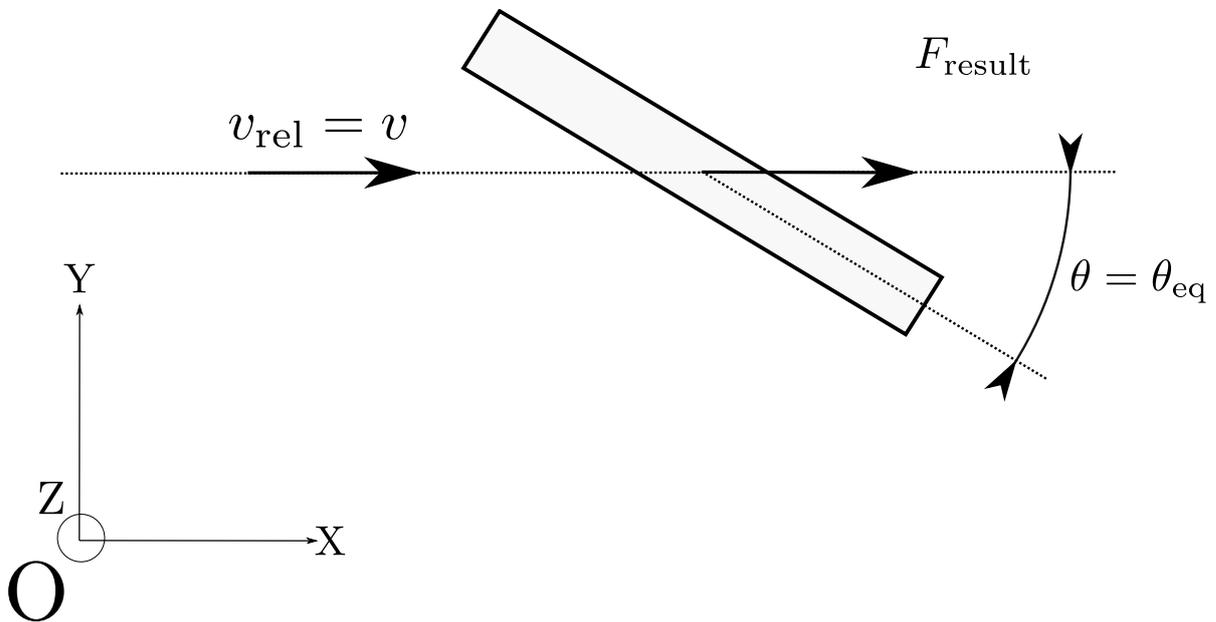


FIGURE 4.1.7 – Position initiale qui garantit une absence de translation selon  $Y$

Il existe donc un angle d'inclinaison initial  $\theta_{eq,init}$  qui garantit l'absence de translation selon  $Y$  :

$$\theta_{eq,init} = \theta = \arctan\left(\frac{b}{l}\right) \quad (4.1.3)$$

En règle générale, les conditions initiales sont telles qu'une translation selon  $Y$  est observée. La figure 4.1.9 présente l'évolution de la position, de la vitesse et de la force selon  $X$  et  $Y$  pour une simulation où :

- Le bateau est chargé uniformément suivant :

$$R = \begin{bmatrix} 500 & 500 & 600 \\ 500 & 500 & 600 \end{bmatrix} \text{ tonnes} \quad (4.1.4)$$

- Le bateau est incliné initialement d'un angle  $\theta = -1$  radian =  $-57,3^\circ$ ,
- La vitesse de l'écoulement est dirigée selon  $X$  et vaut  $v_{\text{dom}} = 5$  m/s.

Les résultats obtenus selon les deux approches peuvent y être comparés. Les trajectoires du centre de masse et des deux extrémités du bateau sont mise en évidence à la figure 4.1.8 pour l'approche locale. Le bateau est y également représenté toutes les 20 s.

La méthode moyennée introduit un couple parasite lié au calcul approximatif du bras de levier des efforts résultants (cfr. section 3.7). La vitesse  $v_X$  est strictement croissante et tend vers la vitesse de l'écoulement  $v_{X,\text{dom}}$ . La vitesse  $v_Y$  atteint un pic au moment où la force  $F_Y$  devient négative, la trajectoire prend ainsi une forme concave. Ce changement de signe de l'effort peut être expliqué en étudiant l'évolution de la vitesse relative entre le bateau et l'écoulement.

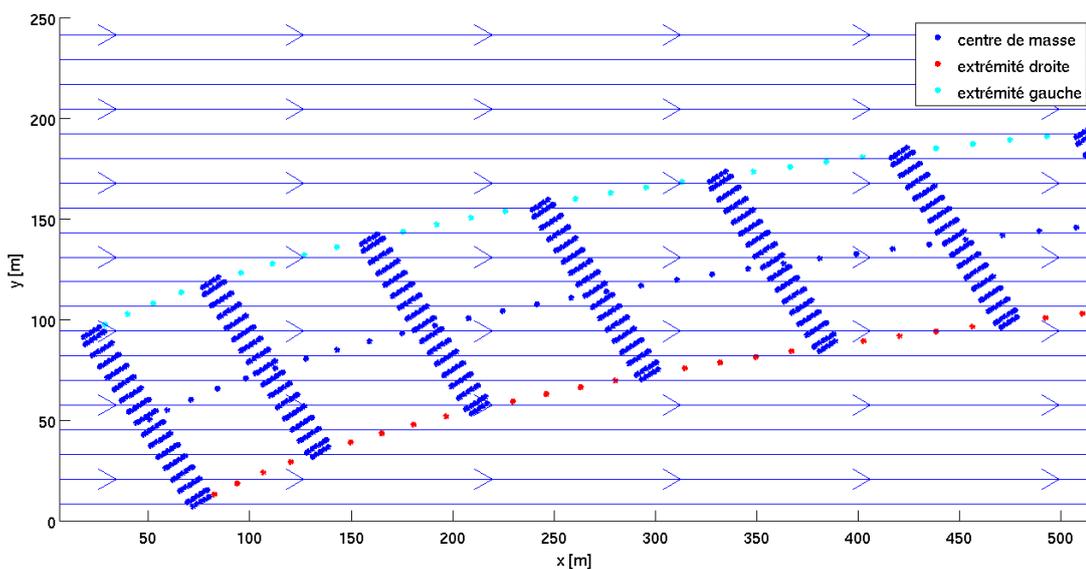


FIGURE 4.1.8 – Trajectoire en écoulement uniforme - approche locale

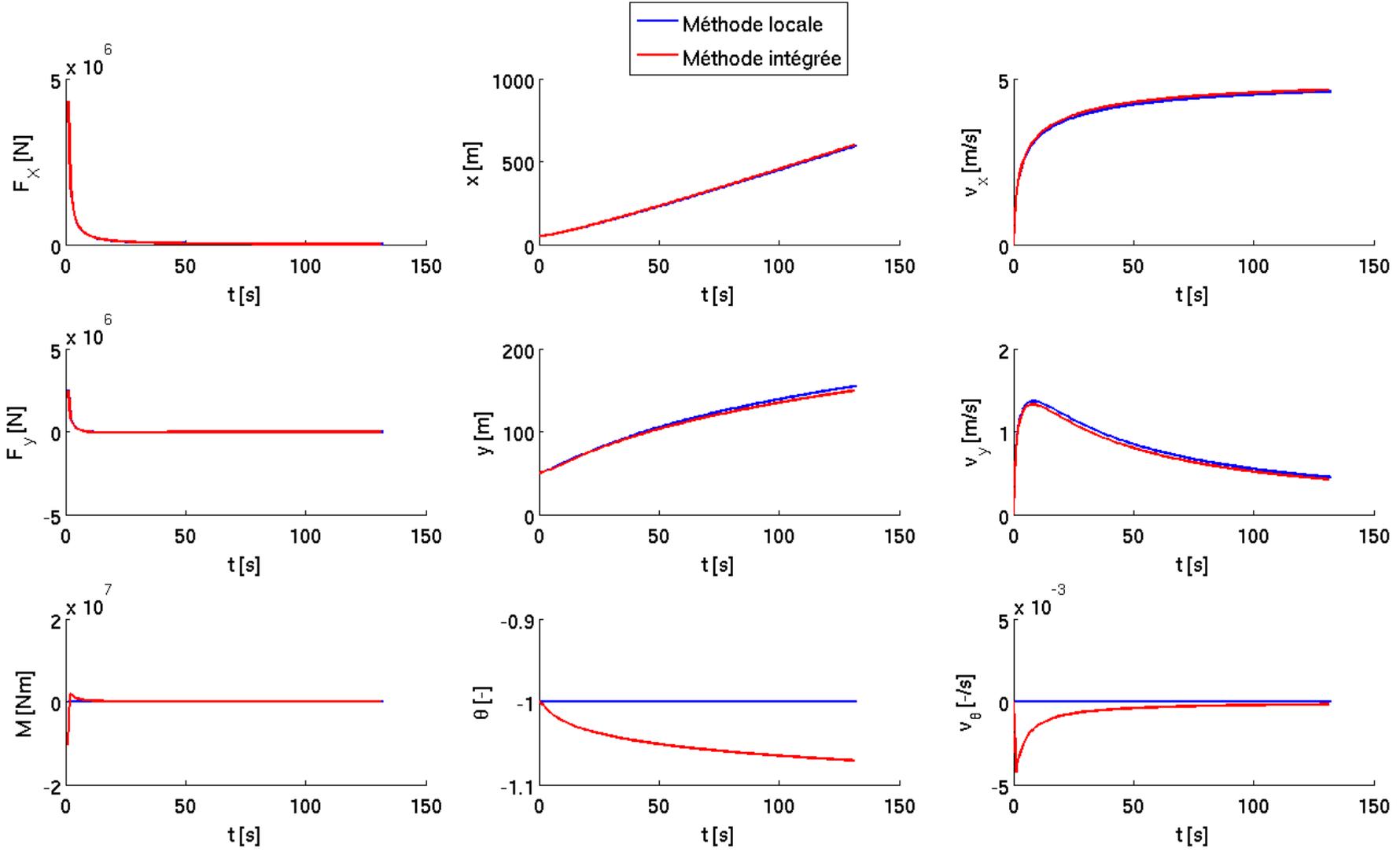


FIGURE 4.1.9 – Efforts, vitesses et positions - Comparaison des méthodes

Le bateau se déplace avec une vitesse  $v_{cm} = (v_X(t), v_Y(t))$ . La figure 4.1.10 illustre la manière de déterminer la direction de la vitesse relative entre le bateau et l'écoulement.

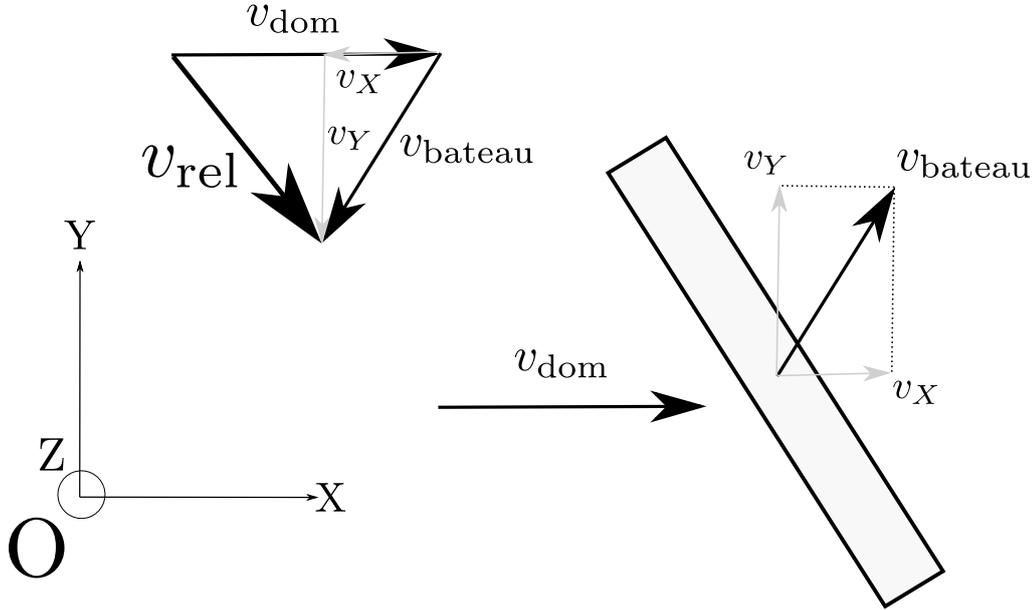


FIGURE 4.1.10 – Détermination de la direction de la vitesse relative

On souhaite démontrer l'existence et déterminer la valeur du pic de vitesse  $\max(v_Y(t)) = v_Y(t_{pic})$  pour vérifier le fonctionnement de la routine. Cette démonstration peut-être menée analytiquement si le bateau est uniformément chargé. Les figures 4.1.12 à 4.1.14 sont issues de simulations lancées sous cette condition.

En  $t_{pic}$ , la valeur  $v_X$  est considérée connue, elle est récupérée via la routine de calcul. On se permet de récupérer numériquement cette valeur car son obtention analytique n'est possible qu'en passant par la résolution d'un système d'équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} Av_{rel,X}^2 + Bv_{rel,Y}^2 = \frac{dv_X^2}{dt} = \frac{d}{dt} (v_{X,dom} - v_{rel,X})^2 = 2(v_{X,dom} - v_{rel,X}) \frac{dv_{rel,X}}{dt} \\ Cv_{rel,X}^2 + Dv_{rel,Y}^2 = \frac{dv_Y^2}{dt} = -\frac{dv_{rel,Y}^2}{dt} \end{cases} \quad (4.1.5)$$

dont la solution ne peut être obtenue que de manière numérique.

La vitesse  $v_Y$  atteint le pic dans la situation présentée à la figure 4.1.11. Il s'agit de trouver l'inclinaison  $\theta_{eq}$  de la vitesse relative par rapport à l'horizontale qui conduit à un effort dirigé uniquement selon  $X$ . Les forces, exprimées dans les axes locaux  $O_c$  qui s'exercent respectivement sur les faces d'extrémités et latérales valent :

$$\begin{aligned} \underline{F}_{dyn,extr} &= 0,5\rho_w T b C_d v_{rel,eq}^2 \cos^2(\theta - \theta_{eq}) \underline{e}_{x_c} \\ \underline{F}_{dyn,lat} &= 0,5\rho_w T l C_d v_{rel,eq}^2 \sin^2(\theta - \theta_{eq}) \underline{e}_{y_c} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

avec  $T$  le tirant constant du bateau uniformément chargé.

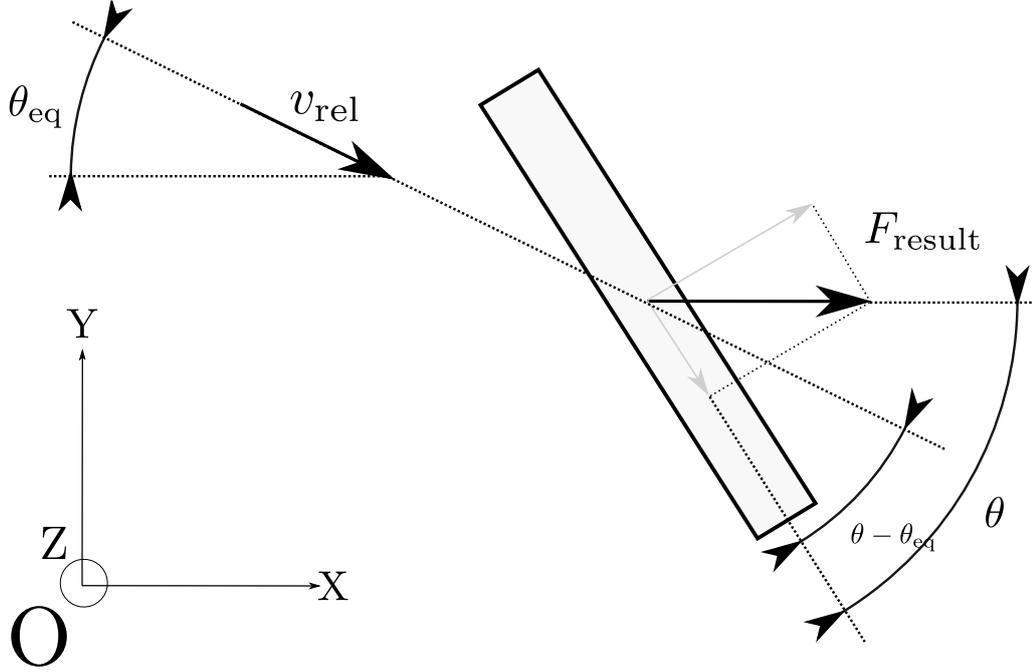


FIGURE 4.1.11 – Configuration pour laquelle l'effort selon Y est nul

Il suffit que la somme de ces deux forces soit dirigée selon X. Ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned}
 \tan(\theta) &= \frac{\|F_{\text{dyn,lat}}\|}{\|F_{\text{dyn,extr}}\|} \\
 &= \frac{l}{b} \tan^2(\theta - \theta_{\text{eq}}) \\
 &\Downarrow \\
 \theta_{\text{eq}} &= \theta - \arctan\left(-\sqrt{\left|\frac{b}{l} \tan(\theta)\right|}\right)
 \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Les valeurs absolues et le signe négatif devant la racine sont liés au fait que  $\theta$  est ici négatif car défini dans le sens trigonométrique. On trouve finalement la valeur de  $v_Y = -v_{\text{rel},Y}$  via :

$$v_Y = -v_{\text{rel},X} \tan \theta_{\text{eq}} \tag{4.1.8}$$

La figure 4.1.13 présente l'évolution de la direction de la vitesse relative en fonction du temps. Elle atteint bien la valeur  $\theta_{\text{eq}} = \left(-1 - \arctan\left(-\sqrt{\left|\frac{11,4}{100} \tan(-1)\right|}\right)\right) = -0.601$  calculée comme précédemment au temps  $t_{\text{pic}}$  de sorte que  $v_Y = -(5 - 3, 1) \tan -0.601 = 1,303$  m/s qui est effectivement la valeur obtenue via la routine de calcul (figure 4.1.12).

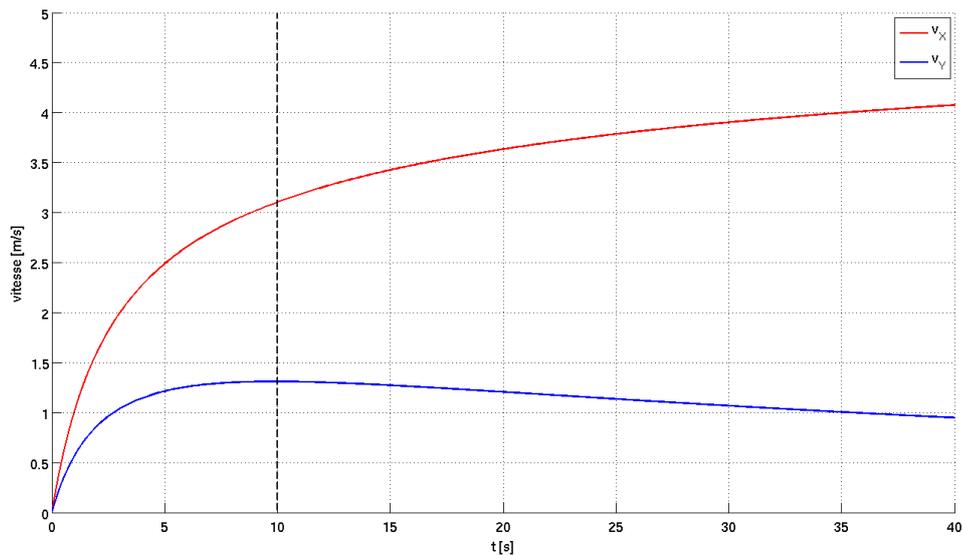
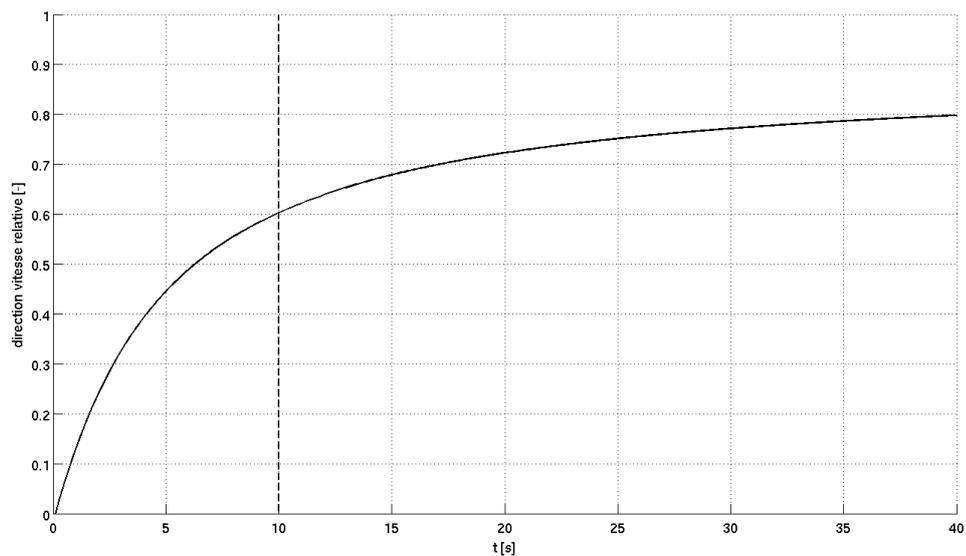
FIGURE 4.1.12 – Vitesses du bateau selon  $X$  et  $Y$ .

FIGURE 4.1.13 – Direction de la vitesse relative

Pour compléter l'explication de la présence de ce pic de vitesse selon  $Y$ , on peut isoler les composantes d'efforts selon  $Y$  liées respectivement aux faces d'extrémités et aux faces latérales. Le résultat est présenté à la figure 4.1.14. Au temps initial, la composante latérale est plus élevée que la composante d'extrémité. Elle est cependant caractérisée par une décroissance plus rapide que celle de la composante d'extrémité. En  $t_{\text{pic}}$ , la résultante selon  $Y$  devient nulle de sorte que  $v_Y$  atteint un pic.  $v_Y$  tend vers 0 à l'infini et le bateau tend vers une asymptote horizontale de manière à retrouver une trajectoire rectiligne dirigé selon  $X$ .

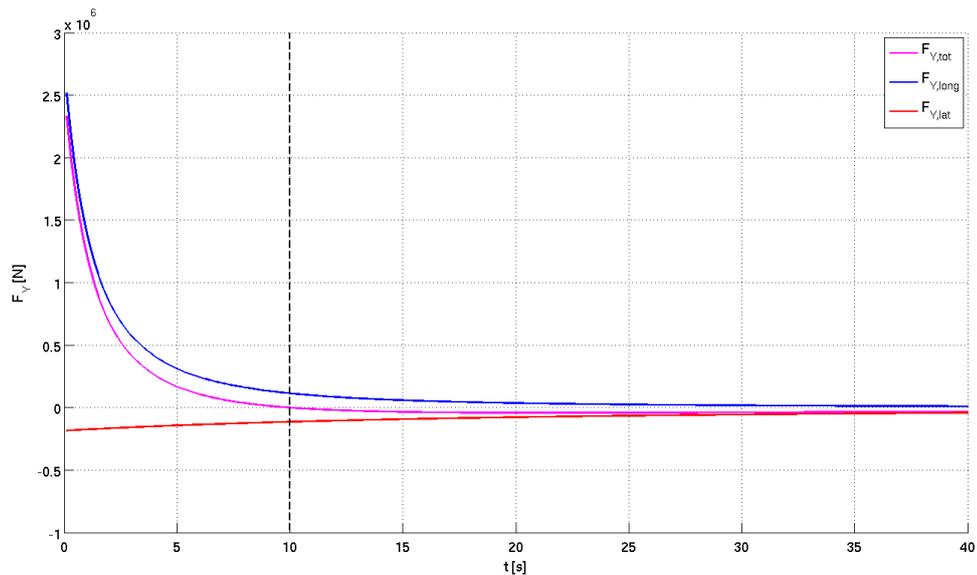


FIGURE 4.1.14 – Décomposition de l'effort selon Y entre les faces latérales et d'extrémité

L'étude du mouvement uniforme peut être clôturée en illustrant l'influence des efforts hydrodynamiques dans le calcul de l'enfoncement instantané du bateau. La figure 4.1.15 présente l'évolution des moments dynamiques intervenant dans les équilibres en rotation d'assiette (rotation autour de  $y_c$ ) et de gîte (rotation autour de  $x_c$ ). Son intensité est bien décroissante au fur et à mesure que la vitesse relative entre le bateau et l'écoulement diminue. Elle est cependant non négligeable dans la phase initiale de mise en mouvement.

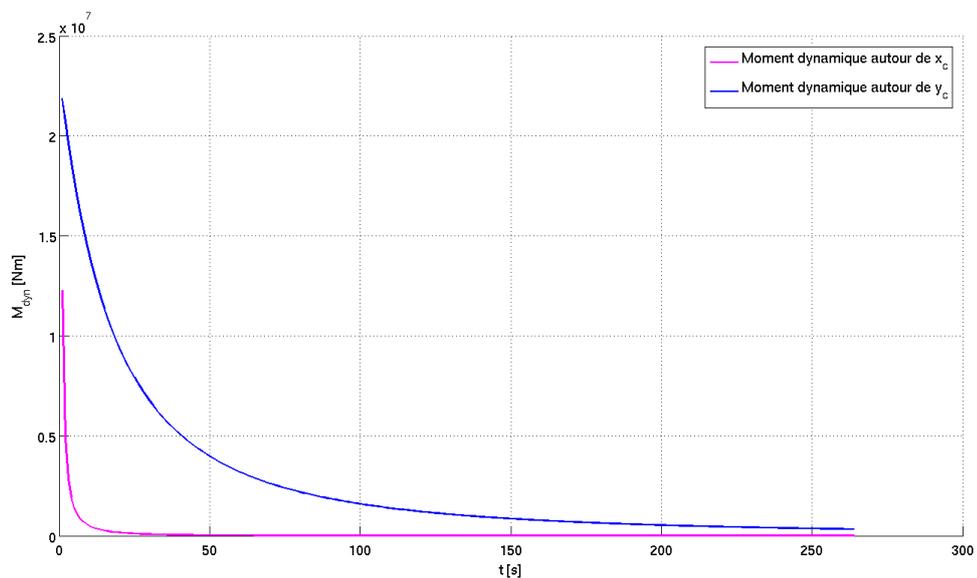


FIGURE 4.1.15 – Évolution temporelle des moments hydrodynamiques d'assiette et de gîte

### 4.1.3 Champs de vitesse frottants aux bords

Les simulations menées dans le cadre d'un champ de vitesse uniforme ont permis de mettre en évidence plusieurs aspects observés au laboratoire. Dans cette section, on s'attache à décrire un profil de vitesse plus en accord avec celui observé lors des essais expérimentaux. Celui-ci est caractérisé par une décroissance de la vitesse à proximité des bords du canal.

**Profil de Poiseuille** Dans un premier temps, on se propose de décrire le champ de vitesse à l'aide d'une parabole. *Poiseuille* a décrit un profil de vitesse entre deux plaques de la manière suivante (figure 4.1.18) :

$$v_p(y) = v_{\max} \left( \left| \frac{4y}{b_c} \right| - \frac{4y^2}{b_c^2} \right) \quad (4.1.9)$$

avec  $b_c$  la largeur du canal qui est assimilée à la distance entre les deux plaques de *Poiseuille*. La valeur  $y$  varie entre 0 et  $b_c$ .

La seule information issue des essais utilisée pour caractériser ce type de profil est la vitesse moyenne  $v_{moy}$  sur la section. Elle sert à calibrer le terme  $v_{\max}$ . Comme l'écoulement est stationnaire, le débit est constant. Si on suppose la hauteur d'eau  $h_w$  constante sur la largeur de la section et égale à la valeur récupérée à l'aide du lymnimètre mécanique, on peut intégrer la vitesse sur la section et égaliser les débits liés respectivement au profil parabolique et uniforme de manière à trouver une relation entre  $v_{\max}$  et  $v_{moy}$ .

$$\begin{aligned} Q_{unif} &= Q_p \\ \int_0^{b_c} h_w v_{unif}(y) dy &= \int_0^{b_c} h_w v_p(y) dy \\ b_c h_w v_{moy} &= h_w v_{\max} \left[ \frac{4y^2}{2b_c} - \frac{4y^3}{3b_c^2} \right]_0^{b_c} \\ b_c h_w v_{moy} &= \frac{2}{3} b_c h_w v_{\max} \\ &\Downarrow \\ v_{\max} &= \frac{3}{2} v_{moy} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Pour ce calcul, nous posons également l'hypothèse que le profil de vitesse vertical est constant, ce qui n'est pas le cas en réalité car l'écoulement frotte sur le fond. Cette hypothèse peut être levée et des profils verticaux de vitesse peuvent être définis :

**Profil logarithmique**

$$v(h) = A \ln(Bh) \quad (4.1.11)$$

**Profil parabolique**

$$v(h) = A\sqrt{h} + B \quad (4.1.12)$$

L'utilisation d'une relation logarithmique entre la vitesse et la hauteur d'eau est justifiée par le fait qu'elle est adoptée en pratique pour des profils de vent [Denoël, 2013] et des profils de vitesse en cours d'eau, notamment lors d'études d'emportement de particules [Dewals, 2013].

Pour définir  $A$  et  $B$ , on va anticiper la manière d'intégrer le profil de vitesse. Comme la fonction logarithme vaut  $-\infty$  en 0, nous pratiquerons une intégration entre  $\epsilon$ , valeur positive proche de 0 et  $h_w$ . On impose alors les deux conditions :

$$\begin{aligned} v(h = \epsilon) &= 0 \leftrightarrow B = \frac{1}{\epsilon} \\ v(h = h_w) &= v_{\max} \leftrightarrow A = \frac{v_{\max}}{\ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

On définit  $A$  et  $B$  :

$$\begin{aligned} v(h = 0) &= 0 \leftrightarrow B = 0 \\ v(h = h_w) &= v_{\max} \leftrightarrow A = \frac{v_{\max}}{\sqrt{h_w}} \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

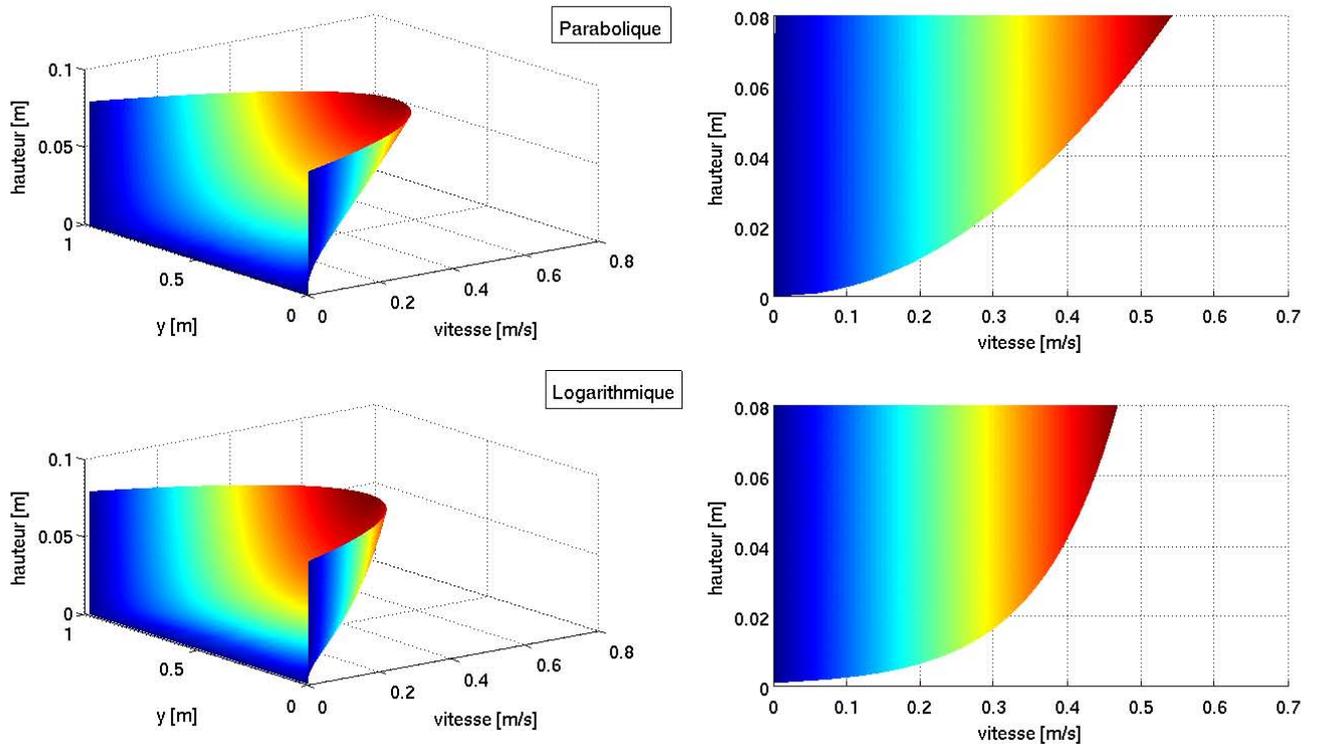


FIGURE 4.1.16 – Profils de type Poiseuille pour l'essai 5

Au final, les profils complets prennent la forme :

$$\begin{aligned}
 v(h, y) &= v(h) \left( \frac{4y}{b_c} - \frac{4y^2}{b_c^2} \right) \\
 v(h, y) &= \frac{v_{\max}}{\ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)} \ln\left(\frac{h}{\epsilon}\right) \left( \frac{4y}{b_c} - \frac{4y^2}{b_c^2} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right| \begin{aligned}
 v(h, y) &= v(h) \left( \frac{4y}{b_c} - \frac{4y^2}{b_c^2} \right) \\
 v(h, y) &= \frac{v_{\max}}{\sqrt{h_w}} \sqrt{h} \left( \frac{4y}{b_c} - \frac{4y^2}{b_c^2} \right)
 \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

(4.1.15)

On égale les débits comme précédemment :

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{unif}} &= Q_{\text{profil}} \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \int_0^{b_c} \int_{\epsilon}^{h_w} v(h, y) dh dy \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \int_{\epsilon}^{h_w} \frac{2}{3} b_c \frac{v_{\max}}{\ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)} \ln\left(\frac{h}{\epsilon}\right) dh \\
 \text{On pose } h' &= \frac{h}{\epsilon} \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \int_1^{\frac{h_w}{\epsilon}} \frac{2}{3} b_c \frac{v_{\max}}{\ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)} \ln(h') \epsilon dh' \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \frac{2}{3} b_c \frac{v_{\max}}{\ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)} \epsilon (h' \ln h' + h') \Big|_1^{\frac{h_w}{\epsilon}} \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \frac{2}{3} b_c \frac{v_{\max}}{\ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)} \epsilon (h' \ln h' + h') \Big|_1^{\frac{h_w}{\epsilon}} \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \frac{2}{3} b_c \frac{v_{\max}}{\ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)} \epsilon \left( -1 + \frac{h_w}{\epsilon} \ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right) + \frac{h_w}{\epsilon} \right) \\
 &\Downarrow \\
 v_{\max} &= \frac{3}{2} v_{\text{moy}} \frac{h_w \ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right)}{\epsilon \left( -1 + \frac{h_w}{\epsilon} \ln\left(\frac{h_w}{\epsilon}\right) - \frac{h_w}{\epsilon} \right)}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right| \begin{aligned}
 Q_{\text{unif}} &= Q_{\text{profil}} \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \int_0^{b_c} \int_0^{h_w} v(h, y) dh dy \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \int_0^{h_w} \frac{2}{3} b_c \frac{v_{\max}}{\sqrt{h_w}} \sqrt{h} dh \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \frac{2}{3} b_c \frac{v_{\max}}{\sqrt{h_w}} \left[ \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{h_w} \\
 b_c h_w v_{\text{moy}} &= \frac{4}{9} b_c v_{\max} h_w \\
 &\Downarrow \\
 v_{\max} &= \frac{9}{4} v_{\text{moy}}
 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

La valeur de  $v_{\text{moy}}$  est connue et vaut 0,24 m/s pour l'essai 5 (cfr. tableau 4.1.2) de sorte que  $v_{\max} = 0,468$  m/s et 0,542 m/s respectivement pour le profil logarithmique et parabolique. Le résultat de ces deux manières de décrire le profil vertical conduit aux profils totaux de vitesse présentés à la figure 4.1.16.

**Profil expérimental** Une autre approche pour définir le profil de vitesse est d'utiliser l'information vidéo récupérée lors des essais (la figure 4.1.17 présente le processus d'acquisition de cette information vidéo). Pour ce faire, on extrait de la vidéo, dans laquelle la propagation de la sciure est observée, trois images et le moment auquel elles ont été prises.

On connaît la longueur du champ de la caméra ainsi que la largeur du canal de sorte qu'on peut récupérer les coordonnées de la sciure pour les trois images. On utilise pour ce faire la routine `digitalisation.m` développée par V. Denoël. La démarche est menée avec l'essai 5 qui présente un profil plus uniforme.

À l'aide des trois digitalisations et des temps correspondant, on peut calculer deux profils de vitesse via une différence finie décentrée avant premier ordre de précision :

$$v_i = \frac{x_{i_{t+1}} - x_{i_t}}{\Delta t} \quad (4.1.19)$$

Sur base de ces deux profils de vitesses, on calcule un profil moyen et symétrique. On se propose finalement de caler une loi du type :

$$v_{\text{approché},i} = a \ln y_i + b \quad (4.1.20)$$

Il suffit alors de pratiquer une régression linéaire aux sens des moindres carrés en minimisant la fonction :

$$f = \sum_i^n (v_i - v_{\text{approché},i})^2 = \sum_i^n (v_i - (a \ln y_i + b))^2 \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} = 0 &= \sum_i^n (2v_i - 2a \ln y_i - 2b) \ln y_i \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 0 &= \sum_i^n (-2v_i + 2a \ln y_i + 2b) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

On peut réécrire le système d'équations sous forme matricielle car il est linéaire en  $a$  et  $b$ .

$$\begin{bmatrix} \sum_i^n \ln^2 y_i & \sum_i^n \ln y_i \\ \sum_i^n \ln y_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^n v_i \ln y_i \\ \sum_i^n v_i \end{bmatrix} \quad (4.1.23)$$

Le résultat obtenu est finalement :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0415 \\ 0.3406 \end{bmatrix} \quad (4.1.24)$$

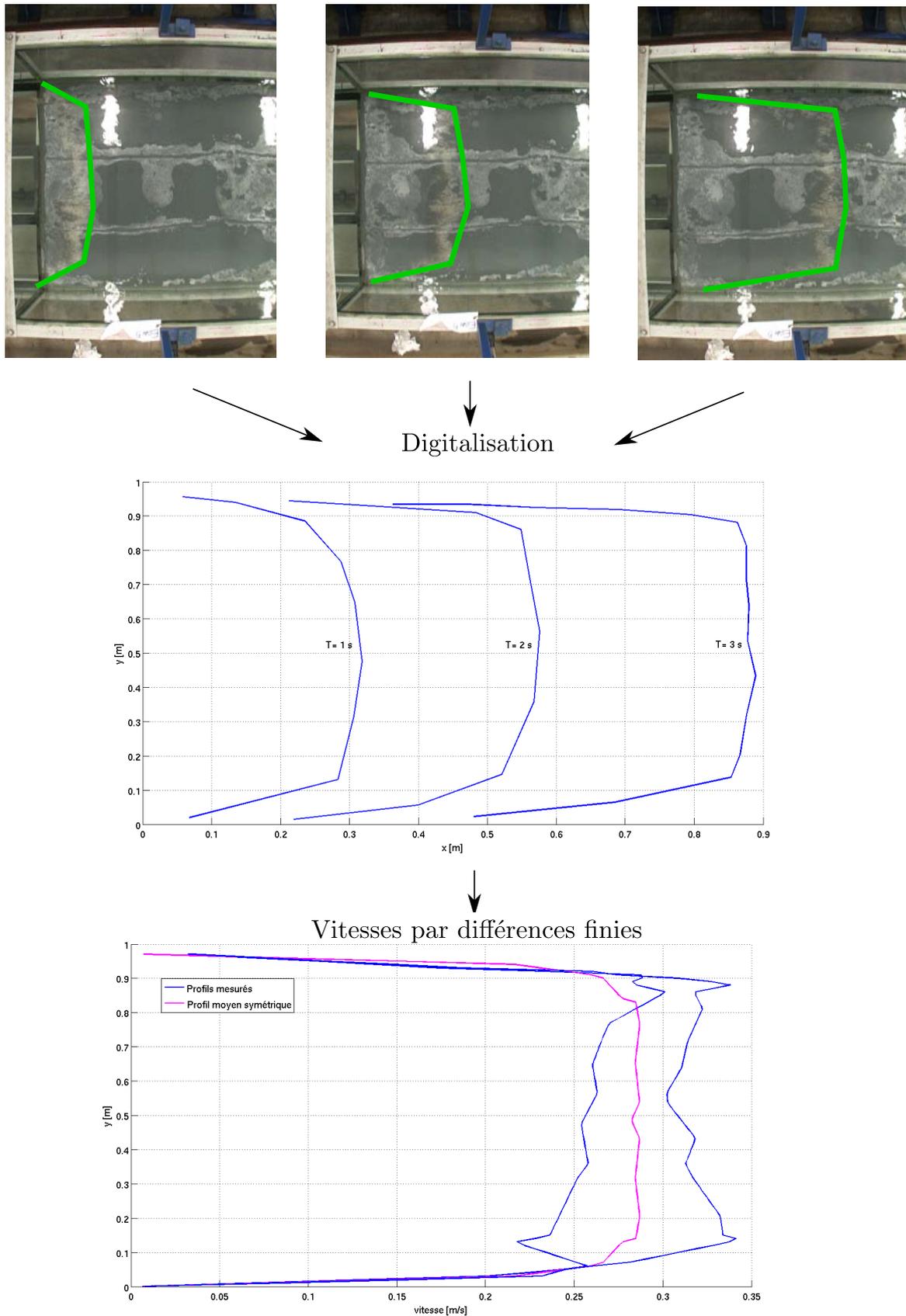


FIGURE 4.1.17 – Acquisition du profil de vitesse observé en laboratoire - essai 5

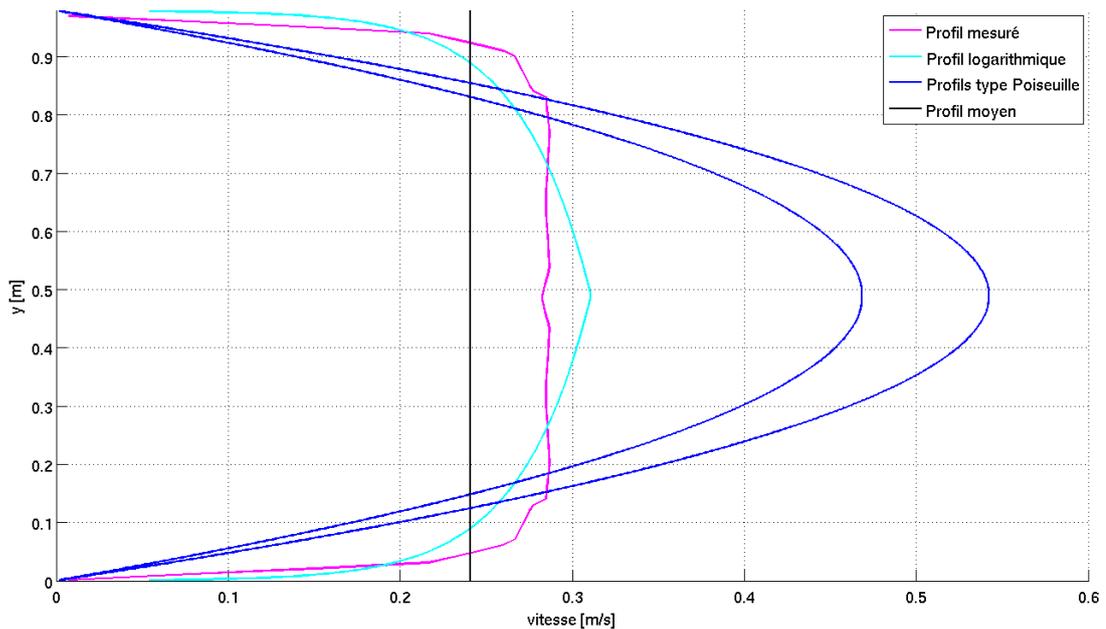


FIGURE 4.1.18 – Récapitulatif des différents profils de vitesse en surface récupérés

La figure 4.1.18 présentent les différents profils de vitesse récupérés. Le profil de vitesse obtenu par fit logarithmique est celui qui colle le mieux au profil mesuré. Pour pouvoir l'appliquer dans la routine de calcul sur un bateau de dimensions  $b \times l$ , il faut pratiquer une mise à l'échelle. On sait par similitudes de Froude que :

$$v_{\text{réel}} = \frac{v_{\text{modèle}}}{\sqrt{E}} \quad (4.1.25)$$

$$x_{\text{réel}} = \frac{x_{\text{modèle}}}{E} \quad (4.1.26)$$

Le profil de vitesse réel vaut donc :

$$v_{\text{réel}} = \frac{1}{\sqrt{E}} (0.0415 \ln(E x_{\text{réel}})) + 0.3406 \quad (4.1.27)$$

Une des observations importantes tirées des essais en laboratoire est la propension du modèle de bateau, lancé initialement en biais<sup>3</sup>, à subir une rotation de dérive à l'approche du bord de manière à s'aligner parallèlement à ce dernier. Cette trajectoire peut s'accompagner d'un choc avec le bord.

Les figures 4.1.19 et 4.1.20 présentent les trajectoires du bateau lancé respectivement dans un champ parabolique (Poiseuille) et logarithmique (digitalisation vidéo).

3. ou éventuellement de manière perpendiculaire ou parallèle pour autant que sa position initiale ne soit pas le milieu du canal

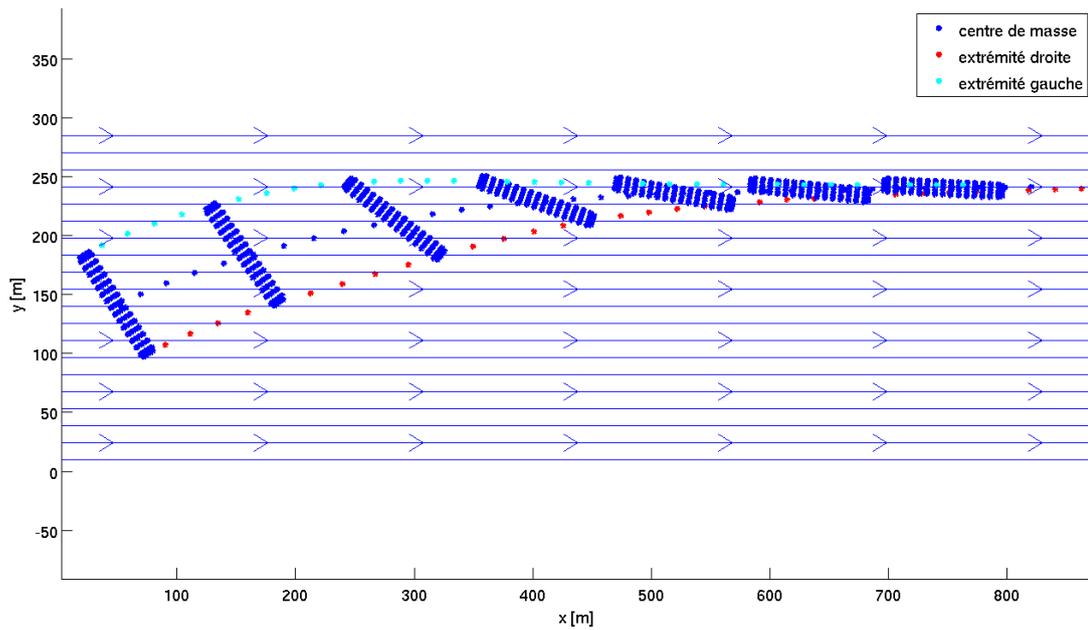


FIGURE 4.1.19 – Trajectoire en profil type Poiseuille

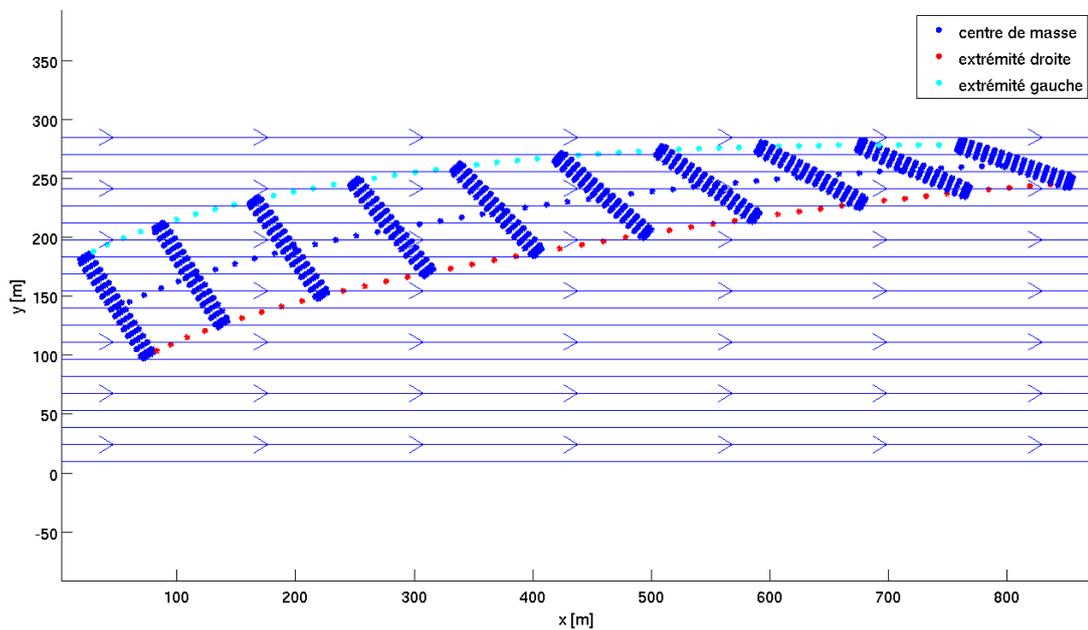


FIGURE 4.1.20 – Trajectoire en profil logarithmique

Cet effet de dérive peut s'expliquer par le fait que le bateau, à l'approche du bord, est soumis à des vitesses différentes de part et d'autre de son centre de masse, de sorte qu'un couple résultant non-nul apparaît. Ce phénomène n'existe pas en écoulement parfaitement uniforme car les vitesses appliquées et, par conséquent, les vitesses relatives sont les mêmes sur l'ensemble

du bateau. Le bateau subit donc une rotation qui tend à l'aligner de manière parallèle au bord. En réalité, la position d'équilibre, i.e. la dérive et les coordonnées du bateau pour lesquelles le bateau ne subit plus de rotation ni de translation selon  $Y$ , n'est pas une position parallèle au bord. Cet aspect est illustré ci-après

Avec le profil parabolique, le bateau ne rentre pas en collision avec le bord car la position d'équilibre est atteinte en vertu de la forte décroissance de la vitesse dès le moment où le bateau s'écarte du centre du canal. Avec le profil logarithmique, qui est une meilleure approximation du champ de vitesse réel, la propension du bateau à entrer en contact avec le bord est plus importante, et la position d'équilibre n'est jamais atteinte. La figure 4.1.21 présente l'évolution des coordonnées, des vitesses et des efforts au cours du temps.

Le bateau est initialement lancé avec une vitesse nulle au centre du canal. Comme la vitesse de l'écoulement est plus importante à cet endroit pour le profil de type Poiseuille, la vitesse du bateau selon  $X$  est plus importante au début de la simulation. Au niveau de l'angle de dérive, sa variation au cours du temps est plus importante étant donné que le profil décroît très vite au fur et à mesure que le bateau s'approche de la paroi.

Comme dans le cas de l'écoulement uniforme, la méthode moyennée présente une variation d'angle de dérive parasite liée au calcul approximatif du bras de levier des efforts résultants (cfr. section 3.7).

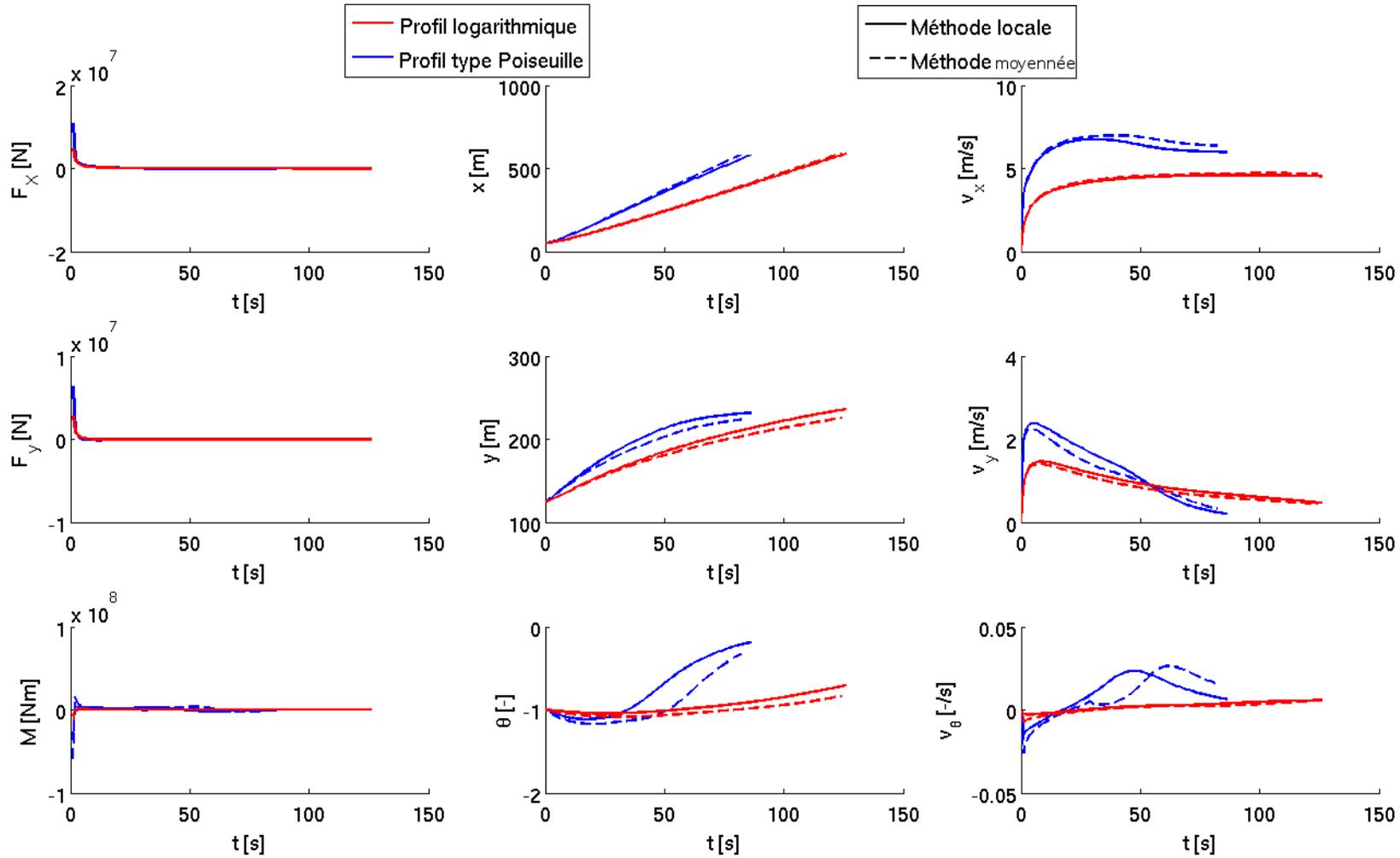


FIGURE 4.1.21 – Efforts, vitesses et positions en écoulement frottant aux bords - Comparaison des méthodes

## 4.2 Validation théorique du modèle

Dans cette section, l'attention est portée sur l'étude des résultats de la routine de prédiction récupérés pour des simulations lancées dans des configurations théoriques traitées dans la littérature.

Nous procédons en deux temps. Tout d'abord, la routine est testée dans un écoulement uniforme en remplaçant le bateau par une forme géométrique type, en l'occurrence, une sphère. Ensuite, nous étudions le comportement du bateau dans deux écoulement particuliers, à savoir les vortex forcé et libre, respectivement associés à un écoulement de masse et un écoulement irrotationnel.

### 4.2.1 Cas de la traînée de la sphère

L'étude du coefficient de traînée d'une sphère est un sujet largement documenté dans la littérature. L'étude ici envisagée consiste à comparer l'effort de traînée total obtenu, d'une part, théoriquement, via :

$$F_d = \frac{1}{2} C_d S \rho_w v^2 \underline{e}_x = \frac{1}{2} C_d \pi R^2 \rho_w v^2 \underline{e}_x \quad (4.2.1)$$

où  $C_d$  est défini en fonction du nombre de Reynolds via la courbe présentée à la figure 4.2.1, et d'autre part, numériquement, via la routine de calcul par approche locale précédemment détaillée.

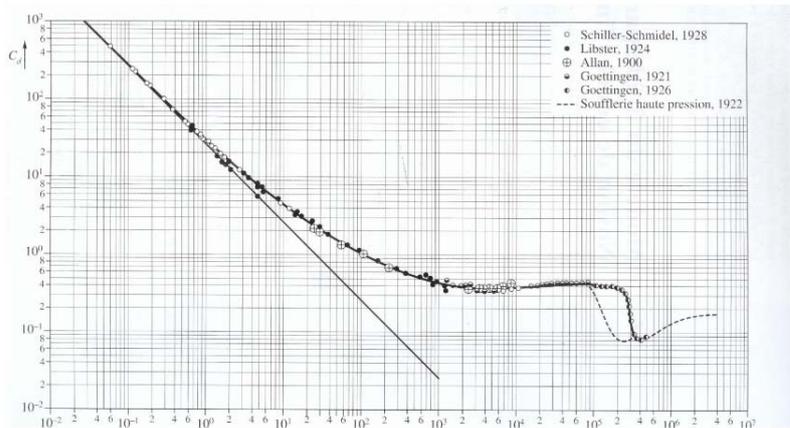


FIGURE 4.2.1 – Coefficient de traînée d'une sphère ([Morregia, 2013])

Dans le premier cas, l'effort de traînée est calculé sur base du maître couple de la sphère de rayon  $R$  ( $S = \pi R^2$ ) ainsi que d'une pression dynamique dépendant de la vitesse au large. Dans le second cas, la vitesse au large  $v$  est projetée sur la surface réelle de la sphère, reliée localement à une pression dynamique et intégrée sur la demi-sphère exposée à l'écoulement. Cette étude permettra d'identifier sous quelles conditions les deux calculs se rejoignent.

Théoriquement, la valeur de  $C_d$  est connue pour différentes gammes du nombre de Reynolds :

- $Re \leq 1 \implies C_d = \frac{24}{Re}$  ;
- $Re \in [10^3, 10^5] \implies C_d \simeq 0,45$ .

Dans l'approche numérique, la position de chaque point discrétisé de la sphère est désignée par deux angles (figure 4.2.2) :

- $\theta$  est un angle de rotation autour de l'axe  $\vec{e}_z$ ,
- $\psi$  est un angle de rotation autour de l'axe  $\vec{e}_\theta = \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$

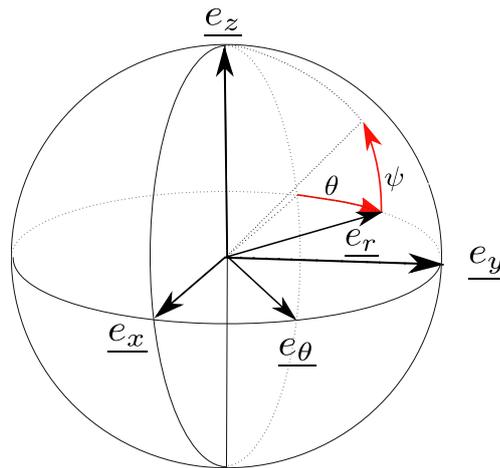


FIGURE 4.2.2 – Angles de description de la sphère

Le pas spatial angulaire peut être modifié et raffiné. Le résultat discrétisé avec spécification d'une normale à chaque élément de discrétisation est présenté à la figure 4.2.3

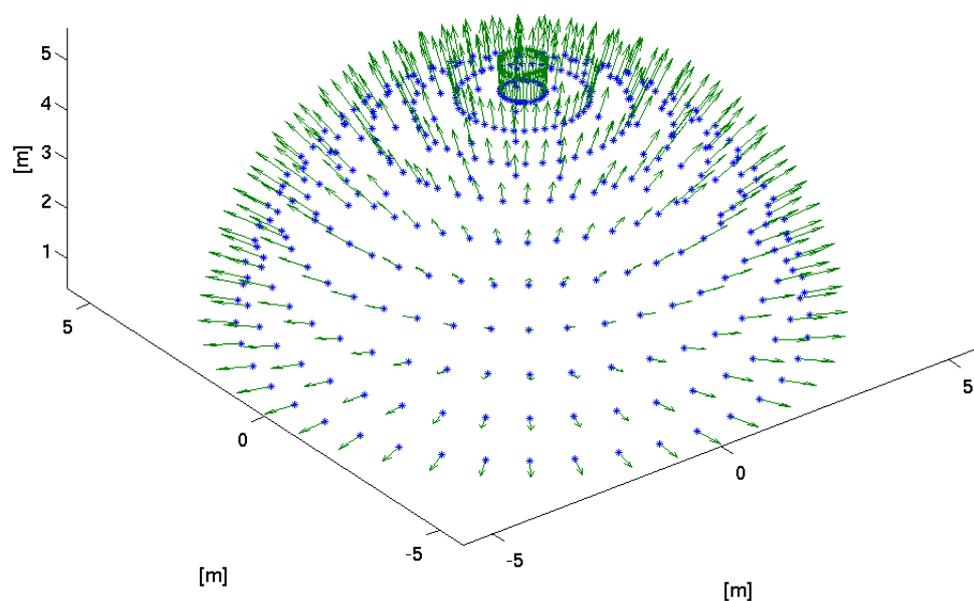


FIGURE 4.2.3 – Sphere discrétisée dans la routine

En pratique, le résultat théorique attendu via la courbe présentée à la figure 4.2.1 est atteint à l'aide de la routine de calcul en procédant aux aménagements suivants :

- $C_{\perp} = C_{\parallel} = C_d$ ,
- La vitesse est mise au carré avant d'être projetée sur chacune des facettes de la sphère. Cette opération revient à travailler directement avec une pression (proportionnelle à  $v^2$ ) en entrée, plutôt qu'une vitesse. En pratique, elle diminue d'un ordre en sinus et cosinus les termes liés à la projection sur la facette.

Pour illustrer, plaçons nous en deux dimensions dans le cas d'un cercle soumis à un écoulement uniforme (figure 4.2.4). Les efforts dans les axes liés aux éléments de discrétisation deviennent :

**Champ de pression en entrée**

$$F_{\perp} = \frac{1}{2} C_{\perp} \rho_w v^2 \sin \psi d\Omega \quad (4.2.2)$$

$$F_{\parallel} = \frac{1}{2} C_{\parallel} v^2 \cos \psi \rho_w d\Omega \quad (4.2.3)$$

**Champ de vitesse en entrée**

$$F_{\perp} = \frac{1}{2} C_{\perp} \rho_w v^2 \sin \psi^2 d\Omega \quad (4.2.4)$$

$$F_{\parallel} = \frac{1}{2} C_{\parallel} v^2 \cos \psi^2 \rho_w d\Omega \quad (4.2.5)$$

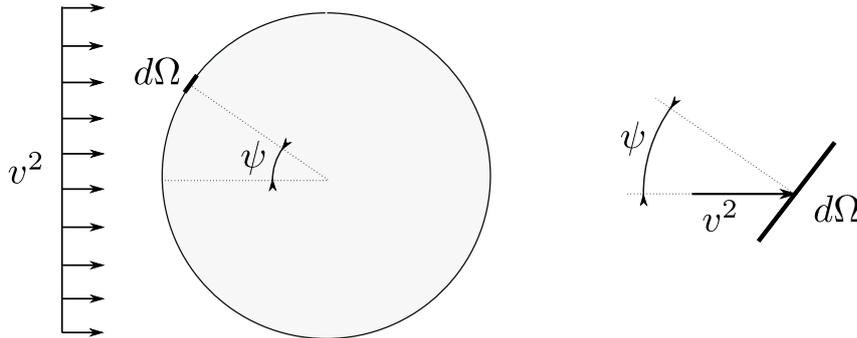


FIGURE 4.2.4 – Projection du champ de pression

- Le profil de pression calculé est mis à l'échelle via la facteur de réduction suivant, qui vaut le rapport entre la surface projetée perpendiculairement au champ de vitesse et la surface vraie, toutes deux associées à l'élément  $i$  :

$$\text{red}_i = \frac{d\Omega_{\text{proj},i}}{d\Omega_i} = \frac{R^2 \cos \theta \cos \psi^2 d\psi d\theta}{R^2 \cos \psi d\psi d\theta} = \cos \theta \cos \psi \quad (4.2.6)$$

Cette mise à l'échelle est justifiée par le fait que le coefficient de traînée  $C_d$  est constant et n'intègre par conséquent pas l'inclinaison d'une facette donnée. Cette dernière est comprise dans le maître couple  $S$ . Cette opération de réduction est illustrée à la figure 4.2.5.

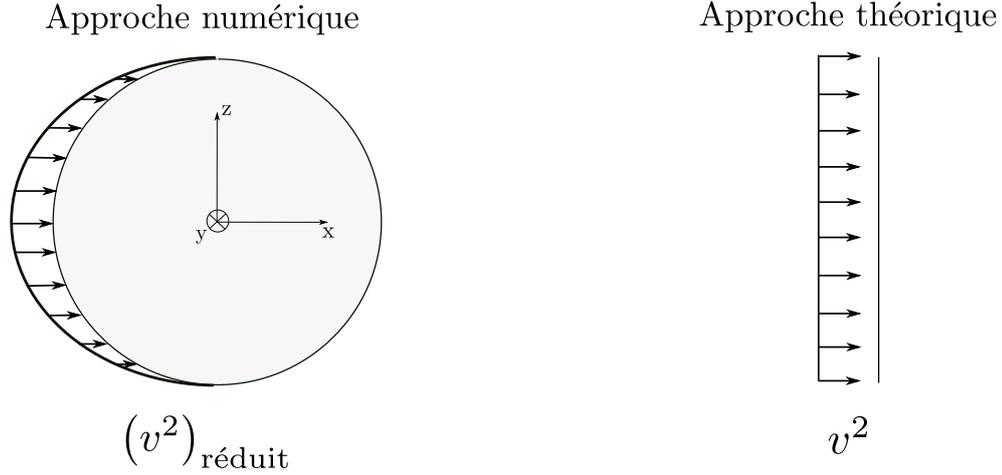


FIGURE 4.2.5 – Différence entre l’approche théorique et l’approche numérique

Cette équivalence entre l’approche théorique et l’approche numérique sous les conditions suscitées peut être prouvée analytiquement. Il suffit pour ce faire de comparer :

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho_w v^2 \pi R^2 \quad (4.2.7)$$

à :

$$F_{\text{num}} = \frac{1}{2} C_d \rho_w \iint_{\Omega} p_X d\Omega \quad (4.2.8)$$

où :

- $\Omega$  est la demi-sphère exposée face à l’écoulement,
- $p_X \propto v^2$  est la pression, projetée une première fois sur la surface  $d\Omega$  (une composante normale et deux composantes tangentielles) et projetée une seconde fois pour récupérer uniquement sa composante selon  $X$ .

Remarquons que pour récupérer la composante selon  $X$ , il suffit de pratiquer une seconde fois la projection utilisée pour projeter la pression sur la surface  $d\Omega$ .

Une nouvelle expression de  $d\Omega$  peut être réécrite en fonction des paramètres du problème :

$$d\Omega = R^2 \cos \psi d\psi d\theta \quad (4.2.9)$$

Comme précisé,  $p_X$  est décomposé en trois parties :

- $p_{X,\perp}$ , liée à la composante  $p_{\perp}$  normale à la surface  $d\Omega$ . La projection de  $p_{\perp}$  est donnée par  $-\cos \phi \cos \theta$ . Ainsi,  $p_{X,\perp}$  contribue à l’effort total via :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{2} C_d \rho_w v^2 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \psi \cos \theta)^2 \cos \theta \cos \psi R^2 \cos \psi d\psi d\theta \\
 &= 2 C_d \rho_w v^2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \psi \cos^3 \theta d\psi d\theta \\
 &= 2 C_d \rho_w v^2 R^2 \frac{1}{32} (12\psi + 8 \sin(2\psi) + \sin(4\psi)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12} (9 \sin(\theta) + \sin(3\theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{4} C_d \rho_w v^2 R^2
 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

- $p_{X,\parallel,1}$ , liée à la composante  $p_{\parallel,1}$  tangentielle à la surface  $d\Omega$ . La projection de  $p_{\parallel,1}$  est donnée par  $\sin \theta$ . Ainsi,  $p_{X,\parallel,1}$  contribue à l'effort total via :

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \frac{1}{2} C_d \rho_w v^2 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^2 \cos \theta \cos \psi R^2 \cos \psi d\psi d\theta \\
 &= 2 C_d \rho_w v^2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \psi d\psi d\theta \\
 &= 2 C_d \rho_w v^2 R^2 \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\psi + \sin \psi \cos \psi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{6} C_d \rho_w v^2 R^2
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

- $p_{X,\parallel,2}$ , liée à la composante  $p_{\parallel,2}$  tangentielle (qui est perpendiculaire à  $p_{\parallel,1}$ ) à la surface  $d\Omega$ . La projection de  $p_{\parallel,1}$  est donnée par  $-\sin \phi \cos \theta$ . Ainsi,  $p_{X,\parallel,1}$  contribue à l'effort total via :

$$\begin{aligned}
 F_3 &= \frac{1}{2} C_d \rho_w v^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin \psi \cos \theta)^2 \cos \theta \cos \psi R^2 \cos \psi d\psi d\theta \\
 &= 2 C_d \rho_w v^2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cos^2 \psi \cos^3 \theta d\psi d\theta \\
 &= 2 C_d \rho_w v^2 R^2 \frac{1}{32} (4\psi - \sin 4\psi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12} (9 \sin(\theta) + \sin(3\theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{12} C_d \rho_w v^2 R^2
 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Au final :

$$F_d = F_1 + F_2 + F_3 = F_{\text{num}} \tag{4.2.13}$$

L'application au cas de la sphère a permis de montrer que la routine de calcul pouvait être manipulée pour retomber sur une courbe théorique connue. En pratique, dans les simulations menées avec le bateau, le coefficient  $C_{\parallel}$  lié aux vitesses tangentielles est considéré nul et c'est le champ de vitesse (non réduit) qui est projeté. Ce dernier aspect ne porte pas à conséquence car  $F_1$  est identique, que ce soit avec un champ de pression réduit, ou un champ de vitesse non-réduit, ce qui n'est pas le cas de  $F_2$  et  $F_3$ .

### 4.2.2 Vortex forcé

L'écoulement de masse, appelé également vortex forcé, est une configuration de référence utilisée dans le cadre de validation de méthodes numériques, notamment via le cas test du cercle de Zalesak [Menard, 2007].

Le bateau est plongé dans un champ de vitesse circulaire qui peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} v_X = \frac{2v_b}{l_Y} \left( Y - \frac{l_Y}{2} \right) \\ v_Y = \frac{2v_b}{l_X} \left( \frac{l_X}{2} - X \right) \end{cases} \quad (4.2.14)$$

où :

- Le domaine est de taille  $l_X \times l_Y$ , on considère dans la suite des développements que le domaine est carré de sorte que  $l_X = l_Y = l_{dom}$ ,
- $v_b$  est un paramètre qui spécifie la valeur absolue de la vitesse aux bords<sup>4</sup> du domaine.

Le champ de vitesse peut également être décrit en fonction de la distance  $r$  au centre du domaine via :

$$v(r) = \frac{2v_b}{l_{dom}} r \quad (4.2.15)$$

Dans cette application, il convient de discuter de la forme du champ de hauteur d'eau. On considère une tranche fluide située à une distance  $r$  du centre du domaine. Elle est animée d'une vitesse  $v(r)$  et subit donc une accélération centrifuge :

$$a = \frac{v^2(r)}{r} \quad (4.2.16)$$

On écrit l'équilibre de la tranche fluide (figure 4.2.6) :

$$\begin{aligned} F &= ma \\ F_{i+1} - F_i &= \rho_w d\Omega \frac{v^2(r)}{r} \\ \rho g \frac{h_{i+1}^2}{2} - \rho g \frac{h_i^2}{2} &= \rho_w \frac{(h_{i+1} + h_i) dr}{2} \frac{v^2(r)}{r} \\ \frac{\rho g}{2} (h_{i+1} - h_i) (h_{i+1} + h_i) &= \rho_w \frac{(h_{i+1} + h_i) dr}{2} \frac{r}{(l_{dom}/2)^2} v_b^2 \\ &\Updownarrow \\ \frac{dh}{dr} &= \frac{v_b^2 r}{l^2 g} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

---

4. En  $(X, Y) = (0, l_Y/2), (l_X/2, 0), (l_X, l_Y/2), (l_X/2, l_Y)$

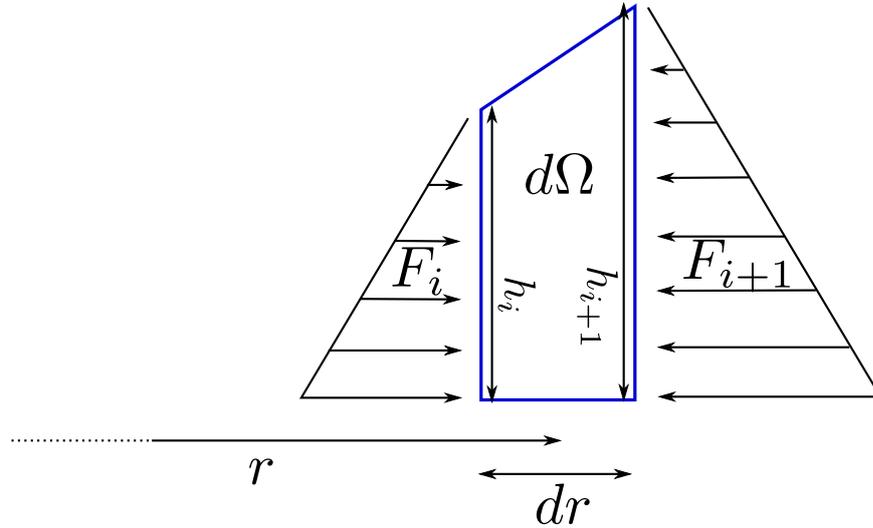


FIGURE 4.2.6 – Équilibre d'une tranche fluide en écoulement de masse

Via cette expression de la variation de  $h$  en fonction de  $r$ . On peut déterminer de proche en proche la hauteur d'eau sur le domaine en démarrant du centre où la hauteur est fixée à  $h_{centre}$ . Ici, l'expression est à variables séparables et permet donc de trouver une expression analytique de  $h(r)$  :

$$\int dh = \int \frac{v_b^2 r}{l^2 g} dr + C^{ste}$$

$$\Downarrow$$

$$h = \frac{v_b^2 r^2}{2l^2 g} + C^{ste} \tag{4.2.18}$$

En  $r = 0$ ,  $h = h_{centre}$ , de sorte que  $C^{ste} = h_{centre}$

Les figures 4.2.7 et 4.2.8 illustrent les représentations tridimensionnelles du champ de hauteur d'eau et de vitesse respectivement.

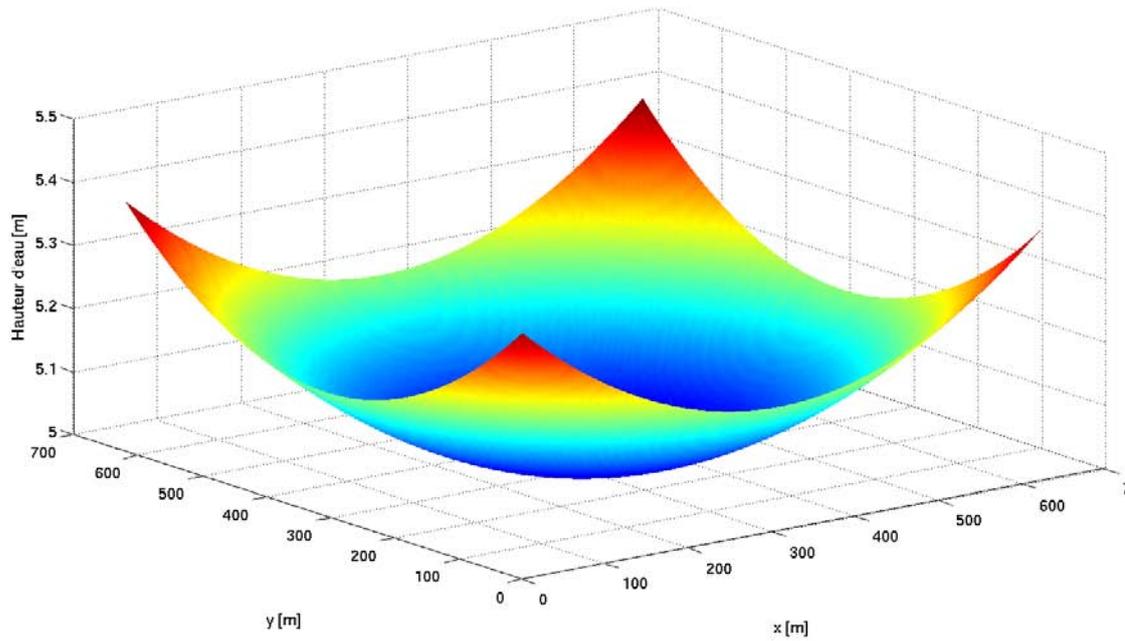


FIGURE 4.2.7 – Champ de hauteur d'eau en écoulement de masse

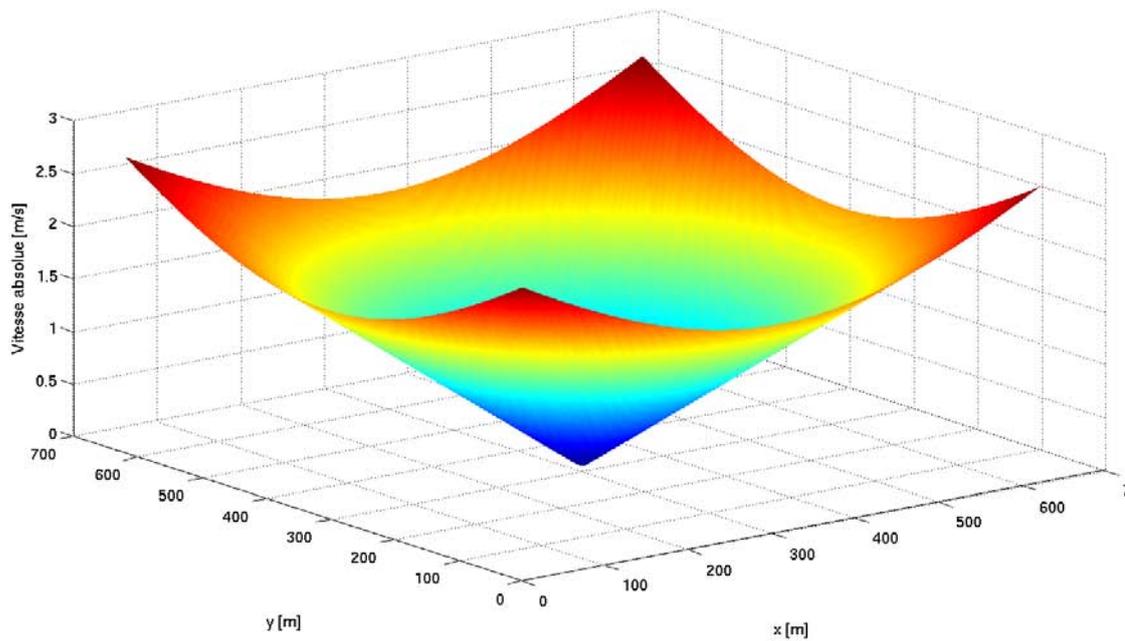


FIGURE 4.2.8 – Champ de vitesse en écoulement de masse

Un des aspects intéressants de ce type d'écoulement est d'étudier au cours du temps l'évolution de la force radiale appliquée sur le bateau et d'identifier ses différentes composantes de manière à déterminer si le bateau se stabilise sur une orbite.

La première composante est liée à la vitesse tangentielle du bateau lorsque celui se déplace sur un arc de cercle dont le centre est celui du domaine. Le bateau est alors soumis à une force centrifuge (force fictive d'inertie) dirigée radialement et qui pointe vers l'extérieur du cercle.

La deuxième composante est liée à la forme du bateau et à sa dérive. L'étude de l'écoulement uniforme a mis en évidence qu'un bateau soumis à une vitesse dirigée dans une direction ne conduisait pas uniquement à une translation dans cette direction. Il est en est de même dans ce cas de figure. Un bateau sollicité par une vitesse purement tangentielle pourra être sujet à une translation radiale. Cet effort est appelé force radiale dynamique.

La troisième composante est liée au différentiel de pression hydrostatique. Comme illustré dans la section précédente, cette composante est une force centripète qui tend à ramener le bateau vers le centre du cercle.

Pour illustrer la dynamique du problème, nous négligeons dans un premier temps la force liée au différentiel de pression hydrostatique. La figure 4.2.9 présente la trajectoire du bateau sous cette hypothèse. Le bateau est irrémédiablement emporté vers l'extérieur du domaine. En effet, la seule force radiale dynamique ne permet pas de compenser les effets centrifuges (figure 4.2.10). De plus, selon l'inclinaison du bateau, elle peut même les amplifier.

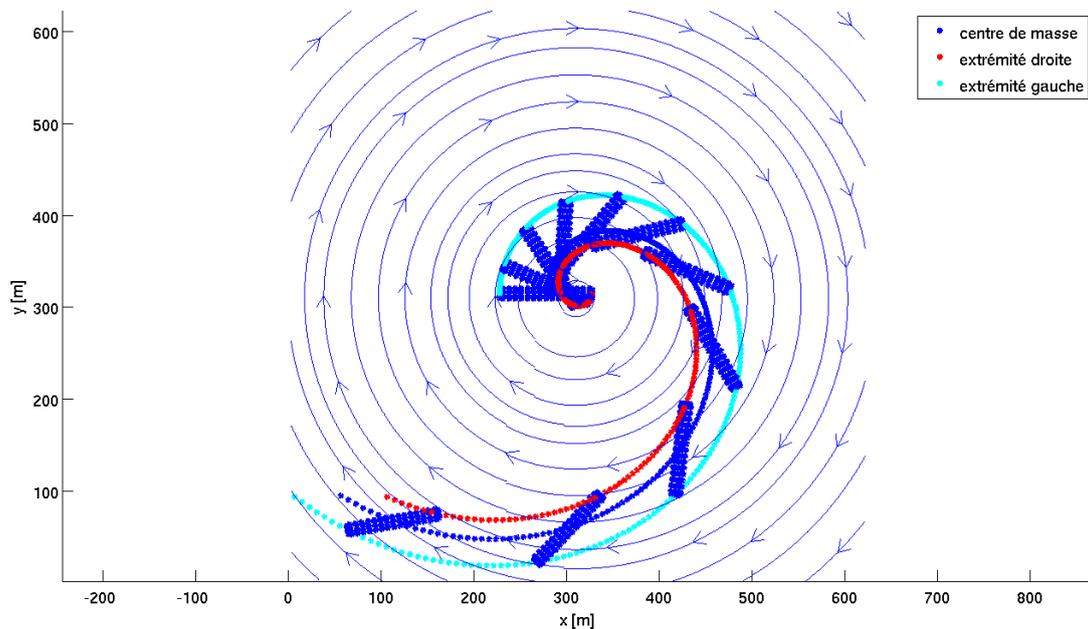


FIGURE 4.2.9 – Trajectoire du bateau en négligeant l'effet hydrostatique

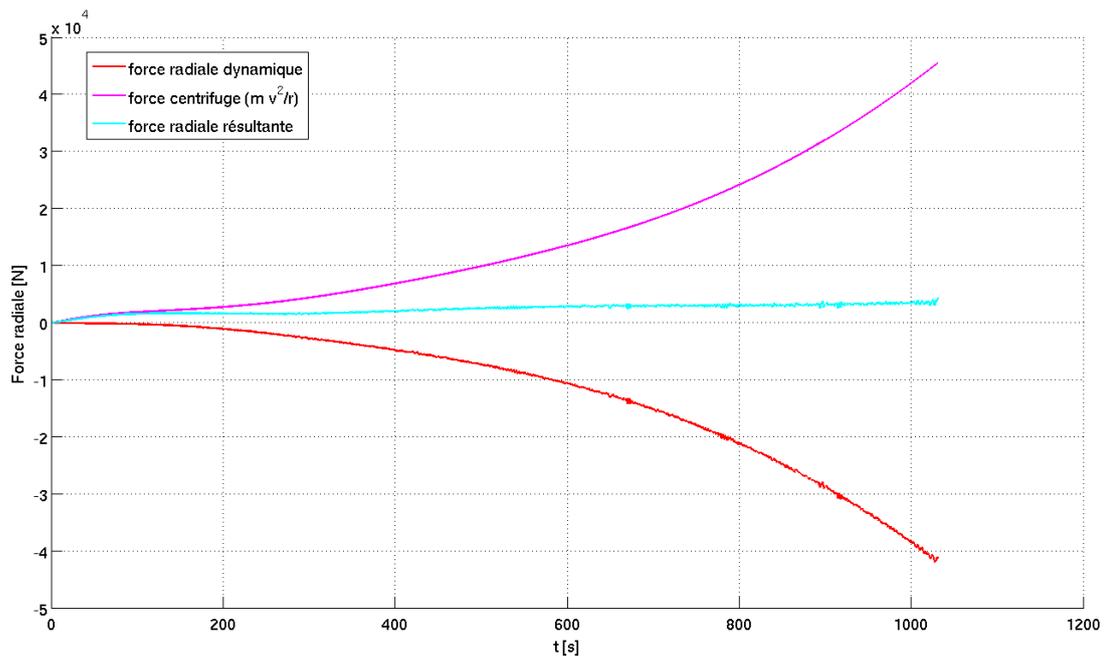


FIGURE 4.2.10 – Effort radiaux liés à la trajectoire sans effet hydrostatique

Nous considérons maintenant l'ensemble des forces appliquées sur le bateau. Les figures 4.2.11 et 4.2.12 mettent en vis-à-vis la trajectoire du bateau dans le domaine et l'évolution des différents efforts radiaux. Initialement, le bateau est au repos et est donc uniquement soumis au différentiel de pression hydrostatique et à un effet hydrodynamique liée à sa forme. Lorsque le bateau se met en mouvement sous l'action de l'écoulement, il acquiert une vitesse circumférentielle. Cette vitesse tend continuellement vers la vitesse de l'écoulement et confère au bateau une accélération centrifuge.

La force résultante diminue en valeur absolue au cours du temps et oscille in fine autour de 0. Le bateau se stabilise ainsi sur une orbite.

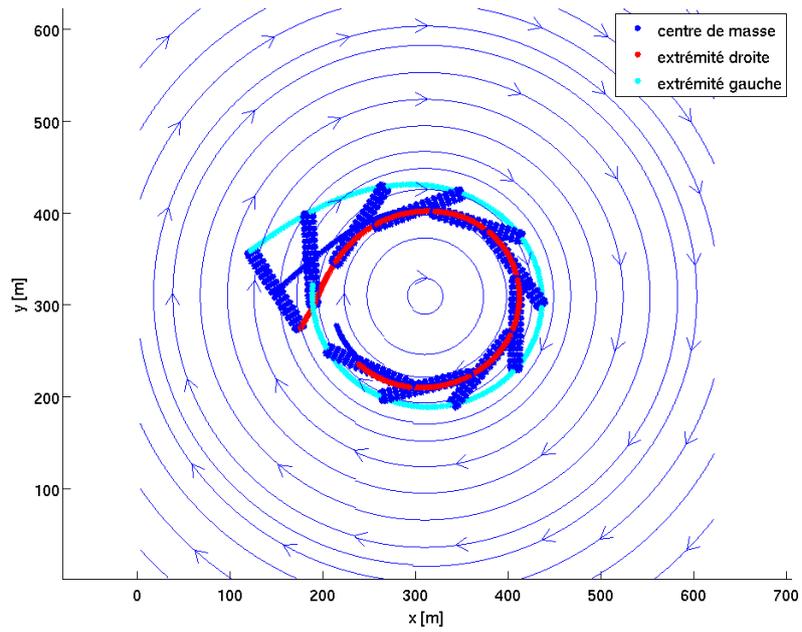


FIGURE 4.2.11 – Trajectoire stabilisée du bateau

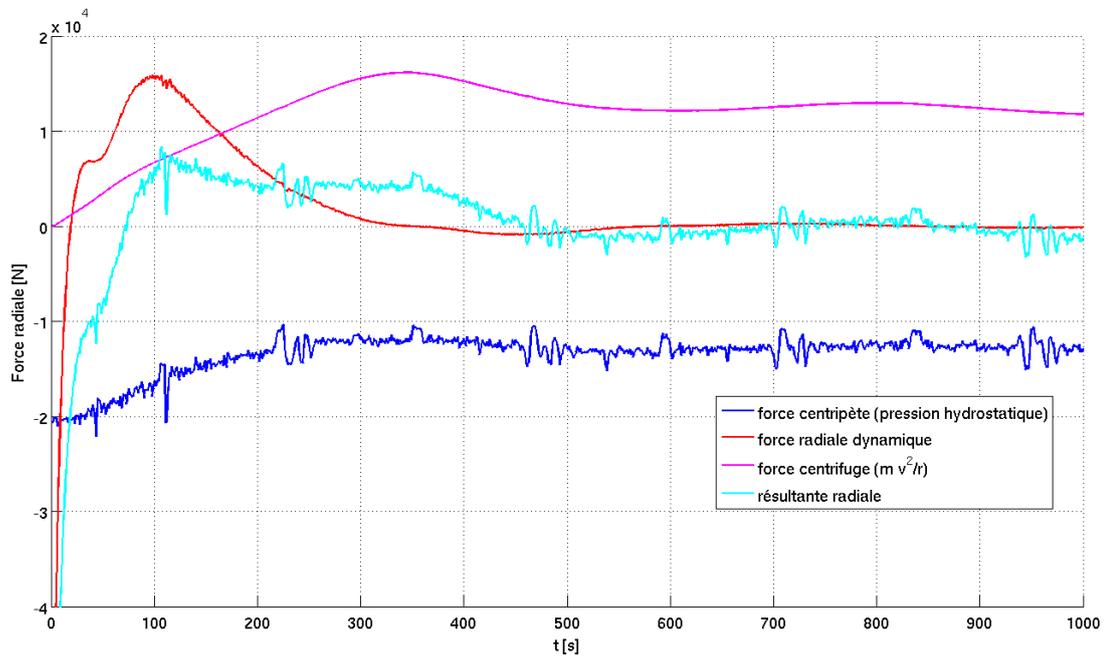


FIGURE 4.2.12 – Effort radiaux en trajectoire stabilisée

En pratique, l'estimation préalable du rayon de cette orbite est ardue car elle nécessite d'une part l'intégration de la dynamique du système (la bateau part d'une vitesse nulle pour in fine se calquer sur la vitesse de l'écoulement) et d'autre part le calcul de l'enfoncement instantané du bateau. On peut cependant prouver conceptuellement l'existence d'une orbite d'équilibre :

- On néglige par simplification les effets radiaux liés à la forme du bateau, ils s'atténuent en effet assez rapidement car ils sont proportionnels à la vitesse relative entre le bateau et l'écoulement et sont quasi-nuls une fois la stabilisation atteinte (figure 4.2.12),
- On calcule le différentiel de pression hydrostatique comme la différence entre les résultantes de diagrammes triangulaires liés aux enfoncements de part et d'autre du bateau (prenons  $T_1$  et  $T_2$  pour illustrer). Le calcul de l'enfoncement est relié de manière linéaire à la pente de surface libre<sup>5</sup> de sorte que :

$$\begin{aligned}
 T_1 &\propto \frac{dh}{dr}; & T_2 &\propto \frac{dh}{dr} \\
 &\Downarrow & & \\
 F_{hydrostat} &\propto T_2^2 - T_1^2 = (T_2 - T_1)(T_2 + T_1) \propto \left(\frac{dh}{dr}\right)^2
 \end{aligned}
 \tag{4.2.19}$$

On sait que  $\frac{dh}{dr} \propto r$  (équation (4.2.17)). Au final, la dépendance de la force de pression hydrostatique est en  $r^2$ . On sait de plus que le différentiel de pression hydrostatique vaut 0 en  $r = 0$ ,

- La vitesse circonférentielle du bateau est dépendante du temps et directement proportionnelle à  $r$ . La vitesse circonférentielle du bateau tend vers la vitesse de l'écoulement à l'endroit où il se situe, la dépendance en  $r$  se raidit donc au cours du temps mais reste linéaire. En définitive, la force liée à l'accélération centrifuge est caractérisée par :

$$F_{centrifuge} \propto \frac{v_{circ}^2}{r} \propto \frac{r^2}{r} = r
 \tag{4.2.20}$$

En  $r = 0$ ,  $v_{circ} = 0 \rightarrow F_{centrifuge} = 0$

La figure 4.2.13 présente ainsi l'allure des forces radiales liée respectivement au différentiel de pression hydrostatique et à la vitesse circonférentielle du bateau :

- $r_{eq}$  correspond au rayon de l'orbite sur laquelle se stabilise le bateau,
- Pour  $r > r_{eq}$ ,  $F_{hydrostat} > F_{centrifuge}$  et le bateau est ramené vers le centre du domaine,
- Pour  $r < r_{eq}$ ,  $F_{hydrostat} < F_{centrifuge}$  et le bateau est expulsé vers des rayons plus élevés.

---

5. Cfr. section 3.4

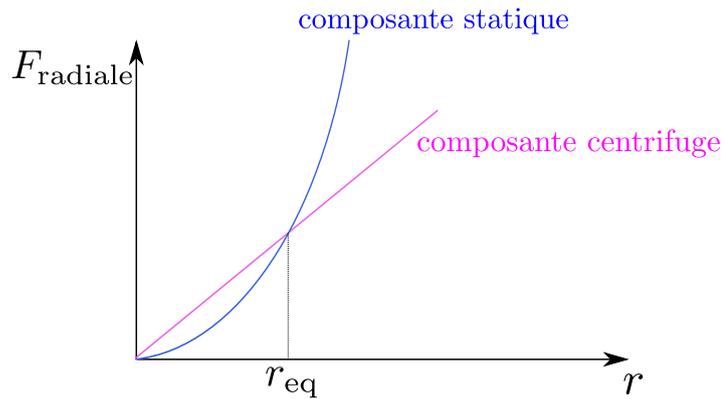


FIGURE 4.2.13 – Illustration de l’existence d’une orbite d’équilibre

Remarquons que la force peut être opposée au déplacement radial du bateau. En effet, en raison de la dynamique du système, il faut d’abord vaincre l’inertie du bateau. Ce phénomène explique les oscillations atténuées du bateau autour du rayon d’équilibre.

Nous allons maintenant vérifier si un bateau, lancé avec une vitesse initiale correspondant à la vitesse de l’écoulement aux coordonnées initiales du centre de masse, subit une rotation dite "de masse". Cela signifie que la position du bateau dans des axes  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\zeta)$  (figure 4.2.14) doit rester inchangée au cours du temps.

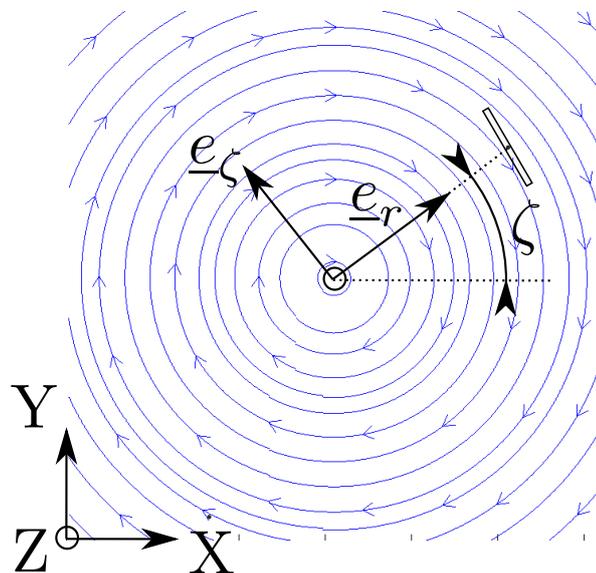


FIGURE 4.2.14 – Définition de la rotation de masse

Le résultat est présenté aux figures 4.2.15 et 4.2.16 qui illustrent respectivement les trajectoire et les efforts radiaux.

Les efforts ont une allure constante au cours du temps, ce qui entraîne que l’orbite de stabilisation est l’orbite sur laquelle le bateau avait été initialement lancé. La rotation de masse est parasitée par un légère variation de l’écartement par rapport au centre du domaine et de la dérive calculée

dans les axes  $(e_r, e_\zeta)$ . Cette imprécision est la conséquence de la discrétisation du domaine et du bateau. Remarquons également que plus la position initiale s'écarte du centre du domaine, plus la pente de surface libre devient élevée et plus le calcul de l'enfoncement du bateau imprécis (cfr. section 3.4).

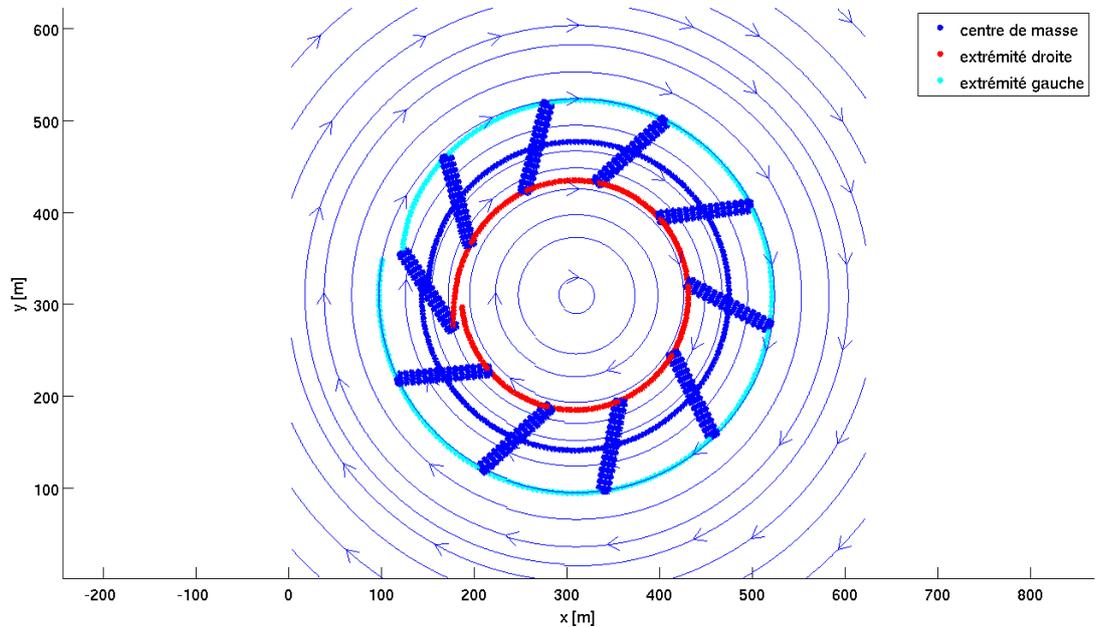


FIGURE 4.2.15 – Trajectoire en rotation de masse

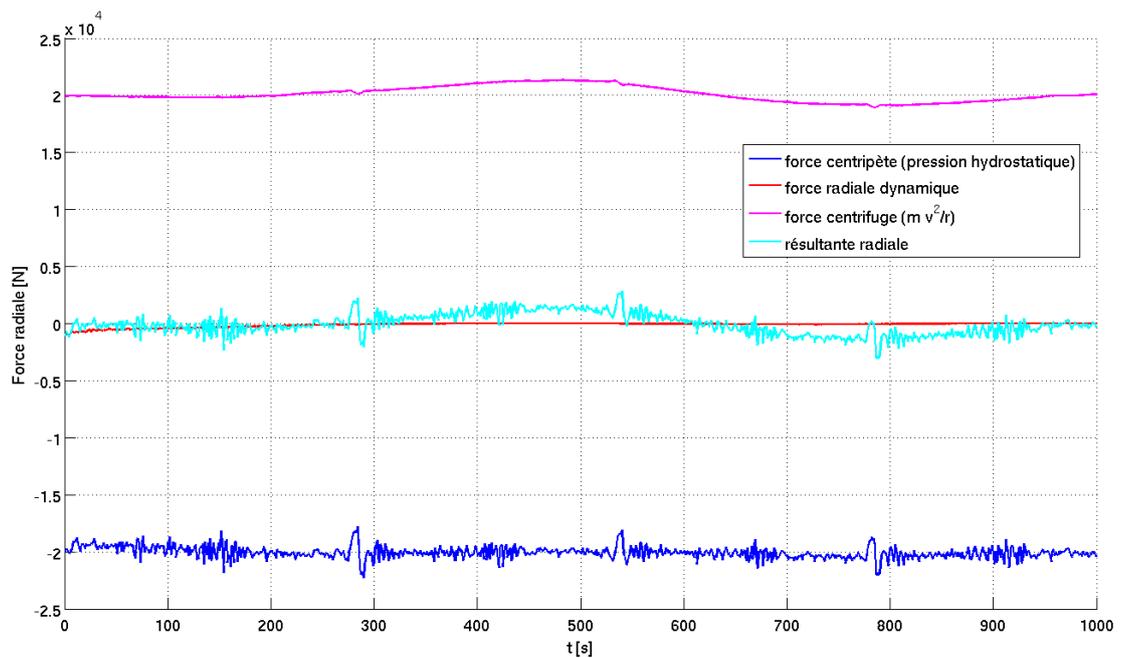


FIGURE 4.2.16 – Efforts radiaux en rotation de masse

### Validation du module de calcul du différentiel de pression hydrostatique

La définition de ce champ parabolique de hauteur d'eau peut être utilisé pour vérifier le calcul du différentiel de pression hydrostatique. Pour ce faire, on se place dans un domaine où la vitesse est nulle en tout point et où la surface est décrite par ce champ parabolique. Le bateau est initialement au repos et la position initiale de son centre de masse est différente de la position du centre du domaine. Il s'agit d'une analogie directe avec le cas d'une bille lâchée avec une vitesse nulle sur la surface intérieure d'un bol (figure 4.2.17) ou encore avec un pendule harmonique (à ceci près que la trajectoire du pendule est circulaire et non parabolique).

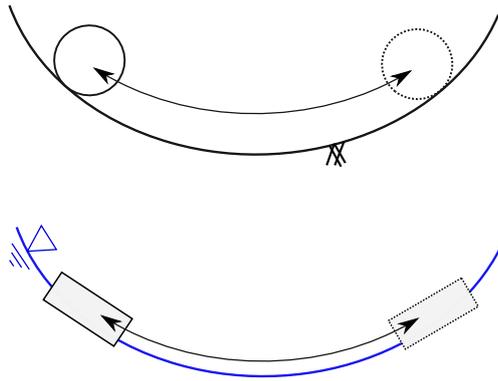


FIGURE 4.2.17 – Analogie entre une bille dans un bol et le bateau dans le champ parabolique de hauteur

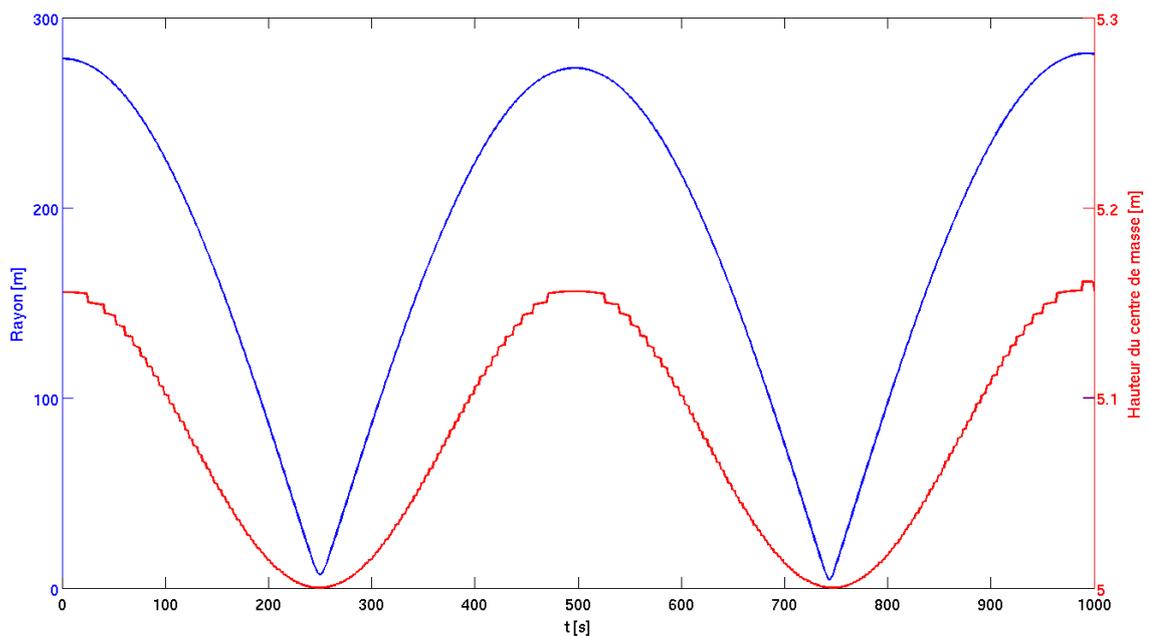


FIGURE 4.2.18 – Oscillations du bateau autour du centre du domaine sous l'effet seul de la pression hydrostatique

Il n'existe pas de dissipation d'énergie, de sorte que le bateau doit osciller sans atténuation autour du centre du domaine. La figure 4.2.18 présente l'évolution de la position du centre de masse et de la cote de surface libre associée au cours du temps.

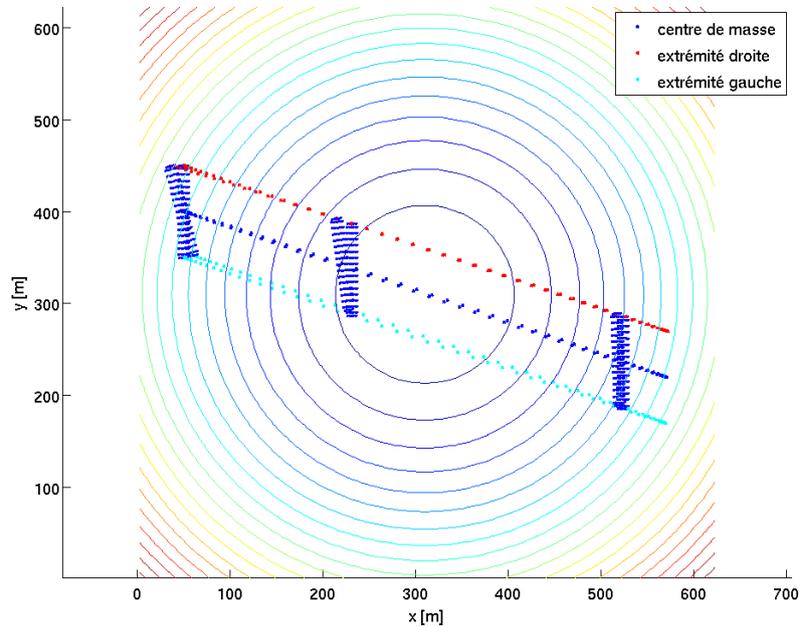


FIGURE 4.2.19 – Oscillations du bateau autour du centre du domaine sous l'effet seul de la pression hydrostatique

La figure 4.2.19 présente la trajectoire du centre de masse et des extrémités du bateau. Le bateau oscille autour du centre du domaine. La variation de dérive est petite et d'origine numérique (discrétisation spatiale du bateau et du domaine).

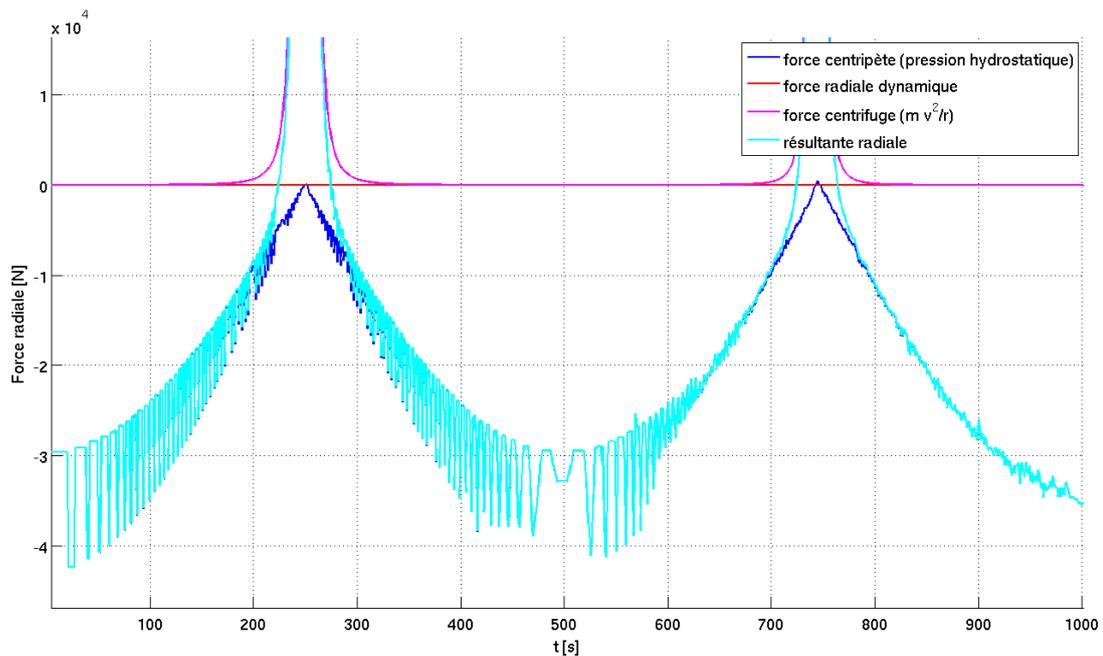


FIGURE 4.2.20 – Effort radiaux sous l'effet seul de la pression hydrostatique

Les efforts radiaux sont illustrés à la figure 4.2.20. La pression hydrostatique (force centripète), prise en valeur absolue, est d'autant plus élevée que le bateau est éloigné du centre du domaine. Ceci est corrélé avec le profil de hauteur d'eau parabolique. L'allure de cet effort centripète est sinusoïdale et présente une forte variabilité autour de ce sinus en début de simulation. Cette variabilité s'atténue avec la variation parasite de dérive.

Le pic de force centrifuge apparaît car le centre de masse du bateau ne passe pas exactement par le centre du domaine au cours des oscillations (pour toute une série de raisons, notamment liées à la discrétisation du domaine et du bateau). Étant donné que la vitesse absolue du bateau est maximale lorsqu'il est à proximité du centre, cela lui confère une vitesse circulaire importante qui contribue à cet effort fictif d'inertie.

### 4.2.3 Vortex libre

Un autre écoulement de référence dans lequel le comportement du bateau à la dérive peut être étudié est le cas du vortex libre qui constitue un exemple de champ de vitesse irrotationnel. Le bateau est plongé dans un écoulement circulaire dans lequel la vitesse peut être exprimée en fonction de l'écart avec le centre du domaine, i.e. du rayon  $r$ .

$$v(r) = l_r^j v_b r^{-j} \quad (4.2.21)$$

où  $j$  est un paramètre positif et  $l_r = l_{dom}/2$ .

Pour déterminer le champ de hauteur de l'eau, on exprime l'équilibre d'une tranche fluide de manière analogue à celle employée pour l'écoulement de masse :

$$\begin{aligned} F &= ma \\ F_{i+1} - F_i &= \rho_w d\Omega \frac{v^2(r)}{r} \\ \rho g \frac{h_{i+1}^2}{2} - \rho g \frac{h_i^2}{2} &= \rho_w \frac{(h_{i+1} + h_i) dr}{2} \frac{v^2(r)}{r} \\ \frac{\rho g}{2} (h_{i+1} - h_i) (h_{i+1} + h_i) &= \rho_w \frac{(h_{i+1} + h_i) dr}{2} l_r^{2j} v_b^2 r^{-1-2j} \\ &\Downarrow \\ \frac{dh}{dr} &= \frac{l_r^{2j} v_b^2 r^{-1-2j}}{g} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

L'équation est à variables séparables. Une expression analytique de  $h$  en fonction de  $r$  peut ainsi être déterminée :

$$\begin{aligned} \int dh &= \frac{l_r^{2j} v_b^2}{g} \int r^{-1-2j} dr \\ &\Downarrow \\ h(r) &= \frac{l_r^{2j} v_b^2}{g} \frac{r^{-2j}}{-2j} + C^{ste} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

en  $h(l_r) = h_b$  de sorte que :

$$\begin{aligned} h_b &= \frac{-v_b^2}{2g} + C^{ste} \\ &\Downarrow \\ C^{ste} &= h_b + \frac{v_b^2}{2jg} \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Finalement,

$$h(r) = \frac{l_r^{2j} v_b^2}{g} \frac{r^{-2j}}{-2j} + h_b + \frac{v_b^2}{2jg} \quad (4.2.25)$$

En pratique, pour un vortex libre, la dépendance de la vitesse est en  $r^{-1}$ . Le paramètre  $j$  est ainsi fixé à 1. On obtient ainsi une expression analogue à celle présente en théorie de mécanique de fluide pour un fil tourbillonnaire rectiligne [Piroton, 2014] :

$$z_{SL} = z_0 - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g R^2} \quad (4.2.26)$$

où les paramètres ( $\Gamma$  désigne la circulation) sont présentés à la figure 4.2.21.

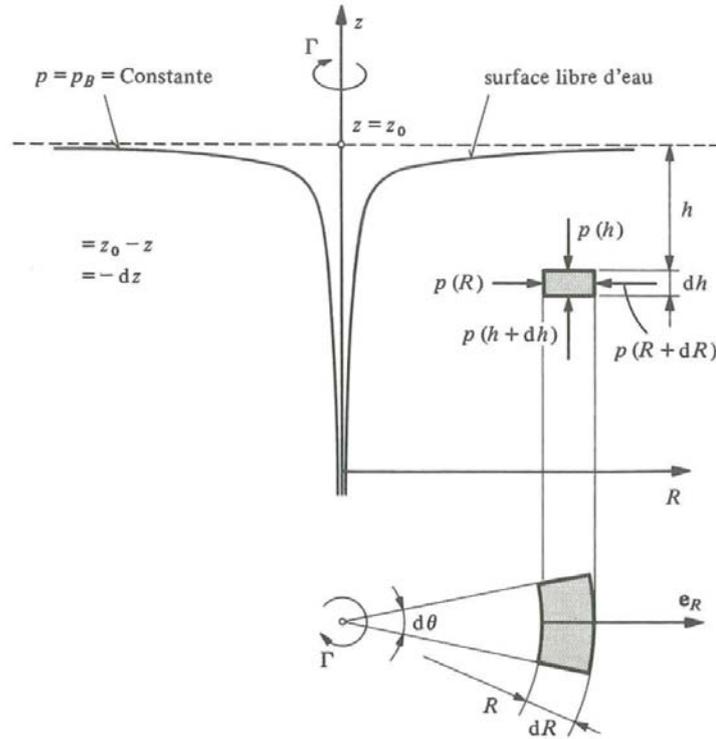


FIGURE 4.2.21 – Surface libre vortex libre

Les figures 4.2.22 et 4.2.23 illustrent les représentations tridimensionnelles du champ de hauteur d'eau et de vitesse respectivement.

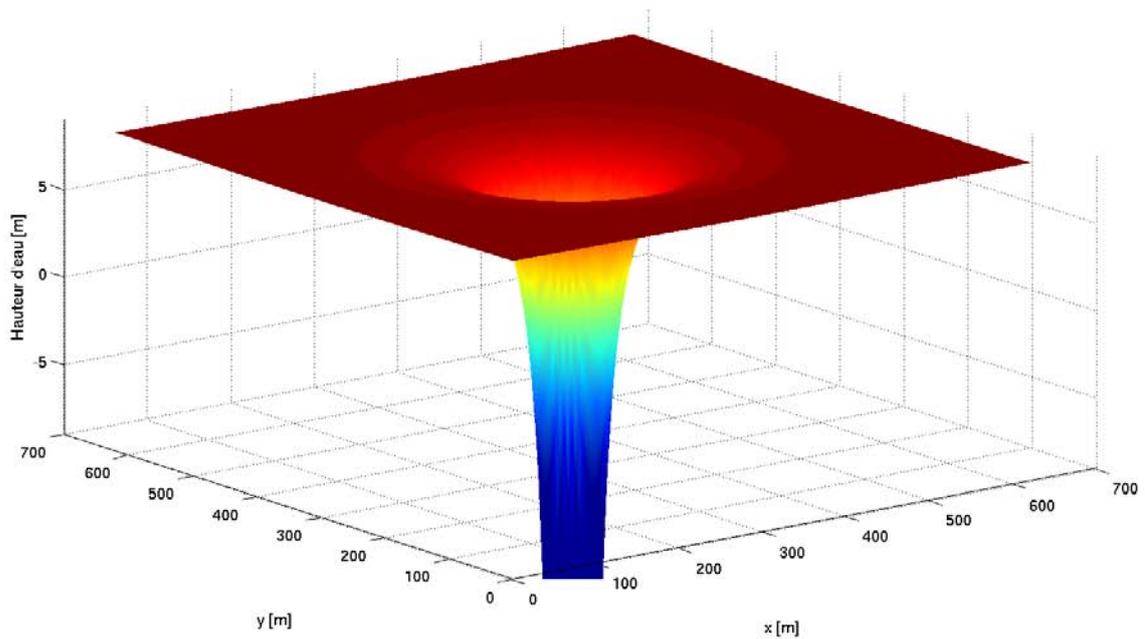


FIGURE 4.2.22 – Champ de hauteur d'eau en écoulement irrotationnel

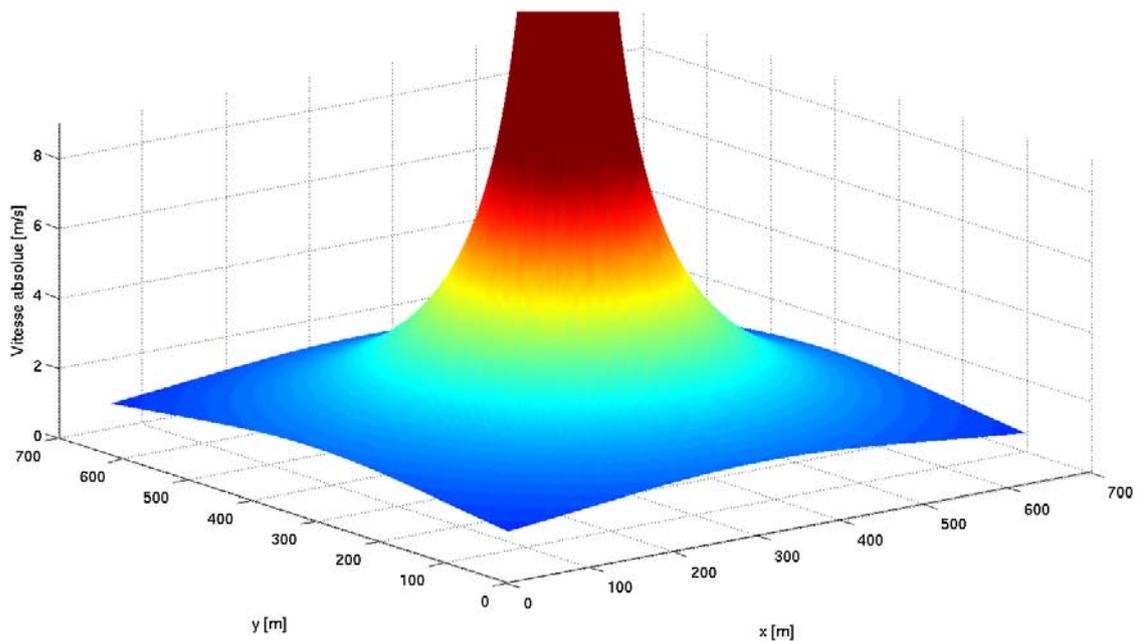


FIGURE 4.2.23 – Champ de vitesse en écoulement irrotationnel

Théoriquement, un bateau lancé dans cet écoulement avec une vitesse initiale correspondant à la vitesse de l'écoulement aux coordonnées initiales du centre de masse est sensé avoir une variation nulle de son angle de dérive au cours du temps. De plus, la distance entre le centre du domaine et le centre de masse du bateau est sensé rester constante. La figure 4.2.24 présente la

trajectoire du bateau référence plongé dans le vortex.

La trajectoire n'est pas stabilisée et le bateau est ramené vers le centre du domaine tout en subissant une variation de dérive. En réalité, ce phénomène est lié au fait que le domaine est caractérisé par une pente de surface libre d'autant plus élevée qu'on se rapproche du centre. Les hypothèses du calcul de l'enfoncement du bateau n'y sont donc plus rencontrées (cfr. section 3.7). Initialement, le bateau est situé assez loin du centre, cependant, dès lors qu'il effectue une trajectoire circulaire sans rotation de dérive, son extrémité droite se rapproche du centre du domaine. Le calcul d'enfoncement instantané devient de plus en plus imprécis. En conséquence, le différentiel de pression hydrostatique est surestimé et le bateau est inexorablement ramené vers le centre du domaine.

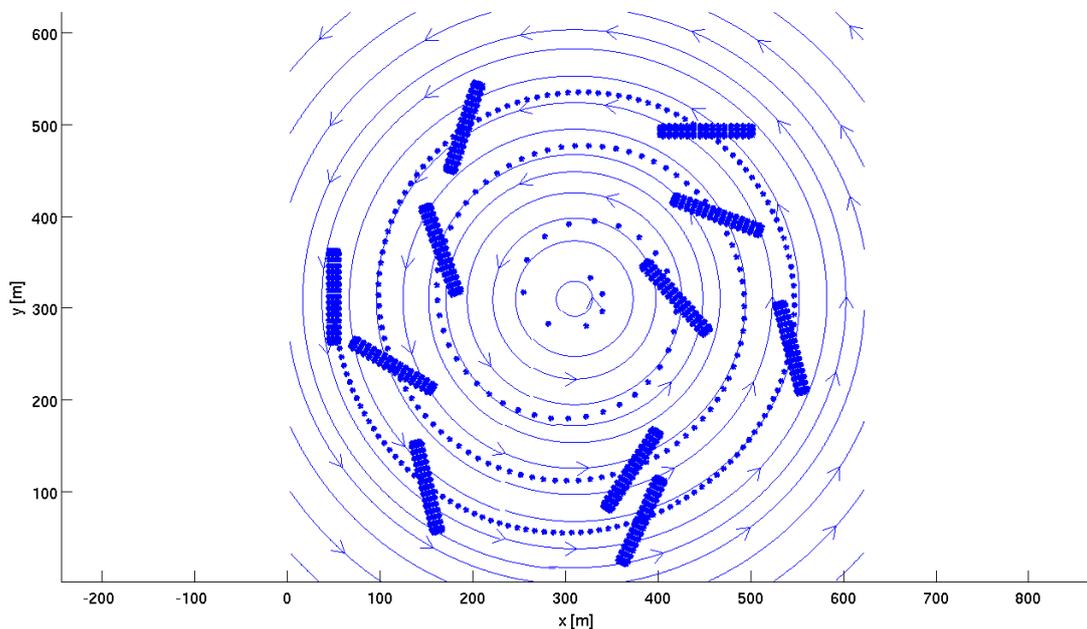


FIGURE 4.2.24 – Trajectoire non-stabilisée en écoulement irrotationnel

Pour palier ce problème et rester dans les hypothèses du calcul du tirant, il existe deux solutions :

- Agrandir le domaine, tout en fixant une vitesse aux bords  $v_b$  plus réduite, et choisir une position initiale plus écartée du centre,
- Choisir un bateau référence plus petit.

La même simulation est ainsi menée en considérant un bateau dont les dimensions ont été divisées par deux et placé initialement en bordure d'un domaine plus étendu. Les résultats sont présentés aux figures 4.2.25 et 4.2.26 sur lesquelles la trajectoire et les efforts radiaux sont respectivement présentés. Le bateau se stabilise sur une orbite (variation faible du rayon avec le temps) et garde une dérive constante sur le premier quart de cercle. Ensuite, des perturbations numériques liée à la discrétisation du champ de hauteur d'eau entraînent une variation de dérive

non-nulle qui croit au cours du temps, en effet, la largeur du bateau vaut 5,7 m contre 5 m de pas spatial. Cette discrétisation est également la cause de la variation erratique de la force radiale de pression hydrostatique et, par extension, de la force radiale totale. Cette dernière garde cependant une moyenne quasi-nulle au cours du temps, i.e. la moyenne sur  $[0 \ t]$  est quasi-nulle quel que soit  $t^6$ . Cette caractéristique explique la faible variation du rayon.

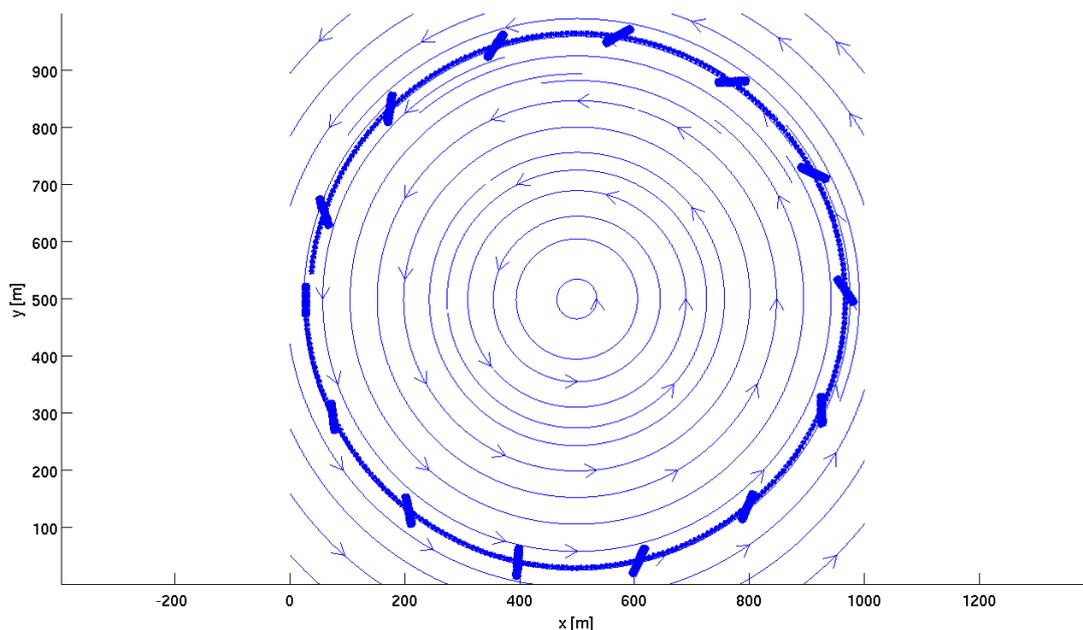


FIGURE 4.2.25 – trajectoire stabilisée en écoulement irrotationnel

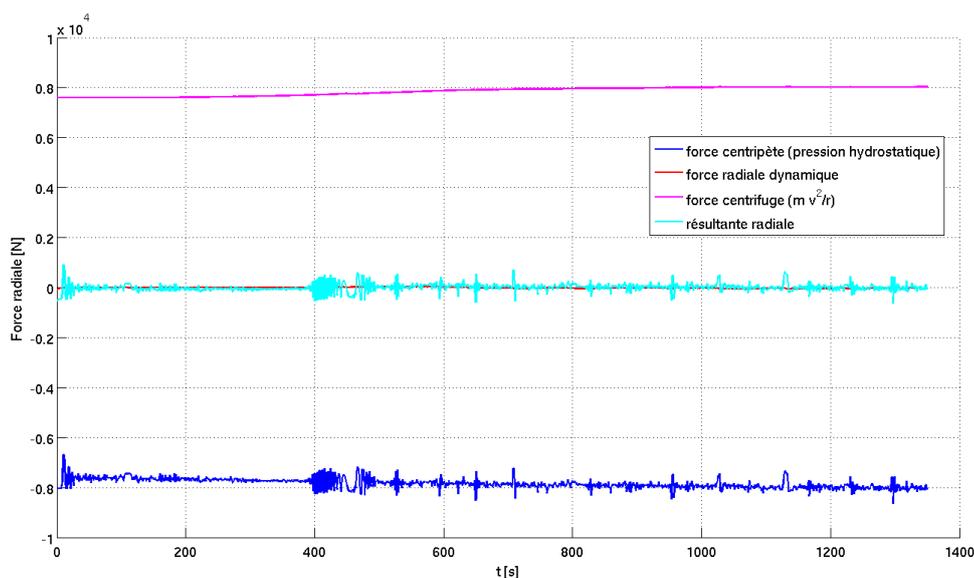


FIGURE 4.2.26 – Efforts radiaux en condition stabilisée en écoulement irrotationnel

### 4.3 Conclusions sur les études de validation

Tout au long de ce chapitre, le comportement de la routine a pu être comparé avec des résultats extérieurs. L'analyse du modèle a été menée sous deux approches.

- Tout d'abord, une approche expérimentale dans laquelle il a pu être prouvé que des comportements typiques, observés au laboratoire, du modèle réduit du bateau peuvent être capturés par la routine de calcul. Ainsi, l'absence de rotation de dérive lorsque le bateau est au centre du domaine et l'influence des efforts hydrodynamiques dans le calcul du tirant ont été retranscrits grâce à l'écoulement uniforme. Le comportement du bateau à proximité à, quant à lui, nécessité l'étude plus précise du champ de vitesse s'établissant réellement dans le canal du laboratoire. Si ce n'est au niveau du profil de vitesse, aucun résultat expérimental numérique n'a été collecté de sorte que la validation expérimentale est qualitative.
- Ensuite, une validation théorique a été entreprise. L'application au cas de la sphère a permis de relier analytiquement le calcul de l'effort de traînée théorique à celui calculé par la routine. L'approche locale (dont le domaine d'application n'est pas limité aux surfaces libres horizontales) a ensuite permis l'étude du bateau lancé dans un vortex forcé. Après détermination de l'expression analytique de la surface libre, cette étude a conduit à la mise en évidence d'orbites de rotation dépendant des conditions initiales. La précision de la rotation de masse observée dans cet écoulement et du mouvement irrotationnel lié au vortex libre a pu également être étudiée. Elle est dans les deux cas parasitée par la discrétisation du bateau et du domaine.

## Chapitre 5

# Application au cas d'un bief de Meuse

Ce dernier chapitre est consacré à la mise en application de la routine de prédiction développée au cas de la Meuse, en l'occurrence, d'un événement de crue sur le bief Andenne-Ampsin qui conduit au désamarrage accidentel d'un bateau capacitif.

Après une description du domaine et des différents ouvrages et zones pour lesquels il convient de se prémunir vis-à-vis des sollicitations accidentelles dues aux chocs de bateaux, l'attention est portée sur la sensibilité du calcul vis-à-vis du pas de temps choisi ainsi que sur l'établissement d'enveloppes d'impacts à différents endroits stratégiques du bief considéré.

### 5.1 Description du domaine

Le bief Andenne-Ampsin est un tronçon de Meuse de 18 km de long. Dans le cadre de ce travail, l'étude sera focalisée sur la zone en aval de Bas-oha.

#### 5.1.1 Ouvrages et zones clés

Différentes zones d'intérêt peuvent être identifiées via la carte de topographie présentée à la figure 5.1.1.

La carte des hauteurs d'eau (figure 5.1.2), combinée à la carte de topographie se révèle également utile pour déterminer la présence de berges inclinées où de bas-fonds sur lesquels le bateau pourrait s'échouer.

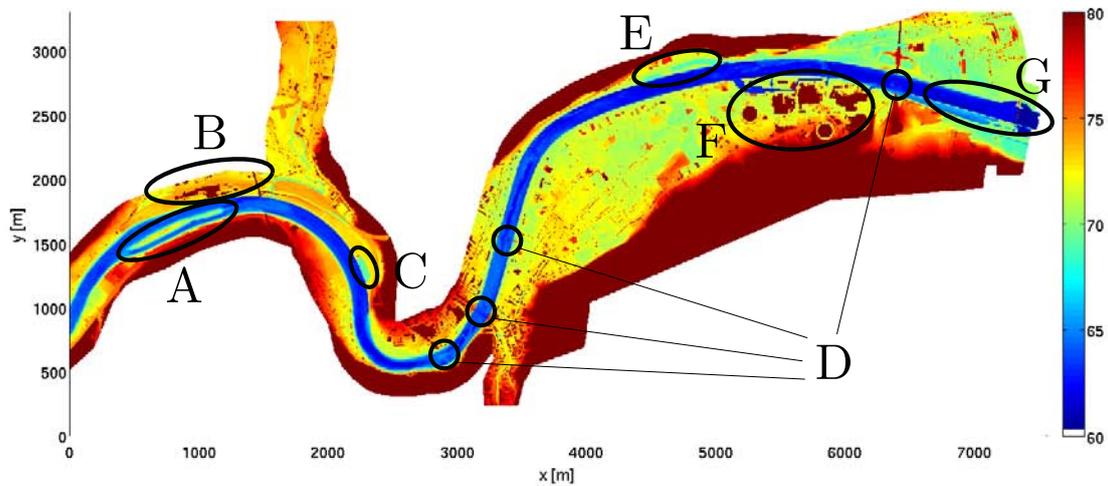


FIGURE 5.1.1 – Carte de topographie du tronçon reliant Bas-Oha à Ampsin - mise en évidence des zones sensibles

La description des zones identifiées est présentée ci-après :

- A Cet îlot non-habité est quasi-submergé en période de crue et constitue une zone de bas-fond sur laquelle le bateau peut finir sa course sans causer des dommages importants,
- B Cette zone de quais est liée au site industriel de Bio-Wanze. Un bateau à la dérive est susceptible d'entrer en collision avec d'autres bateaux amarrés à cet endroit,
- C Un port commercial est situé en sortie de méandre à Statte. Le mole de stationnement/séparation constitue une zone sensible,
- D Sur la longueur du tronçon, on trouve quatre ponts avec une ou plusieurs piles fondées sur le lit du cours d'eau. Deux de ses ponts sont situés en sortie du méandre très tortueux de Huy. Si la structure à la dérive traverse le méandre sans échouer, elle est susceptible d'impacter de manière défavorable les piles associées (par sortie du méandre en se mettant en travers du cours d'eau),
- E Un yacht club avec un mole de séparation se trouve dans le creux extérieur du méandre en aval de Huy,
- F La centrale nucléaire de Tihange et ses dispositifs de prise d'eau pour le refroidissement sont situés à l'intérieur du méandre suscité,
- G À aval du bief, on trouve le complexe éclusier d'Ampsin-Neuville. Le barrage mobile est composé de cinq pertuis équipés de vannes levantes. L'écluse est située à l'intérieur du méandre et le chenal d'approche amont (par extension le mole de séparation amont) est long de 700 m. Il s'agit vraisemblablement de l'ouvrage le plus critique du tronçon, car l'avarie d'un pertuis

(pile et/ou vanne) entraînera des perturbations sur la régulation des niveaux d'eau post-crue<sup>1</sup> (dégagement du bateau, batardage, reconstruction, etc.).

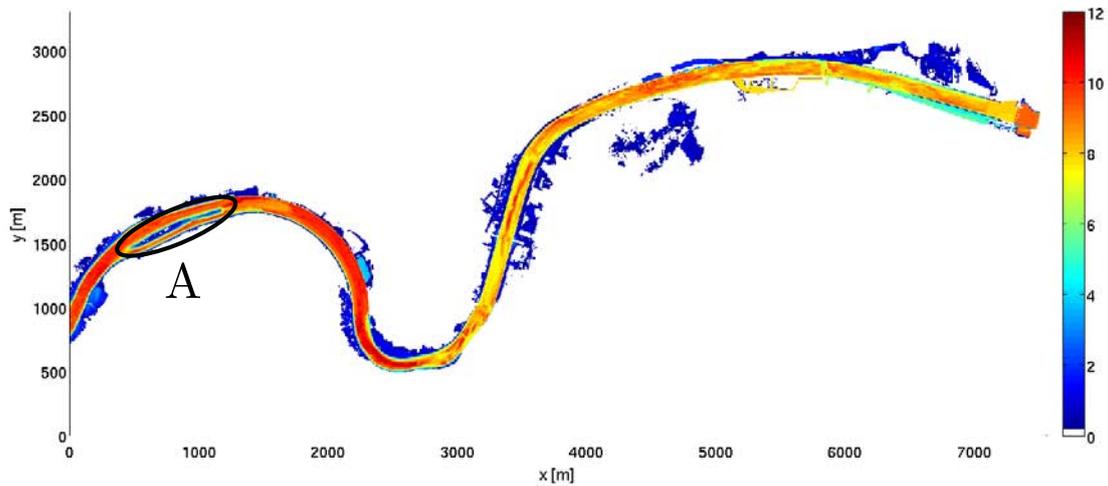


FIGURE 5.1.2 – Carte des hauteurs d'eau du tronçon reliant Bas-Oha à Ampsin

## 5.2 Étude de collision

Le calcul de prédiction de trajectoire est mené par approche locale pour intégrer les effets de surface libre non horizontale (cfr. section 3.6.1).

Deux conditions d'arrêt ont été fixées :

- La première stoppe le calcul lorsque le bateau touche le lit du cours d'eau. Il s'agit en fait de vérifier que, à chaque pas de temps, l'enfoncement stabilisé du bateau est inférieur à la hauteur d'eau en tout point de discrétisation du bateau,
- La seconde est liée à l'impact sur un ouvrage présent sur le cours d'eau (piles de pont, barrage mobile, mole, quais verticaux, etc.). En pratique, ces ouvrages sont hors domaine car il n'y a pas d'eau à ces endroits. Lorsqu'un des éléments de discrétisation du bateau sort du domaine, le calcul s'arrête donc.

### 5.2.1 Influence du pas de temps

Avant de lancer un nombre important de simulations, l'attention est portée sur l'influence du pas de discrétisation temporel. Dans cette optique, une position et une inclinaison initiales

<sup>1</sup>. Pendant l'événement de crue à proprement parler, les vannes sont totalement ouvertes et n'offrent plus de possibilité de régulation.

sont fixées. Les trajectoires simulées avec  $\Delta t$  égale à 0.1, 1, 5 et 10 secondes respectivement sont ensuite analysés.

La figure 5.2.1 présente les résultats obtenus pour le tronçon en aval de Huy.

Les trajectoires sont sensiblement identiques pour les trois plus petits pas de temps, le bateau entre cependant en collision plus à l'amont avec  $\Delta t = 5$  s. Pour  $\Delta t = 10$  s, la trajectoire prend une allure différente malgré le fait que le bateau, vient *in fine* entrer en collision avec le barrage mobile.

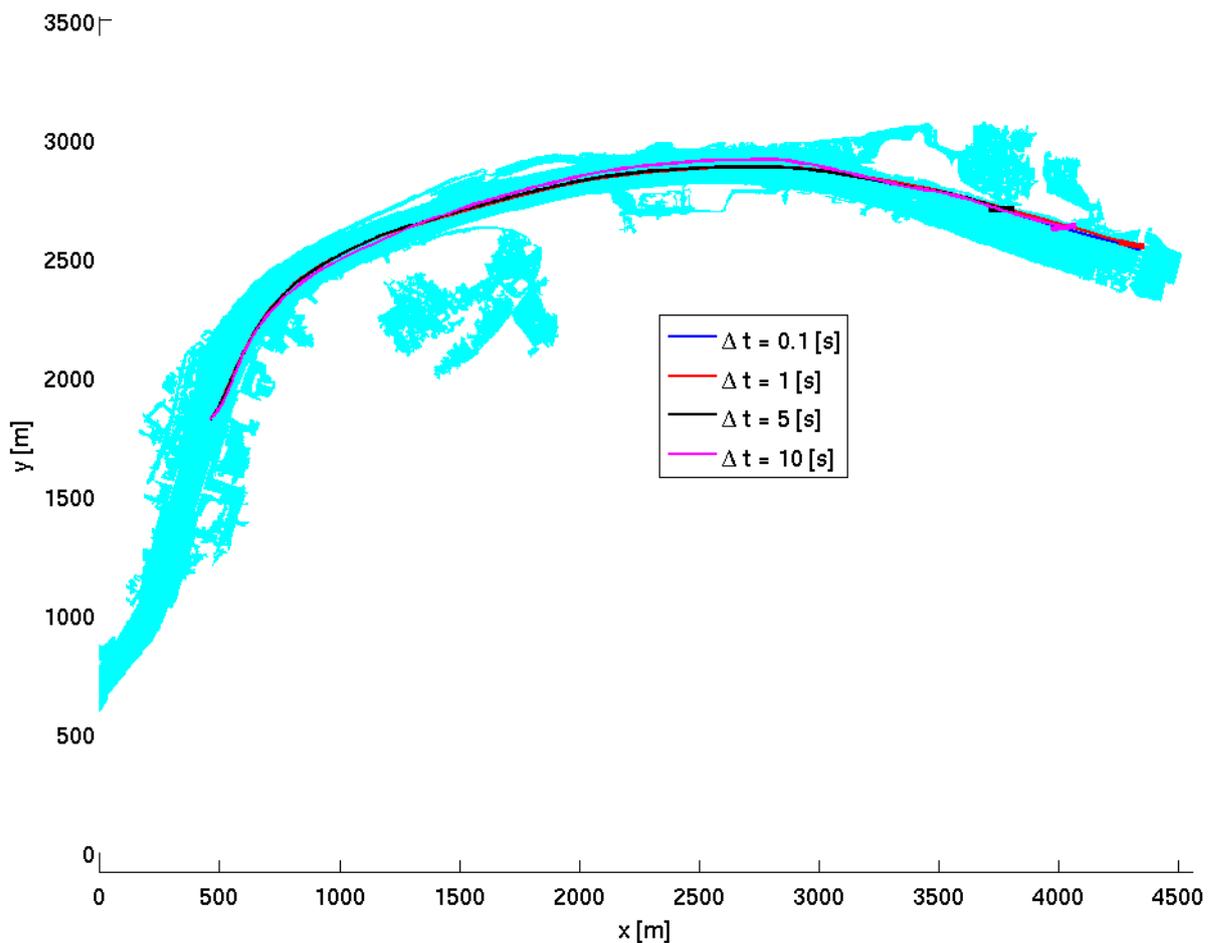


FIGURE 5.2.1 – Influence du pas temporel - Trajectoires

La sensibilité temporelle peut être mise plus clairement en évidence en traçant l'évolution de la vitesse absolue et de la dérive du bateau au cours du temps (figure 5.2.2). Les résultats sont quasi-identiques pour  $\Delta t = 0, 1$  et 5 s. Les divergences apparaissent en fin de simulations pour la vitesse absolue. Finalement, le choix est fait de conserver 1 s comme pas temporel pour l'ensemble des simulations car la dérive est bien capturée même en fin de simulation. Il s'agit d'un bon compromis entre rapidité et précision.

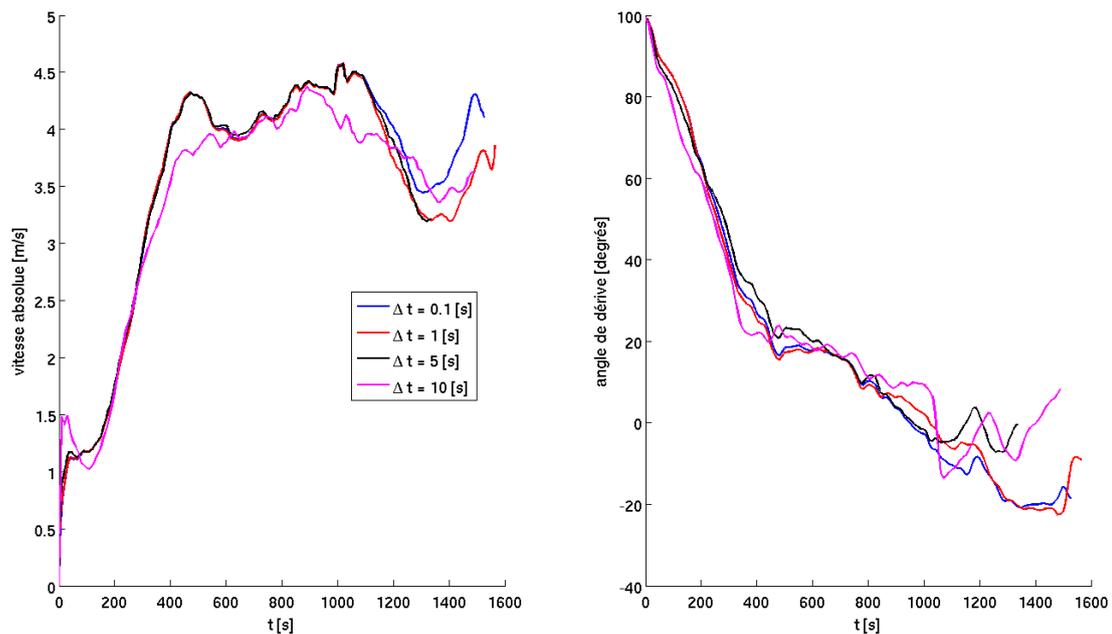


FIGURE 5.2.2 – Influence du pas temporel - Vitesses absolues et dérive

Remarquons que même sans pratiquer ce type d'étude de sensibilité, nous pouvons estimer un pas temporel pertinent. La vitesse de l'écoulement est de l'ordre de 3 – 4 m/s. le bateau se met rapidement en mouvement et calque sa vitesse sur la vitesse de l'écoulement. Le pas de discrétisation spatial est de 5 m, en prenant  $\Delta t = 1$  s, le bateau parcourt une distance plus petite que la taille de maille. On peut raisonnablement en tirer la conclusion que la perte d'informations est petite.

Ce raisonnement peut être relié à la définition d'une condition de *Courant-Friedrich-Levy* [Pirrotton, 2012] :

$$CFL = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.2.1)$$

### 5.2.2 Méthodologie de l'étude

Les études sont menées de la manière suivante :

- La position initiale du bateau est fixée,
- Les trajectoires sont calculées en faisant varier la dérive initiale de 0 à 180 degrés par pas de 1 degré,
- Les positions, vitesses et dérives au moment de l'impact sont stockées et interprétées.

### 5.2.3 Tronçon à l'aval de Huy

L'attention est tout d'abord portée sur le tronçon à l'aval de Huy dans lequel se situent les zones sensibles de la centrale nucléaire et du complexe éclusier d'Ampsin-Neuville.

La figure 5.2.3 présente l'enveloppe des trajectoire pour un bateau placé initialement juste à l'aval du troisième pont de Huy (Pont de l'Europe). Les marqueurs colorés représente la position du centre de masse du bateau au moment où celui-ci entre en collision :

- Avec le lit de la Meuse (marqueurs rouges),
- Avec un ouvrage (marqueurs jaunes).

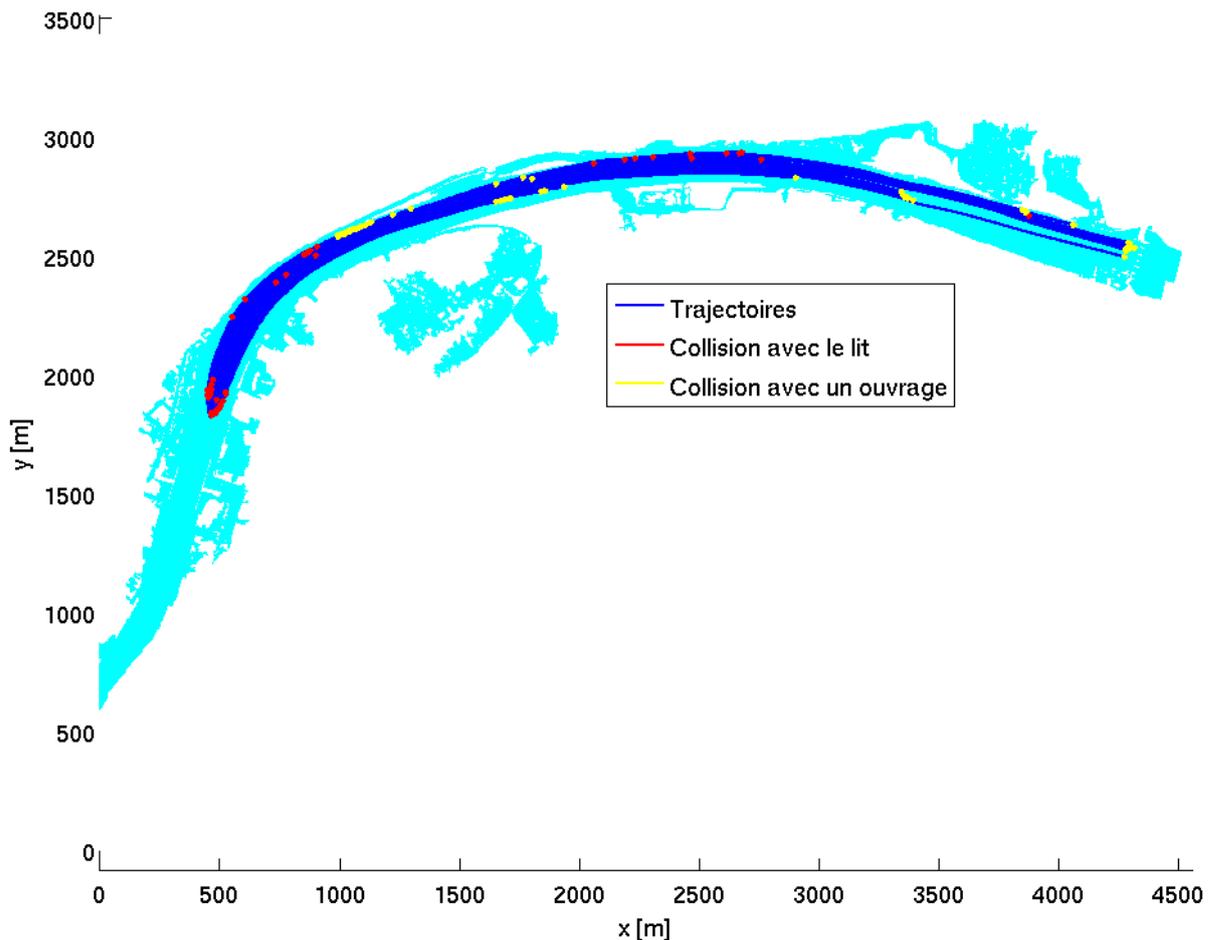


FIGURE 5.2.3 – Enveloppe des trajectoires du bateau à la dérive - Aval de Huy

Les ouvrages préférentiellement touchés sont le barrage mobile, la pile du pont situé le plus à l'aval, le mur de quai en entrée de méandre et un mur de quai à proximité de la prise d'eau de la centrale. Au centre de Huy, l'événement de crues est tel que les murs de quais sont submergés et un grand nombre de collision à lieu avec le fond du lit majeur.

Des informations liées aux caractéristiques de ces trajectoires, et *in fine* des collisions, peuvent être récupérées.

La figure 5.2.4 présente l'évolution temporelle de la vitesse absolue et de la dérive du bateau pour l'ensemble des simulations. Elle permet de visualiser une enveloppe temporelle des ces deux

paramètres.

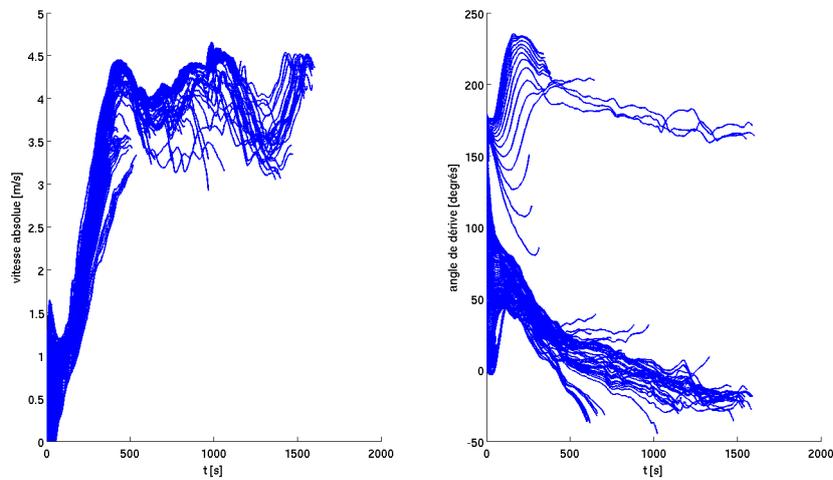


FIGURE 5.2.4 – Vitesses absolues et dérive - Aval de Huy

La figure 5.2.5 est un nuage de collision qui met en vis-à-vis la vitesse absolue et l'angle de dérive au moment de l'impact. Si les impacts liés à un ouvrage donné sont isolés, ce type de graphique permet de déterminer un éventail de comportement préférentiel du bateau qui entre en collision avec l'ouvrage étudié. Sur ce graphique des agglomérations de collisions peuvent être aisément associés à des ouvrages en particulier.

- A Collisions avec le lit majeur à Huy, à proximité de la position initiale du bateau,
- B Collisions avec des murs de quais à l'entrée du méandre en rive gauche (extérieure au méandre),
- C Collisions avec la pile de pont et avec les pertuis du barrage mobile.

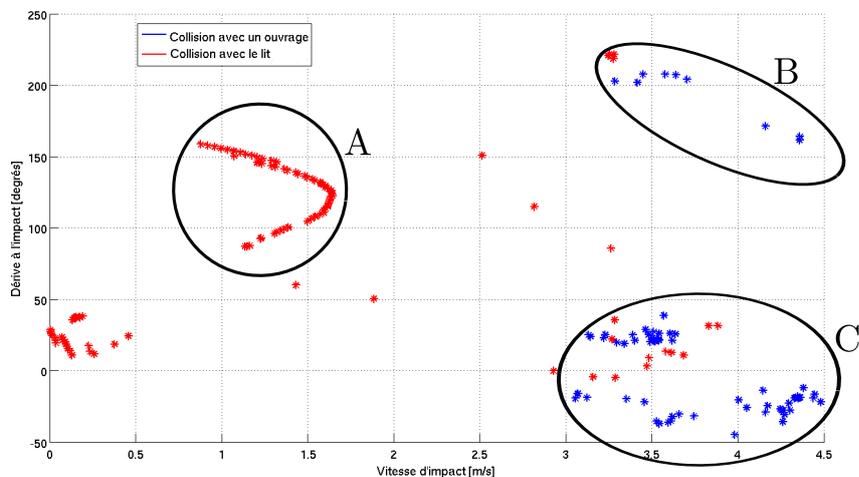


FIGURE 5.2.5 – Relation à l'impact entre la vitesse absolue et l'angle de dérive - Aval de Huy

### 5.2.4 Tronçon à l'amont de Huy

Le même type d'étude est mené en amont de Huy.

#### Bas-fonds

Tout d'abord, on souhaite estimer l'effet favorable sur l'arrêt d'un bateau à la dérive de l'îlot submergé. L'enveloppe des trajectoires est à nouveau tracée (figure 5.2.6). L'îlot constitue bien un frein efficace. Plusieurs simulations entraînent cependant la collision du bateau sur les murs de quais de Bio-Wanze et sur le port de Statte. Seule une proportion réduite des bateaux arrive dans le creux du méandre de Huy et aucun d'entre eux ne le traverse complètement.

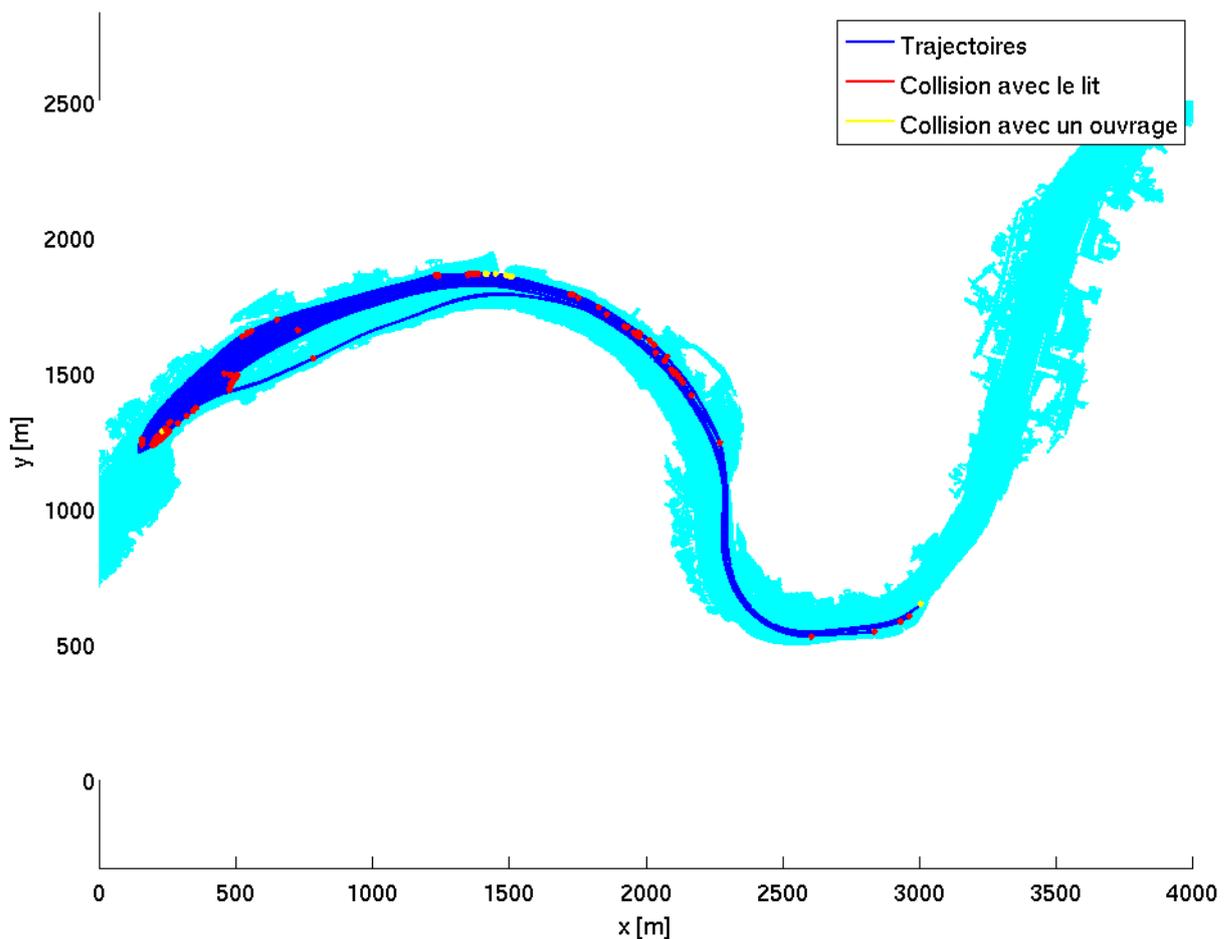


FIGURE 5.2.6 – Enveloppe des trajectoires du bateau à la dérive - Îlot submergé

Le nuage de collision (figure 5.2.8) et les graphes temporels de vitesses et angles de dérive à l'impact (figure 5.2.7) sont également présentés. Pour ce dernier, une observation intéressante est que la vitesse absolue du bateau passe par une valeur nulle dans le creux du méandre. Les

dommages éventuels à cet endroit, même s'il s'agit d'un zone boisée peu sensible, seront par conséquent plus réduits (quantité de mouvement du bateau faible).

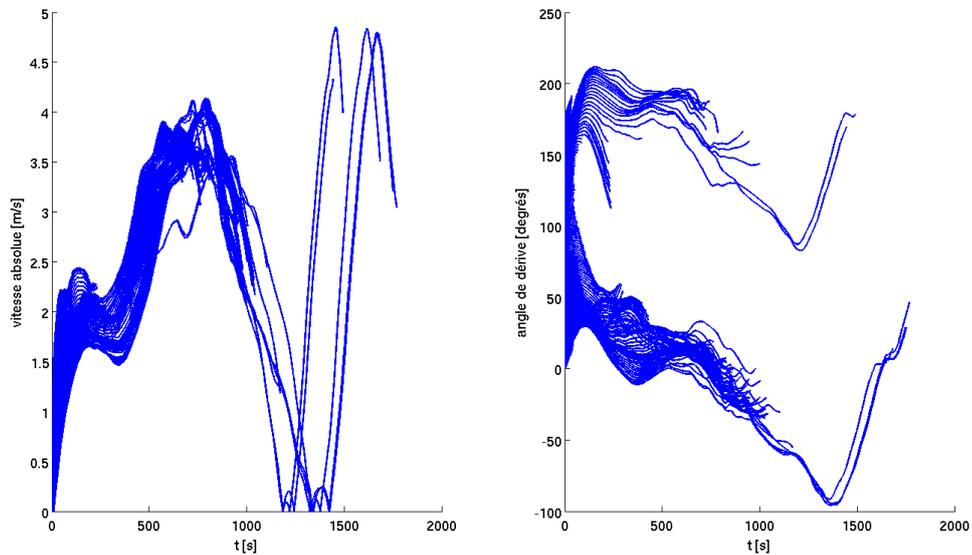


FIGURE 5.2.7 – Vitesses absolues et dérive - Îlot submergé

Différentes agglomérations peuvent à nouveau être identifiées sur le nuage de collision :

- A Collisions avec l'îlot submergé,
- B Collisions avec des murs de quais liés à Bio-Wanze.

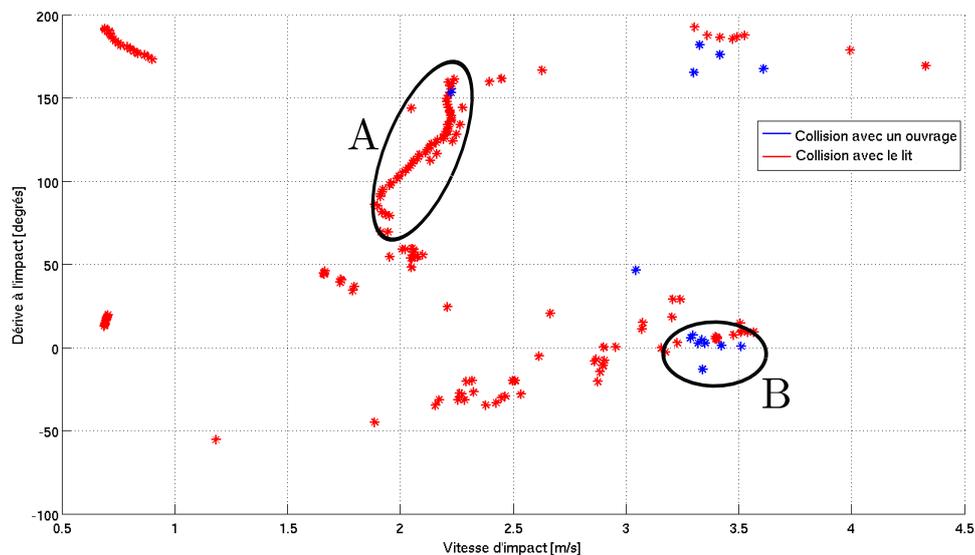


FIGURE 5.2.8 – Relation à l'impact entre la vitesse absolue et l'angle de dérive - Îlot submergé

## Méandre de Huy

Finalement, l'étude est menée pour évaluer la propension d'un bateau à la dérive à travers le méandre tortueux de Huy pour éventuellement, *in fine* venir impacter le barrage mobile d'Ampsin. L'enveloppe des trajectoires (figure 5.2.9) met en évidence que seule une proportion très réduite des bateaux (2 simulations sur 180) traversent complètement la ville de Huy. La majorité vient impacter les berges extérieures des deux coudes du méandre.

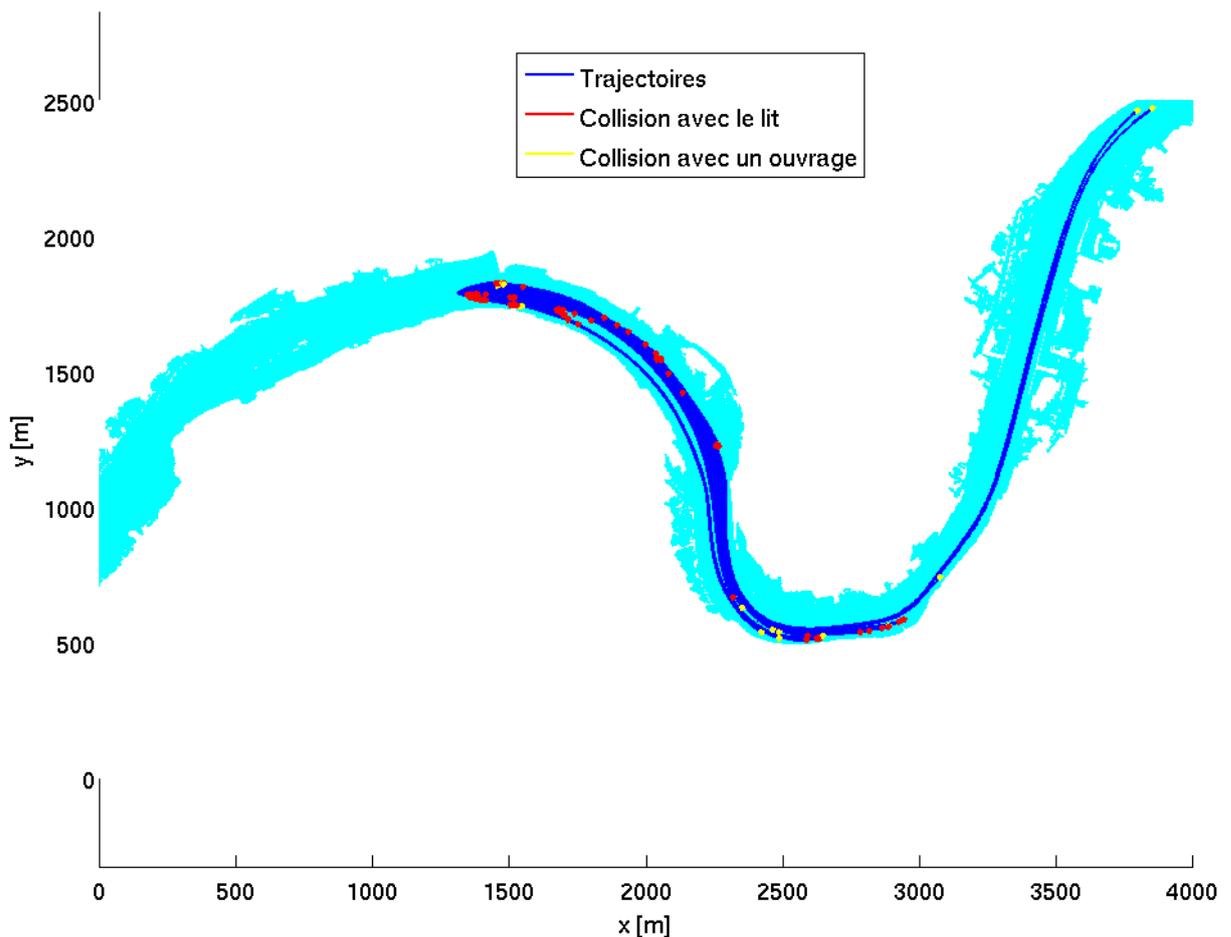


FIGURE 5.2.9 – Enveloppe des trajectoires du bateau à la dérive - Méandre de Huy

Le nuage de collision (figure 5.2.10) et les graphes temporels de vitesses et angles de dérive à l'impact (figure 5.2.11) sont à nouveau présentés. Des zones dans lesquelles la vitesse du bateau est faible peuvent y être identifiées.

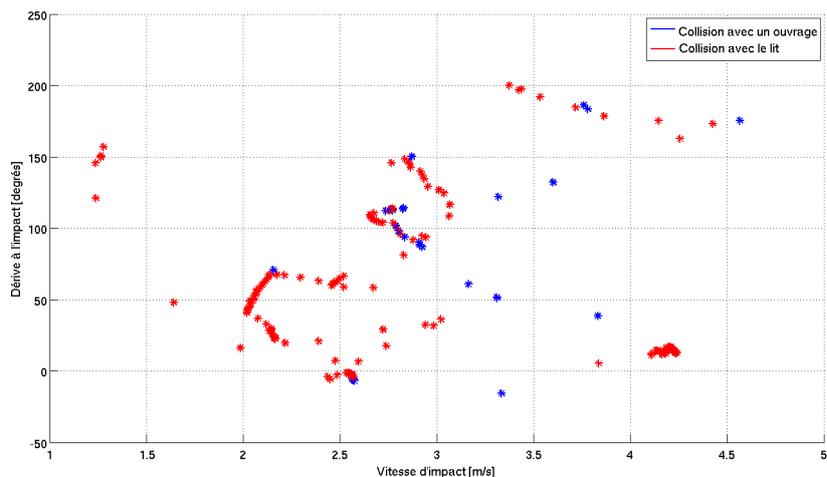


FIGURE 5.2.10 – Relation à l'impact entre la vitesse absolue et l'angle de dérive - Méandre de Huy

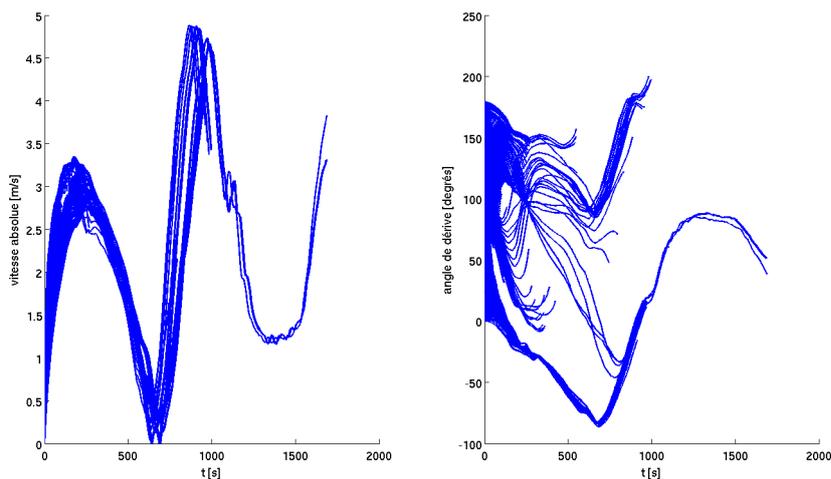


FIGURE 5.2.11 – Vitesses absolues et dérive - Méandre de Huy

### 5.2.5 Conclusions sur l'étude de collision

En définitive, pour l'ensemble des études, la combinaison des informations collectées :

- Trajectoires,
- Positions d'impact,
- Vitesses d'impact,
- Angles de dérive à l'impact,
- Répartition spatiale des impacts.

permet d'estimer la sensibilité d'un ouvrage donné au désamarage accidentel (plus généralement, au lâcher non-guidé) d'un bateau à une position donnée du cours d'eau.

## Chapitre 6

# Conclusions et perspectives

Pour rencontrer l'objectif de ce travail, à savoir fournir des outils permettant de caractériser la trajectoire d'un bateau à la dérive et son éventuel impact sur un ouvrage hydraulique en fonction des caractéristiques hydrodynamiques locales du cours d'eau, la démarche suivante a été entreprise.

Une prospection bibliographique a tout d'abord été menée et a permis de mettre en évidence plusieurs aspects utiles au développement d'un modèle de prédiction de trajectoire, notamment la possibilité de relier la vitesse à une pression hydrodynamique par l'intermédiaire d'un coefficient expérimental.

Au sortir de cet état de l'art, l'information disponible a cependant été mise en évidence comme, d'une part, trop limitée à un domaine d'application particulier (champ uniforme et vitesse relative entre le fluide et la structure constante), d'autre part, trop protégée en raison de l'application commerciale évidente des logiciels de simulation de mouvements des bateaux. La reproductibilité d'une méthode de calcul présente dans la littérature et adaptée au problème posé est par conséquent difficile à entreprendre.

C'est pourquoi cette travail de fin d'études a conduit au développement original ainsi qu'à la validation d'un modèle mathématique de prédiction de la trajectoire de bateaux à la dérive, supposés rigides et de forme parallélépipédique et dont la rétroaction sur l'écoulement est considérée comme négligeable.

En parallèle au développement de ce modèle, des essais expérimentaux ont été menés de manière à appréhender qualitativement la physique du phénomène et à mettre en évidence des comportements typiques du bateau à la dérive.

L'hypothèse principale du modèle est de considérer les six degrés de liberté de la structure flottante en deux groupes indépendants traités respectivement de manière statique et dynamique.

- D'une part, la translation verticale ainsi que les inclinaisons d'assiette et de gîte sont supposées s'établir instantanément en début de chaque pas temporel. Leur évaluation est donc menée par un calcul statique d'enfoncement du bateau. Ce calcul intègre l'ensemble des

efforts appliqués sur la structure, en l’occurrence le poids, les pressions hydrostatiques mais aussi les efforts hydrodynamiques liés à la vitesse relative entre le bateau et l’écoulement.

- L’évaluation de l’enfoncement est tout d’abord menée de manière complète. Dans cette approche, la seule hypothèse est de considérer une faible variation des efforts hydrodynamiques entre deux pas de temps successifs. C’est ainsi l’effort hydrodynamique résultat de l’itération précédente qui est pris en compte. Le système reste, quoiqu’il en soit, implicite et est résolu de manière itérative pour déterminer la valeur des paramètres qui vérifient les équilibres vertical et en rotation.
- La solution obtenue est comparée avec une méthode linéarisée qui néglige l’influence des résultantes horizontales de pression hydrostatique. L’approximation pratiquée est pertinente sous les hypothèses de petites inclinaisons d’assiette et de gîte ainsi que de faible variation de la pente de surface libre.
- D’autre part, les translations en plan et la rotation de dérive sont actualisées via une équation de mouvement de corps rigide. Les efforts appliqués sont les pressions hydrodynamiques et les résultantes horizontales de pression hydrostatique. Ces dernières sont une généralisation de la composante projetée du poids généralement utilisée pour des surfaces libres à inclinaison constante. Le développement d’un module de calcul associé a été entrepris. L’équation du mouvement est discrétisée et résolue selon un schéma explicite dans lequel l’accélération est évaluée en début de pas temporel et supposée constante sur ce dernier.

L’estimation des efforts dynamiques nécessaires à la résolution de l’équation du mouvement est menée selon deux approches.

- Une méthode moyennée qui intègre, en préalable du calcul des efforts, l’ensemble des informations discrètes de vitesse relative pour estimer des vitesses moyennes ”au large” dans les deux directions principales du bateau, permet tout d’abord aisément de se ramener à des définitions usuelles de coefficients de traînée de barreaux. Son application est limitée aux domaines caractérisés par une surface libre horizontale.
- La méthode moyennée est utilisée pour calibrer et valider une approche dite locale, dont le domaine d’application est plus étendu et qui relie directement l’information discrète de vitesse relative à des efforts locaux tangentiels et normaux appliqués sur la coque du bateau. Après analyse, les composantes tangentielles sont négligées vis-à-vis de la composante normale.

Les observations récupérées lors des essais en laboratoire sur modèles réduits ont ensuite permis de valider les résultats numériques obtenus. Le profil de vitesse expérimental a été récupéré pour servir d’entrée à la routine de calcul. Le modèle mathématique capture toute une série de comportements typiques observés :

- Tout d’abord, l’apparition, pour un bateau placé en biais, d’une translation perpendiculaire à la direction principale de l’écoulement,
- Ensuite, la tendance à s’aligner parallèlement à la paroi lorsque la structure s’en approche,

- Mais encore, la contribution importante des efforts hydrodynamique dans le calcul de l'enfoncement du bateau.

Par la suite, une validation théorique a été entreprise en vue de corroborer l'utilisation pertinente du modèle dans le cadre d'une application en conditions réelles.

- Moyennant quelques aménagements, il a tout d'abord été prouvé analytiquement que l'effort de traînée d'une sphère calculé par la routine de calcul conduisait au résultat théorique identifié dans la littérature.
- Ensuite, le comportement du bateau dans deux champs hydrodynamiques de référence a été étudié.
  - Le cas du vortex forcé a permis la validation du module de calcul des pressions hydrostatiques horizontales et la mise en évidence de l'existence d'orbites d'équilibre, dépendants des conditions initiales, sur lesquelles le bateau se stabilise. La rotation de masse a été étudiée et des variations parasites de dérive ont été expliquées par la discrétisation du bateau, d'une part, et du domaine, d'autre part.
  - Le cas vortex libre a également permis de mettre en évidence la présence d'orbites d'équilibre et d'un déplacement irrotationnel, i.e. sans variation de dérive, dont la précision a, à nouveau, été reliée aux différentes discrétisations spatiales pratiquées.

Le modèle a finalement été utilisé sur un set de données réel en vue de pratiquer une étude de collision sur le bief de Meuse situé entre Andenne et Ampsin. L'attention a été portée sur le tronçon aval. Au sein de celui-ci, plusieurs zones ont successivement été étudiées.

- Tout d'abord, la sensibilité d'ouvrages à l'aval de Huy, à savoir des murs de quais liés à la centrale nucléaire de Tihange, une pile de pont et le barrage éclusé d'Ampsin-Andenne a été analysée. Cette sensibilité est liée à la notion de risque et intègre par conséquent le dommage lié à une collision mais aussi la probabilité d'occurrence de cet événement.
- Ensuite, l'effet de l'îlot submergé en aval de Bas-Oha sur le ralentissement, voire l'arrêt, de bateaux à la dérive a été envisagé. Il en résulte une absence totale de bateaux capables de traverser le méandre de Huy et une faible sensibilité de la zone en aval.
- Finalement, il a été montré que seule une proportion très réduite (de l'ordre du pourcent) de bateaux à la dérive, abandonnées juste à l'aval du méandre de Huy, était capable de le traverser sans collision, avec le risque *in fine* d'impacter des ouvrages très sensibles (complexe barrage-écluse) situés plus à l'aval.

Dans l'ensemble des simulations, des paramètres utiles au dimensionnement d'ouvrages hydrauliques ont été compilés, à savoir, la vitesse et l'angle de dérive à l'impact mais aussi la répartition spatiale des collisions.

En définitive, le développement, l'analyse, la validation et l'application pratique du modèle développé rencontre les objectifs du travail, à savoir fournir des outils permettant de caractériser la trajectoire d'un bateau à la dérive ainsi que son éventuel impact sur des ouvrages hydrauliques en fonction de caractéristiques hydrodynamiques locales.

La mise à disposition et l'analyse du logiciel de calcul de prédiction trajectoire développé de manière originale dans le cadre de ce travail de fin d'études ouvre par ailleurs la porte à différentes perspectives. Plusieurs aspects supplémentaires peuvent ainsi être envisagés pour appréhender plus en détail le comportement des bateaux à la dérive et les conséquences qui y sont liées.

- Si l'intérêt est porté au développement du modèle de calcul, plusieurs des hypothèses posées peuvent être discutées.
  - Ainsi, le schéma numérique utilisé pour l'équation du mouvement ainsi que l'estimation des efforts hydrodynamiques intervenant dans le calcul statique d'enfoncement peuvent être affinés par la mise en place d'un processus prédicteurs-correcteur de *Runge-Kutta*.
  - La géométrie du bateau peut également être généralisée pour peu qu'une description précise de la coque soit disponible.
  - L'hypothèse de comportement statique de l'assiette, du gîte et de la translation verticale peut, elle encore, être discutée plus en détail. En effet lors de la phase de mouvement du bateau, les efforts hydrodynamiques peuvent introduire des inclinaisons non négligeables, il conviendrait donc de procéder à un calcul dynamique via une étude plus approfondie des rotations de gîte et d'assiette autour, respectivement, des métacentres de carène transversal et longitudinal.
  - L'initiation du mouvement est également l'occasion de lever l'hypothèse de non-influence du bateau sur l'écoulement de manière à caractériser le train de vagues engendré et définir le domaine d'application du modèle développé dans ce travail.
  - Des expériences complémentaires en laboratoire peuvent finalement être menées de manière à effectuer des études quantitatives entre les approches numériques et expérimentales. Il peut ainsi être pertinent de définir des protocoles d'essai pour récupérer la trajectoire du bateau au cours du temps via par exemple la mise en place d'un système de traque vidéo de la position et de la dérive du bateau.
- L'utilisation du modèle en l'état permet également de se concentrer plus en détail sur des applications sur cours d'eau réels. L'analyse de la répartition spatiale des impacts et des données de collisions peut ainsi permettre une quantification plus pertinente de charges statiques équivalentes accidentelles de dimensionnement pour différents ouvrages.

Notons pour conclure que le comportement du modèle peut être comparé à des résultats issus de logiciels de navigation extérieurs, commerciaux ou non. C'est là l'occasion de créer et cultiver différents contacts avec des industriels et des Universités que ce soit autour du développement d'un outil commun de calcul du mouvement des bateaux mais aussi pour une collaboration sur des projets d'études de collision bateaux-ouvrages d'envergure.

## Chapitre 7

# Bibliographie

- ARI. *Marine Simulation*. 2009.
- D.D. Bhatta and Rahman M. *On scattering and radiation problem for a cylinder in water of finite depth*. in *International Journal of Engineering Science*, 2003.
- V. Denoël. *Ouvrages d'art soumis aux vents de tempêtes*. Support de cours, Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, 2013.
- B. Dewals. *Hydrodynamique environnementale*. Support de cours, Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, 2013.
- Y. Doutréleau, J.-M. Laurens, and L. Jodet. *Résistance et propulsion du navire - Résistance à l'avancement, hélice, appareil propulsif - Niveau C*. Éditions Ellipses, 2011.
- EMCC. *Navistop : Protection du barrage de Créteil*. 2003.
- Est Républicain ER. <http://www.estrepublicain.fr/fil-info/2010/12/18/frouard-%28-54-%29-accident-d-une-peniche-de-1-000-t-de-sel?image=95096C8E-99C3-4FEF-99E5-090E4EE198A1>, 2010.
- R. Featherstone. *Rigid Body Dynamics Algorithms*. Springer Science, 2008.
- W. Hem Lata and K. P. Thiagarajan. *Comparison of added mass coefficients for a floating tanker evaluated by conformal mapping and boundary element methods*. 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, 2007.
- J. D. Holmes. *Wind Loading of Structures*. CRC Press, 2007.
- Y. Hyunse. *Phase-Averaged Stereo-Piv Flow Field and Force/Moment/Motion Measurements for Surface Combatant in PMM Maneuvers*. PhD thesis, University of Iowa, 2009.
- Institut pour le Transport par Batellerie ITB. *Types de bateaux en navigation intérieure*. [http://www.itb-info.be/fr/gp\\_types-de-bateaux-en-navigation-interieure\\_18.aspx](http://www.itb-info.be/fr/gp_types-de-bateaux-en-navigation-interieure_18.aspx), 2008.

- International Towing Tank Conference ITTC. *Recommended Procedure - Testing and Extrapolation Methods Propulsion, Performance Propulsion Test*. 2002.
- L. Larsson and H. C. Raven. *Ship Resistance and flow*. The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 2010.
- L'avenir. [http://www.lavenir.net/article/detail.aspx?articleid=DMF20131113\\_00388668](http://www.lavenir.net/article/detail.aspx?articleid=DMF20131113_00388668), 2013.
- Maritime Research Institute Netherlands MARIN. *Fast-time simulation program for ship manoeuvring - SHIPMA 7*. 2013.
- T. Menard. *Développement d'une méthode Level Set pour le suivi d'interface : Application à la rupture de jet liquide*. PhD thesis, Université de Rouen, 2007.
- S. Morregia. *Traînée d'une sphère solide dans un fluide*. 2013.
- J. Mégel and J. Kliava. *On the buoyancy force and the metacentre*. 2009.
- J. N. Newman. *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press, 1977.
- M. Piroton. *Méthodes numériques linéaires - Différences finies*. Support de cours, Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, 2012.
- M. Piroton. *Éléments de mécanique des fluides*. Support de cours, Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, 2014.
- P. Rigo and V. Herbillon. *Voies navigables et constructions hydrauliques*. Support de cours, Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, 2010.
- Voies navigables de France VNF. *Étude de l'Impact du Batillage sur les Berges de l'Oise*. 2002.
- Y. Yoshimura and Y. Masumoto. *Hydrodynamic Database and Manœuvring Prediction Method with Medium High-Speed Merchant Ships and Fishing Vessels*. 2011.
- L. Yuming. *Marine Hydrodynamics - lectures 12 and 13*. Support de cours, Massachusetts Institute of Technology, 2013.