Enveloppe convexe de la linéarisation d'une fonction pseudo-booléenne

Auteur : Baratto, Marie
Promoteur(s) : Crama, Yves
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité spécialisée en informatique
Année académique : 2017-2018
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/4904

Université de Liège

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention d'un Master en Sciences Mathématiques à finalité informatique

Enveloppe convexe de la linéarisation d'une fonction pseudo-booléenne

Année académique 2017–2018

Réalisé par :
Marie Baratto

Promoteur :
Pr. Yves Crama

Remerciements

La rédaction de ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention de certaines personnes, et je tiens à leur exprimer ma reconnaissance.

Je tiens tout particulièrement à remercier mon promoteur Pr. Yves Crama et son assistante Mme Elisabeth Rodriguez-Heck avec qui j'ai passé de nombreuses heures à discuter et réfléchir sur le contenu de ce mémoire. Au cours de ces 15 derniers mois, je me suis toujours sentie entourée et encouragée dans mon travail et jamais je suis restée sans réponse à une de mes questions. Ils m'ont tout deux permis de découvrir et apprécier le sujet de ce mémoire, sur lequel j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. Je leur adresse toute ma gratitude pour cela.

Je souhaite également remercier du fond du coeur mes amis Marie Lejeune et Quentin Valembois, pour leur relecture de ce mémoire et, dont les remarques m'ont été très utiles.

Ensuite, je tiens à remercier ma famille pour leur soutien sans faille et leurs encouragements qui m'ont permis d'arriver au terme de ce travail, et plus particulièrement mes parents qui m'ont apporté de nombreux conseils concernant la structure et la rédaction de ce mémoire.

Je remercie également tous mes amis et proches qui m'ont, ne serait-ce qu'en tentant de comprendre le sujet de mon mémoire, montré leur intérêt et soutien.

Finalement, j'aimerais remercier toute personne qui viendra à lire ou simplement à porter un intérêt à ce travail.

Bonne lecture.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préambule

Le point de départ de ce mémoire est un problème d'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne. Plus précisément, la donnée initiale est une certaine fonction

$$f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$$

à maximiser ou minimiser (on parle d'une fonction à optimiser) pour laquelle on cherche un point $x^\star \in \{0,1\}^n$ tel que $f(x^\star) \geq f(x)$ pour tout $x \in \{0,1\}^n$ dans la cas d'une maximisation et $f(x^\star) \leq f(x)$ pour tout $x \in \{0,1\}^n$ dans le cas d'une minimisation. Le point $x^\star$ est alors défini comme un optimum de la fonction f.

Le problème d'optimisation sur les fonctions pseudo-booléennes est un problème connu comme $NP-difficile$ [5]. Certaines approches existent afin de résoudre des problèmes d'optimisation binaires (ou plus globalement entiers), comme par exemple la méthode du "Branch and Bound" [4] ou la méthode de linéarisation, mais celles-ci dépendent de la taille du problème de départ. Dans ce mémoire, la méthode de linéarisation va être utilisée. Elle sera appliquée sur plusieurs familles de fonctions pseudo-booléennes particulières (selon le nombre de monômes non linéaires) afin de pouvoir résoudre tout problème d'optimisation sur celles-ci.

Après une introduction consacrée à la mise en situation du problème et aux définitions, et où la donnée restera un cas général (une fonction f pseudo-booléenne à m monômes non linéaires), le corps de ce mémoire s'intéressera d'avantage aux fonctions pseudo-booléennes à un, deux et trois monômes non linéaires.

A partir d'un problème d'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne f, la première étape consiste à transformer ce problème non linéaire en un problème linéaire moyennant certaines contraintes linéaires elles aussi (ce nouveau problème sera appelé programme linéaire mixte [1]). Pour ce faire, le procédé de linéarisation standard est utilisé : il consiste à remplacer chaque monôme non linéaire de la fonction par une nouvelle variable et à imposer certaines contraintes linéaires pour respecter le problème initial. Il sera montré qu'il existe une bijection entre le domaine de la fonction de départ pour un problème d'optimisation et l'ensemble des solutions du programme linéaire mixte associé à cette fonction. Cette première étape est intéressante car il existe beaucoup de documentations sur les programmes linéaires mixtes, ce qui offre plus de ressources pour résoudre le problème de départ.

La deuxième étape consiste à décrire l'ensemble des points réels satisfaisant les contraintes du programme linéaire mixte. Nous appellerons cet ensemble le polyèdre des solutions [2]. Étant donné que dans notre cas la fonction est pseudo-booléenne, les points satisfaisant le programme linéaire mixte sont binaires tandis que les points du polyèdre eux, ne sont pas contraints à être binaires.

Si la description du polyèdre est telle qu'il est exactement l'enveloppe convexe des points binaires satisfaisant le programme, alors une solution optimale sera aisément trouvée. Toute la difficulté réside dans le fait qu'il n'est pas toujours possible de décrire systématiquement l'enveloppe convexe des solutions d'un programme linéaire mixte. Il existe certaines méthodes qui permettent d'améliorer la description du polyèdre des solutions (en ajoutant de nouvelles contraintes par exemple) mais à l'heure actuelle aucune méthode générale efficace n'existe pour décrire l'enveloppe convexe d'un problème d'optimisation linéaire restreint aux points binaires.

C'est tout particulièrement la description de ce polyèdre des solutions associé à une fonction pseudo-booléenne qui va nous intéresser. Le but ultime sera d'y ajouter des inégalités afin qu'il décrive exactement l'enveloppe convexe des solutions.

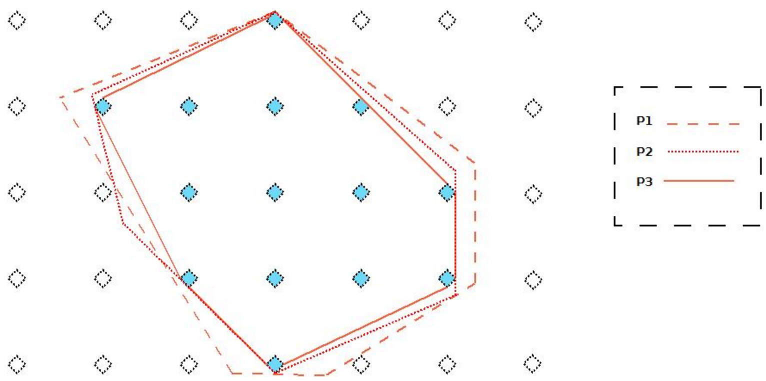


FIGURE 1.1 – Représentation de trois polyèdres (dans le plan) contenant le même ensemble de points.

1. Voir la Définition 9
2. Une définition exacte sera donnée dans la Section 1.2.2

1.1.1 Note personnelle à destination du lecteur

La présentation des différents chapitres de ce mémoire est le reflet de la méthode de travail utilisée au cours de ces 15 derniers mois.

J'ai d'abord lu et étudié la théorie relative aux polyèdres et aux programmes linéaires (Chapitre 1) avant de me plonger dans le thème de ce mémoire à proprement parler.

Ensuite, j'ai travaillé sur le cas d'une fonction à un seul monôme non linéaire (Chapitre 2). Cette étape était nécessaire afin de me familiariser avec certaines notions de base et utile dans l'élaboration de cas plus complexes dans le coeur du mémoire.

Après cela, je me suis plongée longuement dans la partie de l'article de Crama, Rodriguez-Heck [6] concernant les fonctions à deux monômes non linéaires (Chapitre 3).

Une fois ce sujet maîtrisé et après concertation avec mon promoteur Pr. Y. Crama et son assistante Mme E. Rodriguez-Heck, je me suis intéressée aux fonctions à trois monômes non linéaires (Chapitre 4). Ce cas n'ayant jamais été étudié, j'ai tout d'abord mené des tests expérimentaux. Il est très vite apparu que l'étude de l'ensemble des solutions de problèmes d'optimisation des fonctions à trois monômes non linéaires était bien plus compliquée et comportait de nombreux cas particuliers. Je me suis donc concentrée sur certains d'entre eux et non sur un cas général.

Finalement, au fil de mon travail sur certains cas particuliers des fonctions à trois monômes, j'ai pu définir et démontrer la description de l'enveloppe convexe de l'ensemble des solutions relatif à un problème d'optimisation sur une fonction pseudo-booléenne particulière à m monômes non linéaires. Ce résultat est démontré dans le Chapitre 5. Les démonstrations concernant le cas de deux monômes non linéaires n'étaient donc plus réellement nécessaires car ce cas général couvre celui des fonctions à deux monômes.

Même si l'étude de cas particuliers est important, j'ai volontairement décidé d'intégrer dans ce mémoire uniquement les démonstrations générales, plus intéressantes, afin d'éviter un maximum de répétitions dans les démonstrations. Ainsi, le lecteur peut retrouver les résultats les plus probants dans le Chapitre 5.

1.2 Théorie nécessaire à la suite de la lecture

Le lecteur peut retrouver dans cette section les définitions usuelles de la théorie des polyèdres et des programmes linéaires qui nous sera utile tout au long de ce mémoire.

Sauf mention du contraire, la théorie présentée dans cette section est issue des notes de cours "Integer programming : Polyhedra and algorithms" de S. KRUMKE *[8]. Aucun résultat énoncé ne sera démontré.* [3]

1.2.1 Théorie des polyèdres

Définition 1. Un **polyèdre** P est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ décrit par un ensemble fini d'inégalités linéaires. Plus précisément :

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\}$$

ou encore :

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

où A est une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Nous noterons $P(A, b)$ le polyèdre associé à la matrice A et au vecteur b. Si le polyèdre P est borné, on parle alors de **polytope**.

La **dimension du polyèdre** P, notée $dim(P)$, est le nombre maximal de vecteurs affinement indépendants [4] dans P moins un. Si $P \in \mathbb{R}^n$ est de dimension n on dit qu'il est de **dimension maximale**.

Définition 2. Soient $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polyèdre, $w \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. L'inégalité $w^T x \leq t$ est **valide** pour le polyèdre P si $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : w^T x \leq t\}$, c'est-à-dire si les points du polyèdre satisfont l'inégalité considérée.

Faces d'un polyèdre

Définition 3. Soit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polyèdre. $F \subseteq P$ est appelé une **face** de P s'il existe une inégalité $w^T x \leq t$ valide pour P et telle que :

$$F = \{x \in P : w^T x = t\}.$$

3. Le lecteur peut retrouver les démonstrations dans [8] ou, si une autre source est mentionnée, en consultant cette dernière.

4. Les vecteurs $v^1, ..., v^k \in \mathbb{R}^n$ sont affinement indépendants si $\sum_{i=1}^k \lambda_i v^i = 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Si $F \neq \emptyset$ et $F \neq P$, on parle de face non **triviale** ou de face **propre** et on dit que l'inégalité $w^T x \leq t$ **définit** la face F.

Si $F \neq \emptyset$, on dit que l'inégalité $w^T x \leq t$ **supporte** la face F et on appelle $\{x \in \mathbb{R}^n : w^T x = t\}$ l'**hyperplan d'appui**.

Remarque 1. Notons qu'une face d'un polyèdre est également un polyèdre car F peut se réécrire de la manière suivante :

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} Ax \leq b \\ w^T x \leq t \\ -w^T x \leq -t \end{array} \right\}$$

Exemple 1 (Exemple tiré de [8] pg 19). Soit $P \in \mathbb{R}^2$ un polytope défini par l'ensemble d'inégalités suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire le polytope P sous la forme $P(A, b)$ en considérant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

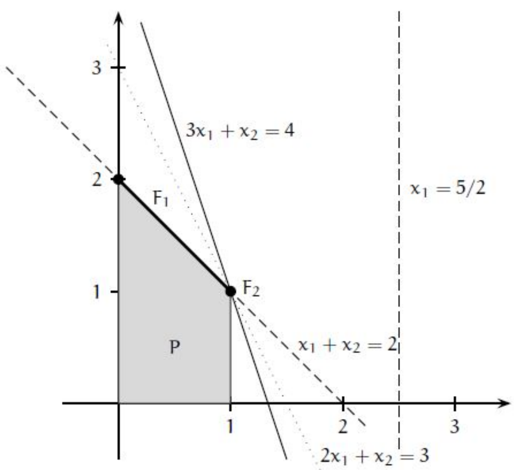


FIGURE 1.2 – A partir des inégalités décrivant $P \subseteq \mathbb{R}^2$, le polytope est représenté par la zone grise dans la figure ci-dessus.

Remarquons que le segment F_1 entre les points $(0,2)^T$ et $(1,1)^T$ est une face de P. En effet, l'inégalité $x_1 + x_2 \leq 2$ est valide pour P :

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 2\}.$$

De plus,

$$F_1 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 2\}.$$

On dit que l'inégalité $x_1 + x_2 \leq 2$ définit la face F_1. Étant donné que $F_1 \neq \emptyset$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant $x_1 + x_2 = 2$ est appelé un hyperplan d'appui pour le polytope P.

Remarquons également que l'ensemble F_2 est défini par :

$$\begin{aligned} F_2 &= P \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 3\} \\ &= P \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + x_2 = 4\}. \end{aligned}$$

Il s'agit également d'une face non triviale de P. Cet exemple montre qu'une face peut être déduite à partir d'inégalités différentes. Étant donné que F_2 n'est pas vide, on dit aussi que les inégalités $2x_1 + x_2 \leq 3$ et $3x_1 + x_2 \leq 4$ supportent P.

Finalement, la face F_3 est définie quant à elle par :

$$F_3 = P \cap \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{5}{2}\right\}.$$

Remarquons grâce à la figure représentant le polytope qu'il s'agit d'une face vide. Ainsi, F_3 est une face triviale et nous pouvons remarquer que l'égalité $x_1 = \frac{5}{2}$ ne définit pas un hyperplan d'appui.

Deux types de faces vont particulièrement nous intéresser dans ce travail.

Définition 4. Un **sommet** du polyèdre $P(A, b)$ est une face de dimension 0 de celui-ci.

Définition 5. Une **facette** F du polyèdre $P(A, b)$ est une face de dimension $dim(P) - 1$.

Les inégalités décrivant les facettes d'un polyèdre P nous seront utiles car elles permettent de décrire entièrement le polyèdre P.

Théorème 1. *Les facettes sont nécessaires et suffisantes pour décrire un polyèdre.*

Le théorème suivant sera quant à lui utilisé pour montrer que certaines inégalités valides pour un polyèdre donné définissent des facettes de celui-ci.

Théorème 2. *Soient $P(A, b)$ un polyèdre de dimension maximale et $F = \{x \in P : w^T x = T\}$ une face de P. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- *F est une facette de P.*
- *Si $c^T x = \gamma$ pour tout $x \in F$, alors $\begin{pmatrix} c \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un multiple de $\begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix}$.*

Définition 6. Un polyèdre P est **entier** si chaque face de P contient un point entier.

Les polyèdres entiers sont importants dans ce mémoire. En effet, si le polyèdre des solutions est entier, dans ce cas, un optimum de la fonction pseudo-booléenne étudiée sera aisément trouvé. [5]

Théorème 3. *Un polyèdre non vide $P \in \mathbb{R}^n_+$ est entier si et seulement si tous ses sommets sont entiers.*

Le théorème suivant sera utile dans les Chapitres 3, 4 et 5. Il permet de décrire l'enveloppe convexe d'une union de polytopes (ce théorème est repris du livre "Integer Programming" de Conforti [2]).

Théorème 4. *Théorème de* Balas *: Soient $P^0, \cdots, P^q$, $q+1$ polytopes $\in \mathbb{R}^n$ où P^k est décrit par $\left\{ \begin{array}{c} A^k x \leq b^k \\ 0 \leq x \leq d^k \end{array} \right\}$ pour tout $k \in \{0, \cdots, q\}$.*

Alors, [6] *$conv(P_0 \cup \cdots \cup P_q)$ est décrit par*

$$W = \left\{ (x, x^0, x^1, ..., x^q, z^0, ..., z^q) \in \mathbb{R}^{n+(q+1)\cdot n+q} : \begin{array}{ll} \sum_{k=0}^q x^k = x & \\ A^k x^k \leq b^k z^k & \forall k \in \{0, ..., q\} \\ 0 \leq x^k \leq d^k z^k & \forall k \in \{0, ..., q\} \\ \sum_{k=0}^q z^k = 1 & \\ z^k \in [0,1] & \forall k \in \{0, ..., q\} \end{array} \right\}$$

et nous aurons : $conv(P_0 \cup \cdots \cup P_q) = Proj_x(W)$. [7]

Définissons à présent la notion de matrice totalement unimodulaire. Elle sera quant à elle utile dans le Chapitre 2.

Unimodularité

Montrer qu'un polyèdre est entier peut parfois s'avérer être une tâche difficile. Il existe un certain type de polyèdres $P(A, b)$ pour lesquels il est facile de montrer l'intégralité pour tout $b \in \mathbb{Z}^m$ moyennant certaines conditions sur la matrice A. Ces matrices particulières sont les matrices totalement unimodulaires.

Définition 7. Une matrice A de rang maximal m et de dimension $m \times n$ est **totalement unimodulaire** si chacune de ses sous matrices carrées a un déterminant nul ou égal à ± 1.

Théorème 5. *Soit A une matrice de dimension $m \times n$, composée uniquement d'éléments entiers. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est un polyèdre entier pour tout $b \in \mathbb{Z}^m$ si et seulement si A est totalement unimodulaire.*

5. Plus d'explications seront donnée plus loin dans ce mémoire, lorsque plus de notions seront définies.
6. $conv(X)$ est la notation utilisée pour décrire l'enveloppe convexe d'un ensemble X, la définition exacte se trouve dans la sous-section suivante (Définition 11).
7. $Proj_x(W)$ est la projection de l'ensemble W sur l'espace des variables x.

Le théorème utilisé dans la suite pour montrer qu'une matrice est totalement unimodulaire est le suivant :

Théorème 6. *Soit A une matrice de dimension $m \times n$ dont les éléments appartiennent tous à $\{0, +1, -1\}$ et telle que chaque ligne contient au plus un $+1$ et au plus un -1. Alors, A est totalement unimodulaire.*

1.2.2 Théorie relative aux programmes linéaires

Définition 8. Un **programme linéaire** est un problème d'optimisation prenant la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Optimiser } & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sous les contraintes : } & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_i, \quad i \in \{1, ..., m\} \\ & x_j \in \mathbb{R} \text{ pour tout } j \in \{1, ..., n\} \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \text{Optimiser } & c^T x \\ \text{tel que : } & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ & \text{où } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

L'**ensemble des points satisfaisant les contraintes** est le suivant :

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq, =, \geq\}\ b_i \quad \forall i = 1, ..., m \right\}.$$

Une **solution optimale** $x^\star$ est un point satisfaisant les contraintes du programme linéaire et tel que $c^T x^\star \geq c^T x$ pour tout autre point x satisfaisant également les contraintes du programme dans le cas d'une maximisation (ou, dans le cas d'une minimisation, tel que $c^T x^\star \leq c^T x$ pour tout autre point x satisfaisant les contraintes du programme). La **valeur optimale** du problème est égale à $c^T x^\star$.

Étant donné que dans ce travail nous nous intéressons à une fonction pseudo-booléenne à optimiser, les programmes linéaires étudiés sont des programmes linéaires particuliers. En effet, des contraintes supplémentaires concernant le type des solutions sont nécessaires.

Définition 9. Un **programme linéaire mixte** est un problème d'optimisation de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\text{Optimiser } & c^T x \\
\text{tel que : } & Ax \le b \\
& x \ge 0 \\
& x \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \\
& \text{où } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n .
\end{aligned}$$

Remarque 2. Afin de différencier les programmes linéaires et les programmes linéaires mixtes, nous parlerons dans la suite de programmes linéaires à variables continues pour référencer les programmes linéaires définis dans la Définition 8.

Dans le cas particulier où $p = 0$, notons que le programme linéaire mixte est alors un programme linéaire à variables continues. Nous supposons donc toujours dans ce mémoire que $p \neq 0$ lorsqu'un programme linéaire mixte est mentionné. Dans l'autre cas extrême, où $p = n$, toutes les variables sont contraintes à être entières, on parle alors de **programme linéaire entier**.

Finalement, dans le cas où les variables sont restreintes aux booléens, on peut définir :

Définition 10. Un **programme linéaire binaire** est un problème d'optimisation de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\text{Optimiser } & c^T x \\
\text{tel que : } & Ax \le b \\
& x \ge 0 \\
& x \in \{0,1\}^n \\
& \text{où } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n .
\end{aligned}$$

Remarque 3. Remarquons qu'un programme linéaire binaire est un cas particulier d'un programme linéaire mixte où $p = n$ et où les entiers sont restreints à $\{0, 1\}$. On parlera donc également de programme linéaire mixte dans le cas où certaines variables sont restreintes aux booléens et d'autres sont continues.

Remarque 4. Notons que les programmes linéaires à variables continues et les programmes linéaires mixtes sont deux catégories de problèmes bien différentes. En effet, pour la première, il existe des algorithmes polynomiaux efficaces pour les résoudre (la méthode du simplexe par exemple [3]). Tandis que les programmes linéaires mixtes sont des problèmes $NP - difficile$ [5].

Définissons à présent la notion d'enveloppe convexe que nous avons utilisée précédemment (Théorème 4).

Définition 11. Pour un ensemble X de $\mathbb{R}^n$, l'**enveloppe convexe** de X, notée $conv(X)$, est définie comme l'ensemble des combinaisons convexes possibles des points de X, c'est-à-dire :

$$conv(X) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \text{ et } z_1, ..., z_k \in X \right\}.$$

Théorème 7. *Pour un ensemble X de $\mathbb{R}^n$ quelconque et $c \in \mathbb{R}^n$ alors*

$$\max\{c^T x : x \in X\} = \max\{c^T x : x \in conv(X)\}$$

Grâce à ce dernier résultat, rechercher la solution optimale sur un ensemble X peut se faire également sur son enveloppe convexe. Dans le cas où X est un ensemble d'entiers, cette proposition est particulièrement intéressante car elle affirme que la contrainte d'intégralité sur les variables peut être laissée tombée à condition que l'on recherche la solution optimale sur un ensemble continu qui est l'enveloppe convexe de X.

Théorème 8. *Soit $P = P(A, b)$ un polyèdre tel que A et b ont des coefficients rationnels. Le polyèdre P est entier si et seulement si $P = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$.*

Le théorème ci-dessus est un théorème technique qui nous permettra de tirer certaines conclusions sachant un polyèdre entier.

Théorème 9. *Un polyèdre non vide $P(A, b)$, tel que A et b ont des coefficients rationnels, est entier si et seulement si pour tout $c \in \mathbb{R}^n$, le programme linéaire $max\{c^T x : x \in P\}$ a une solution optimale entière.*

Ce dernier théorème est très important. En effet, si nous arrivons à montrer qu'un polyèdre est entier, alors, par le Théorème 9, pour tout problème d'optimisation linéaire, il existe une solution optimale entière sur celui-ci. Ainsi, tout programme linéaire mixte sur ce polyèdre peut être résolu comme un programme linéaire à variables continues au moyen d'un algorithme efficace comme la méthode du simplex par exemple [3].

Contrainte de cardinalité

Une certaine forme de contrainte est intéressante dans le but de prouver qu'un polyèdre est entier et par conséquent, par le Théorème 9, que tout problème d'optimisation binaire a une solution optimale entière. Il s'agit du cas où la seule contrainte est une contrainte dite "de cardinalité".

Une contrainte de cardinalité est une contrainte du type

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq b$$

avec $x_i \in [0, 1]$ pour tout $i \in [n]$ [8] et b un entier positif.

8. $[n] = \{1, ..., n\}$. Cette notation sera beaucoup utilisée dans la suite.

Dans ce cas, pour un problème d'optimisation

$$max \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$

on peut très bien réarranger et renommer les variables x_i de telle sorte que $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$ avec les k premiers coefficients strictement positifs et les $n-k$ suivants négatifs pour un certain $k \in \{0, ..., n\}$.

Ainsi, si $k \geq b$ il suffit de poser $x_1 = \cdots = x_b = 1$ et d'annuler les autres x_i pour tout $i > b$. Si $k < b$, alors on pose $x_1 = \cdots = x_k = 1$ et $x_i = 0$ pour tout $i > k$. Dans les deux cas, la contrainte de cardinalité est respectée et la valeur donnée aux x_i correspond à la solution optimale. Ainsi la solution optimale est binaire (et donc entière).

Elimination de Fourier-Motzkin ([2])

La méthode d'élimination de Fourier-Motzkin utilisée sur un système linéaire $Ax \leq b$ (où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$) est une méthode permettant de décrire la projection de l'ensemble des solutions sur un certain sous-ensemble de variables. Cette méthode sera beaucoup utilisée dans les démonstrations de ce travail. L'idée est d'éliminer une à une les variables souhaitées et de réécrire à chaque fois le système correspondant projeté sur le sous-ensemble de variables "restantes".

Considérons un système linéaire $Ax \leq b$ ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$) et notons $I = \{1, 2, \cdots, m\}$. On peut réécrire le système :

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la variable à éliminer est x_1. Ainsi, pour tout $a_{i1} \neq 0$, multiplions l'inégalité i par $\frac{1}{|a_{i1}|}(> 0)$ et on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned}
x_1 + a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{in}x_n &\leq b'_i \quad (i \in I_+) \\
a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i \quad (i \in I_0) \\
-x_1 + a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{in}x_n &\leq b'_i \quad (i \in I_-)
\end{aligned}$$

où

- $I_+ = \{i \in I : a_{i1} > 0\}$
- $I_0 = \{i \in I : a_{i1} = 0\}$
- $I_- = \{i \in I : a_{i1} < 0\}$

- $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{|a_{i1}|}$
- $b'_i = \dfrac{b_i}{|a_{i1}|}$

L'ensemble I est partitionné en trois sous-ensembles I_+, I_0 et I_- (certains peuvent être vides). Nous pouvons en déduire que $x_1, x_2, ..., x_n$ est solution du système initial si et seulement si $x_2, \cdots, x_n$ satisfait le système suivant :

$$\begin{aligned} a'_{k2}x_2 + \cdots + a'_{kn}x_n - b'_k < b'_i - a'_{i2}x_2 - \cdots - a'_{in}x_n & \qquad \forall k \in I_-, \forall i \in I_+ \\ a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i & \qquad \forall i \in I_0. \end{aligned}$$

A partir de ce nouveau système on peut à nouveau appliquer la méthode pour éliminer une autre variable et ainsi de suite jusqu'à obtenir la projection du système sur l'ensemble de variables voulu.

1.3 D'un problème d'optimisation sur une fonction non linéaire à un programme linéaire mixte

Afin d'alléger certaines définitions et démonstrations, nous supposerons dans la suite de ce travail que le problème d'optimisation est un problème de maximisation. Il ne s'agit en aucun cas d'une perte de généralité : dans le cas d'une minimisation il suffit de considérer une maximisation sur $-f$.

Dans cette section, la fonction considérée est telle que son nombre de monômes non linéaires n'est pas connu. Il s'agit donc d'un cas général.

Les notions et résultats présentés dans cette section sont issus du livre "Boolean Functions : Theory, Algorithms, and Applications" de Crama, Hammer *[5].*

La fonction pseudo-booléenne à optimiser $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ peut toujours s'écrire sous la forme suivante [5] :

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i \in [n]} a_i x_i + \sum_{S \in S*} a_S \prod_{i \in S} x_i$$

où

- $S*$ est l'ensemble des sous-ensembles d'indices $S \subseteq 2^{[n]}$ [9] tel que S contient au moins deux éléments et tel que son coefficient a_S est non nul.
- a_i, a_S sont des réels pour tout $i \in [n]$ et tout $S \in S*$.

9. L'ensemble $2^{[n]}$ représente l'ensemble des sous-ensembles d'indices dans $[n]$

La première étape consiste à réécrire le problème d'optimisation de la fonction f ayant certains monômes non linéaires ($\prod_{i \in S} x_i$ pour tout $S \in S*$) en un problème d'optimisation linéaire. Pour ce faire, de nouvelles variables et contraintes vont être introduites. Il suffit de poser, pour chaque monôme $\prod_{i \in S} x_i$, une nouvelle variable y_S avec la contrainte $y_S = \prod_{i \in S} x_i$ pour tout $S \in S*$.

La fonction peut s'exprimer de la sorte :

$$f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{|S*|}) = \sum_{i \in [n]} a_i x_i + \sum_{S \in S*} a_S y_S$$

en ajoutant au problème d'optimisation les contraintes $y_S = \prod_{i \in S} x_i$ pour tout $S \in S*$.

La non linéarité réside à présent dans les contraintes. Pour s'en débarrasser, l'idée est d'exprimer le problème d'optimisation de la fonction sous forme de programme linéaire. Ce procédé est la méthode de **linéarisation standard**.

Le problème d'optimisation de la fonction de départ f est décrit par le programme linéaire mixte suivant :

$$\begin{array}{rll}
\text{Maximiser} & \displaystyle\sum_{S \in S*} a_S y_S + \sum_{i \in [n]} a_i x_i & \\
\text{sous les contraintes :} & y_S - x_i \leq 0 & \forall i \in S \quad \forall S \in S* \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} x_i - y_S \leq (|S| - 1) & \forall S \in S* \\
& y_S \geq 0 & \forall S \in S* \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in [n]
\end{array}$$

Remarque 5. Il s'agit d'un programme linéaire mixte car les variables x_i sont restreintes à $\{0, 1\}$ pour tout $i \in [n]$, tandis que les variables y_S n'ont aucune contrainte concernant leurs types et sont donc réelles pour tout $S \in S*$.

Définition 12. Soit S un sous-ensemble d'indices inclus dans $2^{[n]}$. Les inégalités associées à la variable y_S (telle que $y_S = \prod_{i \in S} x_i$) suivantes :

$$\begin{aligned}
& y_S \leq x_i \qquad \forall i \in S \\
& y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\
& y_S \geq 0
\end{aligned}$$

sont appelées les **inégalités de la linéarisation standard** du monôme indexé par S.

Théorème 10. *Le problème d'optimisation d'une fonction* $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \in S*} a_S \prod_{i \in S} x_i + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

où $S* = \{S \subseteq 2^{[n]} : |S| \geq 2,\ a_S \neq 0\}$.

est équivalent au programme linéaire mixte suivant :

$$\begin{aligned}
\textit{Optimiser} \quad & \sum_{S \in S*} a_S y_S + \sum_{i \in [n]} a_i x_i & \\
\textit{sous les contraintes :} \quad & y_S \leq x_i & \forall i \in S \quad \forall S \in S* \\
& y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) & \forall S \in S* \\
& y_S \geq 0 & \forall S \in S* \\
& x_i \in \{0,1\} & \forall i \in [n]
\end{aligned}$$

Remarque 6. Par *équivalent*, on sous-entend que résoudre l'un des problèmes permet de résoudre l'autre. A partir d'un optimum de la fonction de départ, une solution optimale du programme linéaire mixte pourra être trouvée, et inversement à partir d'une solution optimale du programme linéaire mixte, un optimum de la fonction peut se calculer.

Démonstration. La preuve est divisée en deux parties. Premièrement nous allons prouver que $y_S = \prod_{i \in S} x_i$ pour tout $S \in S*$ et ensuite qu'il existe une bijection entre les ensembles de départ des deux problèmes.

1. Soient $(x, y) \in \{0,1\}^n \times \mathbb{R}^{|S*|}$ une solution du programme linéaire mixte et $S \in S*$ fixé. Remarquons que :
   (a) $y_S = 1 \Leftrightarrow \prod_{i \in S} x_i = 1$

   $\Leftarrow$: En supposant $\prod_{i \in S} x_i = 1$, cela implique que $x_i = 1$ pour tout $i \in S$. Ainsi, $\sum_{i \in S} x_i = |S|$ et donc $\sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) = |S| - |S| + 1 = 1$. Ce qui donne la contrainte $y_S \geq 1$. De plus, au vu de la contrainte $y_S \leq x_i$, pour tout $i \in S$, étant donné l'hypothèse, on a $y_S \leq 1$. Ainsi, on en déduit que $y_S = 1$.

   $\Rightarrow$: Supposons à présent que $y_S = 1$. Au vu de la contrainte $y_S \leq x_i$ pour tout $i \in S$ on obtient directement $1 \leq x_i$ pour tout $i \in S$ et par conséquent, étant donné que $x_i \in \{0,1\}$ pour tout $i \in [n]$, $x_i = 1$ pour tout $i \in S$ et $\prod_{i \in S} x_i = 1$.

   (b) $y_S = 0 \Leftrightarrow \prod_{i \in S} x_i = 0$.

   $\Leftarrow$: Supposons que $\prod_{i \in S} x_i = 0$. Cela veut dire qu'il existe $i_0 \in S$ tel que $x_{i_0} = 0$. Par les contraintes $y_S \leq x_{i_0} = 0$ et $y_S \geq 0$, la variable y_S est forcément égale à 0.

$\Rightarrow$: Supposons à présent que $y_S = 0$, dans ce cas $y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1)$ implique :

$$0 \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i \in S} x_i < |S|$$

Étant donné que x_i appartient à $\{0, 1\}$ pour tout $i \in [n]$, au vu de la dernière inégalité, il existe un $i_0 \in S$ tel que $x_{i_0} = 0$. Ainsi, $\prod_{i \in S} x_i = 0$.

2. Montrons qu'il existe une bijection entre les deux ensembles.

   Soit $g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n \times \mathbb{R}^{|S*|}$ tel que $g(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, y_{S_1}, \cdots, y_{S_{|S*|}})$

   Surjection : Étant donnée $(x_1^*, \cdots, x_n^*, y_{S_1}^*, \cdots, y_{S_{|S*|}}^*)$ une solution du programme linéaire, pour le point 1, on sait que $\prod_{i \in S} x_i = y_S \ \forall S \in S*$. Ainsi, $(x_1^*, ..., x_n^*)$ est directement une solution de la fonction de départ à optimiser.

   Injection : Soient $(x_1^a, ..., x_n^a)$ et $(x_1^b, ..., x_n^b) \in \{0, 1\}^n$ tels que $g(x_1^a, ..., x_n^a) = g(x_1^b, ..., x_n^b)$. Il s'en déduit directement que $(x_1^a, ..., x_n^a) = (x_1^b, ..., x_n^b)$ ce qui montre l'injection.

   Remarquons aussi que les coefficients de $\prod_{i \in S} x_i$ et y_S sont les mêmes dans leurs expressions respectives. Ainsi, la valeur rendue par la fonction ou le programme est la même pour une solution donnée, en particulier, pour une solution optimale/optimum.

$\square$

Ce théorème est important dans le suite du travail : étant donné un problème d'optimisation sur une fonction pseudo-booléenne non linéaire, nous étudierons à chaque fois le programme linéaire mixte qui lui est associé. Le résultat ci-dessus nous assure qu'à partir des solutions optimales pour le programme linéaire, les optimums de la fonction pourront être trouvés.

Remarque 7. Au vu du premier point montré dans la démonstration du théorème ci-dessus, on remarque que pour une solution du problème donnée (x, y) les variables y_S sont binaires également pour tout $S \in S*$. Ainsi, malgré que la contrainte

$$y_S \in \{0, 1\} \text{ pour tout } S \in S*$$

n'est pas explicitement donnée, toutes les variables sont binaires.

1.4 Définitions générales

Dans cette section, la fonction considérée est toujours telle que son nombre de monômes non linéaires n'est pas connu. Nous allons introduire certaines notations et définitions propres au problème étudié que nous utiliserons de manière récurrente dans les prochains chapitres.

1.4.1 Ensemble des solutions

Pour rappel, une fonction pseudo-booléenne quelconque $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ peut toujours s'écrire de la manière suivante [5] :

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{S \in S*} a_S \prod_{i \in S} x_i + \sum_{i \in [n]} a_i x_i.$$

où

- $S*$ est l'ensemble des sous-ensembles d'indices $S \subseteq 2^{[n]}$ tel que S contient au moins deux éléments et tel que son coefficient a_S est non nul.
- a_i, a_S sont des réels pour tout $i \in [n]$ et tout $S \in S*$.

Un problème d'optimisation sur la fonction f peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Optimiser } & \sum_{S \in S*} a_S y_S + \sum_{i \in [n]} a_i x_i \\ \text{sous les contraintes } & y_S = \prod_{i \in S} x_i \text{ pour tout } S \in S* \\ & x_i \in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

On note X_L l'ensemble des solutions du problème d'optimisation associé à la fonction f, plus précisément :

$$X_L = \left\{ (x,y) \in \{0,1\}^{n+|S*|} : y_S = \prod_{i \in S} x_i \text{ pour tout } S \in S* \right\}.$$

Notons son enveloppe convexe $P_L^* := conv(X_L)$ [10].

Au vu du Théorème 7, trouver une solution optimale dans l'ensemble X_L revient donc à trouver une solution optimale dans l'ensemble P_L^*.

10. Les notations des ensembles utilisées sont tirées de l'article [6].

Le problème d'optimisation peut également s'exprimer, par le procédé de linéarisation standard, sous la forme d'un programme linéaire mixte :

$$\text{Optimiser} : \sum_{S \in S*} a_S y_S + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

où $S* = \{S \subseteq 2^{[n]} : |S| \geq 2,\, a_S \neq 0\}$
sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} & y_S \leq x_i & \forall i \in S \quad \forall S \in S* \\ & y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) & \forall S \in S* \\ & y_S \geq 0 & \forall S \in S* \\ & x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in [n] \end{aligned}$$

Une fois le problème d'optimisation mis sous forme d'un programme linéaire mixte, on peut introduire le polyèdre des solutions de ce dernier. Il s'agit de l'ensemble des points appartenant à $[0,1]^{n+|S*|}$ satisfaisant les contraintes du programme linéaire c'est-à-dire :

$$P_L = \left\{ (x, y) \in [0,1]^{n+|S*|} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \end{array} \quad \text{pour tout } S \in S* \right\}.$$

Il a été démontré dans le Théorème 10 que

$$X_L = P_L \cap \mathbb{Z}^{n+|S*|} .$$

Ainsi, étant donné que $P_L^* = conv(X_L)$ on a :

$$P_L^* = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+|S*|}).$$

Par cette observation, nous pouvons également conclure que les inégalités de la linéarisation standard pour tout $S \subseteq S*$ sont valides pour P_L^*.

Même si le programme linéaire étudié est mixte, c'est-à-dire qu'une partie de l'ensemble des solutions satisfaisant les contraintes doit appartenir à $\{0,1\}^n$, les points appartenant au polyèdre des solutions, eux, ne sont pas binaires étant donné que la contrainte sur le type des variables x_i pour tout $i \in [n]$ n'est plus demandée. Ainsi, $P_L \neq conv(X_L)$

Le but est d'ajouter des inégalités au polyèdre P_L afin de décrire l'enveloppe convexe de l'ensemble des solutions binaires, pour obtenir une description d'un polytope P'_L entier correspondant à $conv(X_L) = P_L^*$. On parle alors de description parfaite de l'ensemble des solutions binaires $P'_L = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+|S*|}) = conv(X_L) = P_L^*$.

Ainsi, une fois une description parfaite de P_L^* trouvée, tout programme linéaire à variables entières sur ce polytope peut être résolu comme un programme linéaire à variables continues. En effet, par le Théorème 7, une solution optimale du problème d'optimisation sur l'ensemble des solutions X_L est égale à une soution optimale sur l'ensemble continu P_L^*. Etant donné qu'il existe des algorithmes efficaces pour résoudre des programmes linéaires à variables continues (comme la méthode du simplexe par exemple [3]), une solution optimale du problème d'optimisation sur l'ensemble des solutions X_L sera aisément trouvée.

Comme mentionné dans l'introduction, le but de ce mémoire est de trouver une description parfaite du polyèdre P_L^* associé à une fonction pseudo-booléenne particulière.

1.4.2 Inégalités 2-links

Cette sous-section reprend des définitions et résultats présentés dans l'article de Crama, Rodriguez-Heck*[6].*

Définition 13. Soient deux monômes non linéaires indexés par les sous-ensembles d'indices S, $T \subseteq S*$ et soient les variables y_S et y_T tels que $y_S = \prod_{i \in S} x_i$ et $y_T = \prod_{i \in T} x_i$. L'**inégalité 2-links** associée à (S, T) est définie par :

$$y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S|.$$

De la même manière, on peut définir l'inégalité 2-links associée à (T, S) par

$$y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T|.$$

Remarque 8. On peut définir les inégalités 2-links pour n'importe quelle paire d'ensembles d'indices S et $T \in S*$.

Théorème 11. *Pour toutes paires d'ensembles d'indices distincts S et $T \in S*$, l' inégalité 2-links (S, T) est valide pour P_L^* (enveloppe convexe des points entiers satisfaisant les contraintes de la linéarisation standard d'une fonction pseudo-booléenne quelconque f).*

Démonstration. Pour rappel

$$P_L^* = conv(X_L).$$

Montrons que pour tout (x, y) de X_L, le point satisfait l'inégalité suivante :

$$y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S|.$$

Soit (x, y) un point quelconque $\in X_L$, trois cas sont possibles :

1. $y_S < y_T$
   Dans ce cas $y_S = 0$ et $y_T = 1$, on a donc $0 \leq 1 - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S|$.
   Étant donné que $y_T = 1$, tous les x_i pour lesquels i appartient à T sont égaux à 1, donc $\sum_{i \in T \setminus S} x_i = |T \setminus S|$ et $-\sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| = 0$.
   On obtient ainsi l'inégalité $0 \leq 1$, qui est toujours valide.

2. $y_S > y_T$
   Dans ce cas $y_S = 1$ et $y_T = 0$, on a donc $1 \leq 0 - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S|$.
   $y_T = 0$ implique qu'au moins un $x_{i_0} = 0$ pour $i_0 \in T$ (mais x_{i_0} n'appartient pas à S étant donné que $y_S = 1$), donc $\sum_{i \in T \setminus S} x_i < |T \setminus S|$ ce qui implique que $-\sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \geq 1$.
   Ainsi, l'inégalité $1 \leq -\sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S|$ est valide.
3. $y_S = y_T$
   Dans ce cas-ci

$$
\begin{aligned}
& y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\
& \Leftrightarrow 0 \leq - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\
& \Leftrightarrow \sum_{i \in T \setminus S} x_i \leq |T \setminus S|.
\end{aligned}
$$

   L'inégalité est toujours vérifiée étant donné que $x_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in [n]$.

Dans les trois cas, l'inégalité étudiée est toujours valide. Par conséquent, pour tout $(x, y) \in X_L$, le point satisfait l'inégalité $y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S|$.

□

Remarque 9. Notons que dans le cas où $|S \cap T| = \emptyset$ et le cas où $|S \cap T| = 1$, l'inégalité 2-links peut se déduire à partir des inégalités de la linéarisation standard de y_S et y_T, et est donc automatiquement valide pour P_L^*.

En effet

— Supposons $|S \cap T| = \emptyset$.

$$
y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \quad \Leftrightarrow \quad y_S \leq y_T - \sum_{i \in T} x_i + |T|
$$

à partir des inégalités de la linéarisation standard de y_S et y_T suivantes :

$$
\begin{aligned}
& y_S \leq 1 \\
& y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - |T| + 1
\end{aligned}
$$

on retrouve l'inégalité $y_S \leq y_T - \sum_{i \in T} x_i + |T|$.

— Supposons à présent que $|S \cap T| = 1$ et notons $S \cap T = \{k\}$, $k \in [n]$.

$$y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \quad \Leftrightarrow \quad y_S \leq y_T - \sum_{i \in T} x_i + x_k + |T| - 1$$

à partir des inégalités de la linéarisation standard de y_S et y_T suivantes :

$$\begin{aligned} y_S &\leq x_k \\ y_T &\geq \sum_{i \in T} x_i - |T| + 1 \end{aligned}$$

on retrouve également l'inégalité 2-links associée à (S, T).

Chapitre 2

Fonction à un seul monôme non linéaire

Plaçons-nous dans le cas où la fonction pseudo-booléenne $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ à optimiser a exactement un monôme non linéaire. La fonction peut s'écrire [5] :

$$f(x_1, ..., x_n) = a_S \prod_{i \in S} x_i + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

où S est un sous-ensemble d'indices inclus dans $2^{[n]}$ tel qu'il contient au minimum deux éléments et tel que son coefficient a_S est non nul.

Comme expliqué dans le Chapitre 1, le problème d'optimisation peut également être exprimé sous forme d'un programme linéaire mixte :

$$\text{Optimiser : } a_S \cdot y_S + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

$$\begin{aligned}
\text{sous les contraintes : } & y_S \leq x_i & \forall i \in S \\
& y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) & \\
& y_S \geq 0 & \\
& x_i \in \{0,1\} & \forall i \in [n]
\end{aligned}$$

Le polyèdre des solutions associé au programme linéaire mixte est :

$$P_L = \left\{ (x_1, ..., x_n, y_S) \in [0,1]^{n+1} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \end{array} \right\}.$$

Nous allons montrer que la solution optimale d'un problème d'optimisation linéaire quelconque sur ce polyèdre des solutions est binaire.

Deux cas vont être considérés en fonction du signe du coefficient de l'unique monôme non linéaire : $a_S \leq 0$ et $a_S > 0$.

2.1 Coefficient du monôme négatif ou nul

Si le coefficient de y_S est négatif ou nul, c'est-à-dire $a_S \leq 0$, dans le cas d'une maximisation, y_S prendra la valeur la plus petite possible. Les deux inégalités concernant la borne inférieure des valeurs possibles de y_S sont :

$$\begin{aligned} y_S &\geq \sum_{i \in S} x_i - (|S|-1) \\ y_S &\geq 0. \end{aligned}$$

Afin de satisfaire ces deux inégalités, y_S prendra la valeur maximale entre 0 et $\sum_{i \in S} x_i - (|S|-1)$. C'est-à-dire que nous avons :

$$y_S = max\{0, \sum_{i \in S} x_i - (|S|-1)\}.$$

Montrons que dans ce cas, l'inégalité $y_S \leq x_i$ pour tout $i \in S$ est redondante et que la solution optimale sur le polyèdre des solutions est binaire pour tout problème d'optimisation.

1. Supposons dans un premier temps, que

$$y_S = max\{0, \sum_{i \in S} x_i - (|S|-1)\} = \sum_{i \in S} x_i - (|S|-1).$$

$$\begin{aligned} \text{Dans ce cas : } y_s &\leq x_i \quad \forall i \in S \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in S} x_j - (|S|-1) \leq x_i \quad \forall i \in S \\ &\Leftrightarrow \sum_{j \in S, j \neq i} x_j \leq |S|-1 \quad \forall i \in S. \end{aligned}$$

L'inégalité est toujours satisfaite étant donné que $x_i \in [0,1]$ pour tout $i \in [n]$. L'inégalité $y_S \leq x_i \quad \forall i \in S$ est donc bien redondante.

Toujours en supposant que $y_S = \sum_{i \in S} x_i - (|S|-1)$, l'inégalité $y_S \leq \sum_{i \in S} x_i - (|S|-1)$ peut se réécrire comme suit :

$$\sum_{i \in S} x_i \leq (|S|-1) + \sum_{i \in S} x_i - (|S|-1).$$

Il s'agit d'une inégalité triviale. Les seules contraintes restantes sont donc :

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \text{pour tout } i \in [n].$$

Pour rappel, le but est d'optimiser

$$a_S \cdot y_S + \sum_{i\in[n]} a_i x_i$$

tout en satisfaisant les contraintes restantes. En fonction du signe de son coefficient a_i, x_i prendra la plus petite valeur possible pour un a_i négatif, c'est-à-dire $x_i = 0$ et la plus grande valeur possible dans le cas d'un coefficient positif, c'est-à-dire $x_i = 1$. Ainsi x_i appartient bien à $\{0, 1\}$ pour tout $i \in [n]$. Au vu des hypothèses : $y_S = \sum_{i\in S} x_i - (|S| - 1)$ et $y_S \in [0, 1]$, et étant donné que nous venons de montrer que tout x_i a une solution optimale binaire, y_S est binaire également. Ainsi, toutes les solutions optimales d'un programme linéaire mixte quelconque sont bien binaires.

2. Supposons à présent que $y_S = max\{0, \sum_{i\in S} x_i - (|S| - 1)\} = 0$. Dans ce cas $0 = y_S \leq x_i \quad \forall i \in S$ est bien redondante. L'inégalité restante peut alors se réécrire $\sum_{i\in S} x_i \leq (|S| - 1)$. Il s'agit d'une contrainte de cardinalité et, au vu de l'explication donnée dans la sous Section 1.2.2, toute solution optimale d'un programme linéaire quelconque binaire sur son polyèdre des solutions est binaire.

2.2 Coefficient du monôme strictement positif

Si le coefficient de y_S est strictement positif, c'est-à-dire $a_S > 0$, le but est d'avoir la plus grande valeur possible pour y_S. Les contraintes concernant sa borne supérieure sont :

$$\begin{aligned} &y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ &y_S \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $y_S = \min_{i\in S}\{x_i\}$. Montrons dans un premier temps que l'inégalité $y_S \geq \sum_{i\in S} x_i - (|S| - 1)$ est redondante :

$$\begin{aligned} & y_S \geq \sum_{i\in S} x_i - (|S| - 1) \\ \Leftrightarrow\ & \min_{i\in S} x_i \geq \sum_{i\in S} x_i - (|S| - 1) \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{i\in S} x_i - \min_{i\in S} x_i \leq |S| - 1. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une inégalité toujours vérifiée étant donné que $x_i \in [0,1]$ pour tout $i \in [n]$. Les inégalités restantes sont [1] :

$$\begin{aligned} y_S &\leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S &\geq 0 \\ 0 \leq x_i &\leq 1 \quad \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

Pour conclure, il est intéressant de réécrire le polyèdre P_L sous la forme

$$P_L = \{(x_1, ..., x_n, y_S) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : A(x_1, ..., x_n, y_S)^T \leq b\}$$

où A est une matrice et b un vecteur (leurs dimensions respectives seront données après analyse des inégalités décrivant P_L).

Pour rappel, dans ce cas-ci :

$$\begin{aligned} P_L &= \left\{(x_1, ..., x_n, y_S) \in [0,1]^{n+1} : \ y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \ \right\} \\ &= \left\{ (x_1, ..., x_n, y_S) \in R_+^{n+1} : \begin{array}{ll} y_S \leq x_i & \forall i \in S \\ x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \\ y_S \leq 1 & \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Chaque inégalité va décrire une ligne de la matrice A et du vecteur b.

— L'inégalité $y_S \leq x_i$ pour tout $i \in S$ peut se réécrire $y_S - x_i \leq 0$ pour tout $i \in S$. Les contraintes ainsi réécrites, les $|S|$ premières lignes de la matrice A peuvent être décrites. La première ligne (inégalité $y_S - x_{i_1} \leq 0$), par exemple, aura toutes ses composantes égales à zéro à l'exception de $a_{1,i_1} = -1$ et $a_{1,n+1} = 1$.
De manière générale, la ligne j (inégalité $y_S - x_{i_j} \leq 0$) sera composée de zéros, à l'exception de $a_{j,i_j} = -1$ et $a_{j,n+1} = 1$ et $b_j = 0$ pour tout $j \in \{1, ...|S|\}$.

— Les n lignes suivantes décriront les inégalités

$$x_i \leq 1 \quad \forall i \in [n]$$

telles que $a_{|S|+i,i} = 1, a_{|S|+i,j} = 0$ et $b_{|S|+i} = 1$ pour tout $i \in [n], j \in \{1, ..., n+1\}, j \neq i$.

— Finalement, la dernière ligne de la matrice A décrit

$$y_S \leq 1$$

telles que $a_{|S|+n+1,n+1} = 1, a_{|S|+n+1,i} = 0$ pour tout $i \in [n]$ et $b_{|S|+n+1} = 1$.

1. Notons que contrairement au cas $a_S \leq 0$, on ne peut supposer $y_S = \min_{i \in S} x_i$ car dans ce cas la contrainte n'est plus linéaire.

Ainsi, A est une matrice uniquement formée de $\{-1,0,1\}$ de dimension $(|S|+n+1)\times(n+1)$ et b un vecteur composé uniquement de $\{0,1\}$ de dimension $|S|+n+1$.

Vu la théorie sur les matrices unimodulaires et plus particulièrement le Théorème 6, il est évident que la matrice A est une matrice totalement unimodulaire. Dès lors, par le Théorème 5, le polyèdre

$$P_L = \{(x_1, ..., x_n, y_S) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : A(x_1, ..., x_n, y_S) \leq b \text{ et } x_1, ..., x_n, y_S \geq 0\}$$

est un polyèdre entier.

Ainsi, P_L qui est l'ensemble des solutions satisfaisant les contraintes du programme linéaire mixte relatif à la fonction f, est entier, et par le Théorème 9 [2] nous pouvons conclure.

2. Un polyèdre non vide P est entier si et seulement si pour tout $c \in \mathbb{R}^n$, le programme linéaire $max\{c^T x : x \in P\}$ a une solution optimale entière.

Chapitre 3

Fonction à deux monômes non linéaires

Toutes les définitions et tous les résultats présentés dans ce chapitre sont issus de l'article de CRAMA, RODRIGUEZ-HECK*[6].*

3.1 Mise en situation

Dans cette section, nous nous intéressons à une fonction pseudo-booléenne f quelconque ayant exactement deux monômes distincts non linéaires. Par la suite, nous noterons les ensembles d'indices de ces deux monômes respectivement S et $T \subseteq 2^{[n]}$. Le problème de départ est le suivant :

$$\text{Optimiser } f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R},$$

fonction qui peut s'écrire de la façon suivante [5] :

$$f(x_1, ..., x_n) = a_S \prod_{i \in S} x_i + a_T \prod_{i \in T} x_i + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

et que l'on peut réexprimer de la manière suivante :

$$f(x_1, ..., x_n, y_S, y_T) = a_S y_S + a_T y_T + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

en ajoutant les contraintes $y_S = \prod_{i \in S} x_i, y_T = \prod_{i \in T} x_i$ au problème d'optimisation.

L'ensemble X_L des solutions binaires associé à la fonction f, est défini par :

$$X_L = \left\{ (x_1, ..., x_n, y_S, y_T) \in \{0,1\}^{n+2} : y_S = \prod_{i \in S} x_i \text{ et } y_T = \prod_{i \in T} x_i \right\}.$$

Notons, comme dans le cas général, P_L^* son enveloppe convexe.

Nous pouvons également écrire le problème d'optimisation de la fonction sous la forme de programme linéaire mixte :

$$\begin{aligned}
\text{Optimiser } & a_S y_S + a_T y_T + \sum_{i\in[n]} a_i x_i \\
\text{sous les contraintes : } & y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\
& y_S \geq \sum_{i\in S} x_i - (|S|-1) \\
& y_S \geq 0 \\
& y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\
& y_T \geq \sum_{i\in T} x_i - (|T|-1) \\
& y_T \geq 0 \\
& x_i \in \{0,1\} \text{ pour tout } i \in [n]
\end{aligned}$$

Une fois le problème d'optimisation mis sous la forme d'un programme linéaire mixte, le polyèdre des solutions est le suivant :

$$P_L = \left\{ (x_1, ..., x_n, y_S, y_T) \in [0,1]^{n+2} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i\in S} x_i - (|S|-1) \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\ y_T \geq \sum_{i\in T} x_i - (|T|-1) \end{array} \right\}$$

Pour rappel, par le Théorème 10, on a $X_L = P_L \cap \mathbb{Z}^{n+2}$ et P_L^* est également l'enveloppe convexe de $P_L \cap \mathbb{Z}^{n+2}$.

Remarque 10. On peut supposer $S \cup T = [n]$. En effet, lorsqu'on considère un problème d'optimisation linéaire associé à la fonction f sur P_L, il décrit un programme linéaire à variables continues de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\text{Optimiser } & a_S y_S + a_T y_T + \sum_{i\in S\cup T} a_i x_i + \sum_{i\notin S\cup T} a_i x_i \\
\text{sous les contraintes : } & y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\
& y_S \geq \sum_{i\in S} x_i - (|S|-1) \\
& y_S \geq 0 \\
& y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\
& y_T \geq \sum_{i\in T} x_i - (|T|-1) \\
& y_T \geq 0 \\
& 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in S \cup T \\
& 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \notin S \cup T
\end{aligned}$$

Les seules contraintes portant sur les éléments du dernier terme de la formulation de la fonction, c'est-à-dire les variables x_i dont l'indice i n'appartient ni à S, ni à T, sont $0 \leq x_i \leq 1$ pour tout $i \notin S \cup T$. Étant donné que le but est de maximiser l'expression

$$a_S y_S + a_T y_T + \sum_{i \in S \cup T} a_i x_i + \sum_{i \notin S \cup T} a_i x_i$$

on aura, en fonction du signe du coefficient des termes $x_i, i \notin S \cup T$:

- $x_i = 0$ si $a_i \leq 0$
- $x_i = 1$ si $a_i > 0$.

Il s'agira donc d'entiers binaires. Cette déduction nous permet de laisser tomber le terme $\sum_{i \notin S \cup T} a_i x_i$ lors de la suite de notre travail d'optimisation. En effet, pour tous ces x_i leurs valeurs seront nécessairement binaires dans la solution optimale. Ainsi, dans la suite, nous supposerons $S \cup T = [n]$ sans perte de généralité.

Il est important de noter que pour les $x_i, i \in S \cup T$ nous ne pouvons réfléchir de la sorte car, ils sont soumis à d'autres contraintes, d'où la difficulté du problème.

3.2 Cas particulier : monômes d'intersection vide

Plaçons nous dans le cas où l'intersection des deux monômes est vide. Dans ce cas, le problème d'optimisation linéaire associé à la fonction f sur le polyèdre P_L peut se réécrire comme le programme linéaire à variables continues suivant :

$$\begin{aligned}
\text{Optimiser } & a_S y_S + \sum_{i \in S} a_i x_i + a_T y_T + \sum_{i \in T} a_i x_i & \\
\text{sous les contraintes : } & y_S \leq x_i & \forall i \in S \\
& y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) & \\
& y_S \geq 0 & \\
& 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in S \\
& & \\
& y_T \leq x_i & \forall i \in T \\
& y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) & \\
& y_T \geq 0 & \\
& 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in T
\end{aligned}$$

Étant donné que les deux sous-ensembles d'indices ont une intersection supposée vide (on a préalablement déjà supposé $S \cup T = [n]$), on peut dire que l'ensemble des x_i tel que i

appartient à S et l'ensemble des x_i tel que i appartient à T n'ont pas de lien qui les unit ou, plus formellement parlant, de contrainte les liant. Le problème d'optimisation peut donc s'écrire comme deux problèmes indépendants à optimiser (notons-les $P1$ et $P2$) tels que :

$P1$:	$P2$:
Optimiser : $a_S y_S + \sum_{i \in S} a_i x_i$	Optimiser : $a_T y_T + \sum_{i \in T} a_i x_i$
sous les contraintes :	sous les contraintes :
$y_S \leq x_i \quad \forall i \in S$	$y_T \leq x_i \quad \forall i \in T$
$y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (\lvert S \rvert - 1)$	$y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (\lvert T \rvert - 1)$
$y_S \geq 0$	$y_T \geq 0$
$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in S$	$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in T$

Les deux problèmes peuvent se résoudre séparément. Étant donné qu'ils décrivent chacun respectivement la linéarisation standard d'un seul monôme, leurs solutions optimales respectives seront, par le deuxième chapitre, binaires pour tout problème d'optimisation. Les solutions optimales de la fonction de départ (où les deux sous-ensembles S et T ont une intersection vide) sont les produits cartésiens de l'ensemble des solutions optimales des deux problèmes disjoints. Il s'agira toujours de solutions binaires, ce qui permet de conclure.

3.3 Cas particulier : monômes emboîtés

Le cas particulier de deux monômes emboîtés ne sera pas traité dans ce travail. On supposera donc toujours, dans la suite, que les deux monômes ne sont pas emboîtés.

La principale différence par rapport au cas où les deux sous-ensembles d'indices des monômes sont d'intersection non vide et non emboîtés est l'ensemble des inégalités décrivant les facettes du polyèdre des solutions associé à la fonction étudiée. En effet, nous allons montrer dans la section suivante [1] que les inégalités de la linéarisation standard des monômes associés à S et T décrivent des facettes de P_L^*, de même pour les inégalités 2-links (S, T) et (T, S). Dans le cas de monômes emboîtés, toutes ces inégalités ne décrivent pas chacune une facette. Les démonstrations ne sont pas plus difficiles que dans le cas général, il s'agit d'un choix personnel pour éviter des redondances dans les démonstrations de ce mémoire.

Si le lecteur est intéressé par l'étude de ce cas, les résultats le concernant se trouvent dans l'article de Crama, Rodriguez-Heck [6].

1. Cas général : monônomes d'intersection non vide et non emboîtés

3.4 Description des facettes de l'enveloppe convexe des solutions

Pour rappel, on définit le polyèdre des solutions du programme linéaire mixte associé à la fonction f de la manière suivante :

$$P_L = \left\{ (x, y_S, y_T) \in [0,1]^{n+2} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\ y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) \end{array} \right\}$$

et l'enveloppe convexe des solutions entières de celui-ci :

$$P_L^* = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+2}).$$

Proposition 1. *Le polyèdre $P_L^* \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ est de dimension maximale.*

Proposition 2. *Les inégalités de la linéarisation standard définissent des facettes de l'enveloppe convexe des points entiers satisfaisant les contraintes de la linéarisation standard d'une fonction à exactement deux monômes non linéaires (c'est-à-dire, de P_L^* associé à f).*

$$\begin{aligned} & y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ & y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\ & y_S \geq 0 \\ & y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\ & y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) \\ & y_T \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition 3. *Les inégalités 2-links définissent des facettes de l'enveloppe convexe des points entiers satisfaisant les contraintes de la linéarisation standard d'une fonction à exactement deux monômes non linéaires.*

$$\begin{aligned} y_S &\leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T &\leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T|. \end{aligned}$$

Remarque 11. Pour ne pas surcharger inutilement ce mémoire, et surtout, ne pas fatiguer le lecteur avant d'entamer la partie la plus intéressante (Chapitre 5 : Généralisation), j'ai décidé de ne pas reprendre les démonstrations de ces trois résultats dans la version finale. En effet, dans le Chapitre 5, un cas plus général à m monômes est traité et, il couvre le cas de deux monômes étudié. Ainsi, les trois résultats énoncés sont démontrés dans le cas plus général du Chapitre 5.

3.5 Description de l'enveloppe convexe des solutions

Soit P_L^2 le polytope défini par les inégalités standards des monômes indexés par S et T, ainsi que par les inégalités 2-links (S,T) et (T,S). Ainsi :

$$P_L^2 = P_L \cap \left\{ (x, y_S, y_T) \in \mathbb{R}^{n+2} : \begin{array}{l} y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \end{array} \right\}$$

ou de manière équivalente :

$$P_L^2 = \left\{ (x, y_S, y_T) \in [0,1]^{n+2} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\ y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) \\ y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \end{array} \right\}$$

Théorème 12. *Le polytope P_L^* associé à une fonction f ayant exactement deux monômes non linéaires est égal au polytope entier P_L^2 associé à cette même fonction.*

Nous allons montrer que P_L^2 n'a que des sommets entiers [2]. Par le Théorème 3, P_L^2 sera un polytope entier et, dans ce cas, par le Théorème 8, [3] on aura :

$$P_L^2 = conv(P_L^2 \cap \mathbb{Z}^{n+2}).$$

Or, il a été démontré dans le Chapitre 1 que les inégalités 2-links sont valides pour P_L^*. Donc, dans le cas où P_L^2 est entier, nous aurons

$$P_L^* = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+2}) = conv(P_L^2 \cap \mathbb{Z}^{n+2}) = P_L^2$$

C'est-à-dire que P_L^2 est une description parfaite de P_L^*.

Remarque 12. La démonstration ci-après n'est pas détaillée. En effet, comme précisé dans la remarque précédente, le Chapitre 5 traite en détails un cas qui couvre celui étudié dans cette section. Cependant, pour ne pas perturber le lecteur dans sa compréhension, les grandes étapes de la démonstration pour le cas particulier de deux monômes sont expliquées ci-dessous.

Démonstration. Pour rappel, la fonction considérée peut s'écrire :

$$f(x_1, ..., x_n) = a_S \prod_{i \in S} x_i + a_T \prod_{i \in T} x_i + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

où S et T sont les deux sous-ensembles d'indices respectifs des deux monômes non linéaires.

2. Notons que vu la contrainte $(x, y_S, y_T) \in [0,1]^{n+2}$, il s'agira de sommets binaires.

3. Un polyèdre $P'(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que A et b ont des coefficients rationnels, est entier si et seulement si $P' = conv(P' \cap \mathbb{Z}^n)$

Posons :

— $y_{S\cap T} = \prod_{i\in S\cap T} x_i$

— $y_S = y_{s\cap T} \cdot \prod_{i\in S\setminus T} x_i$

— $y_T = y_{s\cap T} \cdot \prod_{i\in T\setminus S} x_i$

et considérons les sous-ensembles d'inégalités suivants :

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_{S\cap T} = \prod_{i\in S\cap T} x_i$:

$$\begin{aligned} &y_{S\cap T} \leq x_i \quad \forall i \in S\cap T \\ &y_{S\cap T} \geq \sum_{i\in S\cap T} x_i - |S\cap T| + 1 \end{aligned}$$

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_S = y_{S\cap T} \cdot \prod_{i\in S\setminus T} x_i$:

$$\begin{aligned} &y_S \leq y_{S\cap T} \\ &y_S \leq x_i \quad \forall i \in S\setminus T \\ &y_S \geq \sum_{i\in S\setminus T} x_i + y_{S\cap T} - |S\setminus T| \end{aligned}$$

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_T = y_{S\cap T} \cdot \prod_{i\in T\setminus S} x_i$:

$$\begin{aligned} &y_T \leq y_{S\cap T} \\ &y_T \leq x_i \quad \forall i \in T\setminus S \\ &y_T \geq \sum_{i\in T\setminus S} x_i + y_{S\cap T} - |T\setminus S| \end{aligned}$$

Posons P le polytope $\in \mathbb{R}^{n+3}$ tel que :

$$P = \left\{ (x, y_S, y_T, y_{S\cap T}) \in \mathbb{R}^{n+3} : \begin{array}{l} y_S \leq y_{S\cap T} \\ y_S \leq x_i \quad \forall i \in S\setminus T \\ y_S \geq \sum_{i\in S\setminus T} x_i + y_{S\cap T} - |S\setminus T| \\ y_T \leq y_{S\cap T} \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T\setminus S \\ y_T \geq \sum_{i\in T\setminus S} x_i + y_{S\cap T} - |T\setminus S| \\ y_{S\cap T} \leq x_i \quad \forall i \in S\cap T \\ y_{S\cap T} \geq \sum_{i\in S\cap T} x_i - |S\cap T| + 1 \\ 0 \leq y_S \leq 1 \\ 0 \leq y_T \leq 1 \\ 0 \leq y_{S\cap T} \leq 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in [n] \end{array} \right\}$$

Soit P^0 la face de P telle que $y_{S\cap T} = 0$ et P^1 la face de P telle que $y_{S\cap T} = 1$. Au vu de la Remarque 1, P^0 et P^1 sont tout deux des polytopes. Ainsi :

$$P^0 = \left\{ (x, y_S, y_T, y_{S\cap T}) \in \mathbb{R}^{n+3} : \begin{array}{l} \sum_{i\in S\cap T} x_i \leq |S\cap T| - 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in [n] \\ y_{S\cap T} = y_S = y_T = 0 \end{array} \right\}$$

$$P^1 = \left\{ (x, y_S, y_T, y_{S\cap T}) \in \mathbb{R}^{n+3} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \setminus T \\ y_S \geq \sum_{i \in S\setminus T} x_i + y_{S\cap T} - |S \setminus T| \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \setminus S \\ y_T \geq \sum_{i \in T\setminus S} x_i + y_{S\cap T} - |T \setminus S| \\ 0 \leq y_S \leq 1 \\ 0 \leq y_T \leq 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in (S \setminus T) \cup (T \setminus S) \\ y_{S\cap T} = 1 \\ x_i = 1 \quad \forall i \in S \cap T \end{array} \right\}$$

Montrons dans un premier temps que P^0 et P^1 sont des polytopes entiers.

P^0 : Au vu de la description du polytope P^0, il n'y a aucune contrainte concernant les variables x_i telles que $i \in (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, excepté qu'elles doivent se trouver entre 0 et 1. Par conséquent, pour n'importe quel problème d'optimisation, ces x_i prendront les valeurs entières 0 ou 1. Pour les variables x_i telles que $i \in S \cap T$, une contrainte s'applique mais, il s'agit d'une contrainte de cardinalité. Comme expliqué dans la Section 1.2.2, on sait déjà que pour n'importe quel problème d'optimisation sur le polytope P^0 la solution optimale sera entière. Par le Théorème 9 [4], on peut conclure que P^0 est un polytope entier.

P^1 : On peut remarquer que la description du polytope P^1 se fait au moyen de deux systèmes disjoints l'un de l'autre.

Linéarisation standard de $S \setminus T$:	Linéarisation standard de $T \setminus S$:
$y_{S\setminus T} \leq x_i \quad \forall i \in S \setminus T$	$y_{T\setminus S} \leq x_i \quad \forall i \in T \setminus S$
$y_{S\setminus T} \geq \sum_{i \in S} x_i - (\lvert S \setminus T\rvert - 1)$	$y_{T\setminus S} \geq \sum_{i \in T} x_i - (\lvert T \setminus S\rvert - 1)$
$0 \leq y_{S\setminus T} \leq 1$	$0 \leq y_{T\setminus S} \leq 1$
$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in S \setminus T$	$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in T \setminus S$

Comme dans le cas de l'intersection vide des deux monômes, les deux problèmes peuvent se résoudre séparément. Étant donné qu'ils décrivent chacun respectivement la linéarisation standard du monôme $S \setminus T$ et $T \setminus S$, on sait que pour tout problème d'optimisation leur solution optimale respective sera entière. Ainsi, pour des problèmes d'optimisation sur le polytope P^1, les solutions optimales sont les produits cartésiens de l'ensemble des solutions des deux problèmes disjoints. Il s'agira toujours de solutions entières. A nouveau, par le Théorème 9, on peut ainsi conclure que P^1 est un polytope entier.

Etant donné que P^0 et P^1 sont entiers, on peut en déduire que $conv(P^0 \cup P^1)$ est entier. L'objectif est à présent de prouver que $conv(P^0 \cup P^1) = P$.

4. Un polyèdre non vide $P(A, b)$, tel que A et b ont des coefficients rationnels, est entier si et seulement si pour tout $c \in \mathbb{R}^n$, le programme linéaire $max\{c^T x : x \in P\}$ a une solution optimale entière.

Le Théorème de BALAS est appliqué (Théorème 4) pour écrire explicitement $conv(P^0 \cup P^1)$.

Afin de décrire $conv(P^0 \cup P^1)$, plusieurs nouvelles variables réelles sont introduites :

— x_i^0 et x_i^1 pour tout $i \in [n]$
— y_S^0 et y_S^1
— y_T^0 et y_T^1
— $y_{S\cap T}^0$ et $y_{S\cap T}^1$
— z^0 et z^1

et les inégalités introduites par le Théorème de BALAS sont les suivantes :

- $\sum_{k=0}^{q} x^k = x$: $\begin{cases} x_i^0 + x_i^1 = x_i \text{ pour tout } i \in [n] \\ y_S^0 + y_S^1 = y_S \\ y_T^0 + y_T^1 = y_T \\ y_{S\cap T}^0 + y_{S\cap T}^1 = y_{S\cap T} \end{cases}$

- $A^k x^k \leq b^k z^k$ pour P^0 $(k=0)$: $\left\{ \sum_{i\in S\cap T} x_i^0 \leq (|S\cap T| - 1)\cdot z^0 \right.$

- $A^k x^k \leq b^k z^k$ pour P^1 $(k=1)$: $\begin{cases} \sum_{i\in S\setminus T} x_i^1 - y_S^1 \leq (|S\setminus T| - 1)\cdot z^1 \\ \sum_{i\in T\setminus S} x_i^1 - y_T^1 \leq (|T\setminus S| - 1)\cdot z^1 \\ y_S^1 \leq x_i^1 \text{ pour tout } i \in S\setminus T \\ y_T^1 \leq x_i^1 \text{ pour tout } i \in T\setminus S \end{cases}$

- $0 \leq x^k \leq d^k z^k$ pour P^0 $(k=0)$: $\begin{cases} x_i^0 \leq 1\cdot z^0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ x_i^0 \geq 0\cdot z^0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ y_{S\cap T}^0 = 0\cdot z^0 \\ y_S^0 = 0\cdot z^0 \\ y_T^0 = 0\cdot z^0 \end{cases}$

- $0 \leq x^k \leq d^k z^k$ pour P^1 $(k=1)$: $\begin{cases} x_i^1 \leq 1\cdot z^1 \text{ pour tout } i \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \\ x_i^1 \geq 0\cdot z^1 \text{ pour tout } i \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \\ y_S^1 \leq 1\cdot z^1 \\ y_S^1 \geq 0\cdot z^1 \\ y_T^1 \leq 1\cdot z^1 \\ y_T^1 \geq 0\cdot z^1 \\ y_{S\cap T}^1 = 1\cdot z^1 \\ x_i^1 = 1\cdot z^1 \text{ pour tout } i \in S\cap T \end{cases}$

- $\sum_{k=0}^{q} z^k = 1,\ 0 \leq z^k \leq 1 \quad \forall k \in \{0,1\}$: $\begin{cases} z^0 + z^1 = 1 \\ z^0 \leq 1 \\ z^0 \geq 0 \\ z^1 \leq 1 \\ z^1 \geq 0 \end{cases}$

Notons W le polytope défini par $\{(x_1, ..., x_n, x_1^0, ..., x_n^0, x_1^1, ..., x_n^1, y_S, y_S^0, y_S^1, y_T, y_T^0, y_T^1, y_{S\cap R}, y_{S\cap T}^0, y_{S\cap T}^1) \in \mathbb{R}^{n+2\cdot n+1+2+1+2+1+2}\}$ qui satisfait l'ensemble des inégalités ci-dessus.

Notons également que $conv(P^0 \cup P^1) = Proj_{(x,y_S,y_T,y_{S\cap T})}(W)$.

Nous allons calculer $Proj_{(x,y_S,y_T,y_{S\cap T})}(W)$ en simplifiant certaines inégalités et en utilisant la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin.

Élimination des variables $x_1^1, ..., x_n^1, y_S^0, y_S^1, y_T^0, y_T^1, y_{S\cap T}^0, y_{S\cap T}^1, z^0, z^1$ par simplification.
Par une série d'observations, par substitution et par réarrangement des inégalités de W on obtient une nouvelle description du polytope :

$$
\begin{array}{lll}
 & \sum_{i\in S\cap T} (x_i - y_{S\cap T}) \leq (|S\cap T|-1)\cdot(1-y_{S\cap T}) & \\
\star & \sum_{i\in S\setminus T} (x_i - x_i^0) - y_S \leq (|S\setminus T|-1)\cdot y_{S\cap T} & \\
\star & \sum_{i\in T\setminus S} (x_i - x_i^0) - y_T \leq (|T\setminus S|-1)\cdot y_{S\cap T} & \\
 & x_i \leq 1 & \forall i \in S\cap T \\
 & x_i \geq y_{S\cap T} & \forall i \in S\cap T \\
 & y_S \leq y_{S\cap T} & \\
 & y_S \geq 0 & \\
\star & y_S \leq x_i - x_i^0 & \forall i \in S\setminus T \\
 & y_T \leq y_{S\cap T} & \\
 & y_T \geq 0 & \\
\star & y_T \leq x_i - x_i^0 & \forall i \in T\setminus S \\
 & y_{S\cap T} \leq 1 & \\
 & y_{S\cap T} \geq 0 & \\
\star & x_i - x_i^0 \leq y_{S\cap T} & \forall i \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \\
\star & y_{S\cap T} \leq 1 - x_i^0 & \forall i \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \\
\star & x_i^0 \leq x_i & \forall i \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S) \\
\star & 0 \leq x_i^0 & \forall i \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S)
\end{array}
$$

Élimination des variables $x_1^0, ..., x_n^0$ par la méthode de Fourier-Motzkin.

Remarquons, dans un premier temps, que les x_i^0 pour les $i \in S\cap T$ sont déjà éliminés dans la nouvelle description de W. Ainsi, il reste à éliminer les variables x_i^0 telles que $i \in (S\setminus T)\cup(T\setminus S)$. Pour cela, intéressons nous aux inégalités impliquant x_i^0. Il s'agit de celles précédées d'une '$\star$' dans la description de W.

On peut montrer par induction sur le nombre de variables éliminées, que la projection du polytope W est décrite par l'ensemble d'inégalités n'impliquant pas de variables x_i^0 (celles non précédées d'une $\star$ dans la description de W), ainsi que les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&y_S \leq x_i - x_i^0 && \forall i \in (S \setminus T) \setminus I \\
&y_T \leq x_i - x_i^0 && \forall i \in (T \setminus S) \setminus J \\
&x_i - x_i^0 \leq y_{S\cap T} && \forall i \in ((S \setminus T) \setminus I) \cup ((T \setminus S) \setminus J) \\
&y_{S\cap T} \leq 1 - x_i^0 && \forall i \in ((S \setminus T) \setminus I) \cup ((T \setminus S) \setminus J) \\
&x_i^0 \leq x_i && \forall i \in ((S \setminus T) \setminus I) \cup ((T \setminus S) \setminus J) \\
&0 \leq x_i^0 && \forall i \in ((S \setminus T) \setminus I) \cup ((T \setminus S) \setminus J) \\
&x_i \leq 1 && \forall i \in I \cup J \\
&y_S \leq x_i && \forall i \in I \\
&y_T \leq x_i && \forall i \in J \\
&0 \leq x_i && \forall i \in I \cup J \\
&\sum_{i \in S\setminus T} x_i - \sum_{i \in (S\setminus T)\setminus I} x_i^0 \leq y_S + (|S \setminus T| - (1+p)) \cdot y_{S\cap T} + p \\
&\sum_{i \in T\setminus S} x_i - \sum_{i \in (T\setminus S)\setminus J} x_i^0 \leq y_T + (|T \setminus S| - (1+q)) \cdot y_{S\cap T} + q
\end{aligned}
$$

où

- I est l'ensemble d'indices inclus dans $S \setminus T$ tel que les variables x_i^0 ont été éliminées pour tout $i \in I$.
- J est l'ensemble d'indices inclus dans $T \setminus S$ tel que les variables x_i^0 ont été éliminées pour tout $i \in J$.
- $p = |I|$.
- $q = |J|$.

Une fois toutes les variables x_i^0 éliminées, $I = S \setminus T$ et $J = T \setminus S$. De plus, les inégalités décrivant la projection du polytope W sur les variables restantes (c'est-à-dire $Proj_{(x,y_S,y_T,y_{S\cap T})}(W)$) sont les suivantes :

$$\begin{array}{lr}
\sum_{i \in S\cap T} (x_i - y_{S\cap T}) \leq (|S\cap T| - 1) \cdot (1 - y_{S\cap T}) & \\
x_i \leq 1 & \forall i \in S\cap T \\
x_i \geq y_{S\cap T} & \forall i \in S\cap T \\
y_S \leq y_{S\cap T} & \\
y_S \geq 0 & \\
y_T \leq y_{S\cap T} & \\
y_T \geq 0 & \\
y_{S\cap T} \leq 1 & \\
y_{S\cap T} \geq 0 & \\
 & \\
x_i \leq 1 & \forall i \in (S\setminus T) \cup (T \setminus S) \\
y_S \leq x_i & \forall i \in S \setminus T \\
y_T \leq x_i & \forall i \in T \setminus S \\
0 \leq x_i & \forall i \in (S\setminus T) \cup (T \setminus S) \\
\sum_{i \in S\setminus T} x_i \leq y_S + (|S\setminus T| - (1 + |S \setminus T|)) \cdot y_{S\cap T} + |S \setminus T| & \\
\sum_{i \in T\setminus S} x_i \leq y_T + (|T\setminus S| - (1 + |T \setminus S|)) \cdot y_{S\cap T} + |T \setminus S| &
\end{array}$$

Pour rappel, le polytope P était défini tel que :

$$P = \left\{ (x, y_S, y_T, y_{S\cap T}) \in \mathbb{R}^{n+3} : \begin{array}{l}
y_S \leq y_{S\cap T} \\
y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \setminus T \\
y_S \geq \sum_{i \in S\setminus T} x_i + y_{S\cap T} - |S \setminus T| \\
y_T \leq y_{S\cap T} \\
y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \setminus S \\
y_T \geq \sum_{i \in T\setminus S} x_i + y_{S\cap T} - |T \setminus S| \\
y_{S\cap T} \leq x_i \quad \forall i \in S \cap T \\
y_{S\cap T} \geq \sum_{i \in S\cap T} x_i - |S \cap T| + 1 \\
0 \leq y_S \leq 1 \\
0 \leq y_T \leq 1 \\
0 \leq y_{S\cap T} \leq 1 \\
0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in S \cup T
\end{array} \right\}.$$

Ainsi, nous remarquons que $Proj_{(x,y_S,y_T,y_{S\cap T})}(W)$ qui est égal à $conv(P^0 \cup P^1)$ est exactement le polytope P de départ. Sachant $conv(P^0 \cup P^1)$ entier, P est par conséquent entier également.

La dernière étape de la preuve consiste à présent à montrer que $Proj_{(x,y_S,y_T)}(P) = P_L^2$. Pour cela, la méthode l'élimination de FOURIER-MOTZKIN va à nouveau être utilisée pour éliminer la variable $y_{S\cap T}$ de l'ensemble des inégalités décrivant P.

Les inégalités impliquant la variable $y_{S\cap T}$ (réarrangées pour plus de clarté) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
y_S &\leq y_{S\cap T} \\
y_T &\leq y_{S\cap T} \\
\sum_{i\in S\cap T} x_i - |S\cap T| + 1 &\leq y_{S\cap T} \\
0 &\leq y_{S\cap T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{S\cap T} &\leq y_S - \sum_{i\in S\setminus T} x_i + |S\setminus T| \\
y_{S\cap T} &\leq y_T - \sum_{i\in T\setminus S} x_i + |T\setminus S| \\
y_{S\cap T} &\leq x_i \quad \forall i \in S\cap T \\
y_{S\cap T} &\leq 1
\end{aligned}$$

Six nouvelles inégalités sont introduites après élimination de la variable par la méthode de F-M (les dix autres sont redondantes à celles déjà présentes, ou bien peuvent être déduites à partir d'autres inégalités) :

$$\begin{aligned}
& y_S \leq y_T - \sum_{i\in T\setminus S} x_i + |T\setminus S| \\
& y_S \leq x_i \quad \forall i \in S\cap T \\
& y_T \leq y_S - \sum_{i\in S\setminus T} x_i + |S\setminus T| \\
& y_T \leq x_i \quad \forall i \in S\cap T \\
& \sum_{i\in S} x_i - |S| + 1 \leq y_S \\
& \sum_{i\in T} x_i - |T| + 1 \leq y_T
\end{aligned}$$

Ainsi, P projeté sur l'ensemble des variables (x, y_S, y_T) est décrit par :

$$Proj_{(x,y_S,y_T)}(P) = \left\{ (x, y_S, y_T) \in \mathbb{R}^{n+2} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\ y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \\ \sum_{i \in S} x_i - |S| + 1 \leq y_S \\ \sum_{i \in T} x_i - |T| + 1 \leq y_T \\ 0 \leq y_S \leq 1 \\ 0 \leq y_T \leq 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in S \cup T \end{array} \right\}$$

Il s'agit exactement de P_L^2 que nous avions défini comme :

$$P_L^2 = \left\{ (x, y_S, y_T) \in [0,1]^{n+2} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\ y_T \leq x_i \forall i \in T \\ y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) \\ y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \end{array} \right\}$$

Étant donné qu'il a été prouvé que les sommets du polytope P sont entiers, les projections de ses sommets restent des entiers. Ainsi, on peut conclure que P_L^2 a des sommets entiers et est, par le Théorème 3, un polytope entier.

Comme expliqué en début de démonstration, sachant P_L^2 entier, par le Théorème 8, on a :

$$P_L^2 = conv(P_L^2 \cap \mathbb{Z}^{n+2}).$$

Or, il a été démontré dans le Chapitre 1 Théorème 11 que les inégalités 2-links sont valides pour P_L^*. Donc :

$$P_L^* = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+2}) = conv(P_L^2 \cap \mathbb{Z}^{n+2}) = P_L^2$$

C'est-à-dire, P_L^2 polytope entier, décrit entièrement P_L^*. $\square$

Ainsi, ayant à présent une description parfaite de $P_L^* = P_L^2$ entier, tout programme linéaire mixte sur ce polytope peut être résolu comme un programme linéaire à variables continues. En effet, par le Thèorème 9, une solution optimale de P_L^2 est entière. Ainsi, en utilisant un des algorithmes efficaces pour résoudre les programmes linéaires à variables continues, une solution optimale rendue sera une solution entière. Il s'agira également d'une solution optimale du programme linéaire mixte par le Théorème 7.

Chapitre 4

Fonction à trois monômes non linéaires

4.1 Mise en situation

Dans cette chapitre, le cas d'une fonction pseudo-booléenne quelconque f ayant exactement trois monômes distincts non linéaires est étudié. Par la suite, nous noterons les ensembles d'indices de ces trois monômes S, T et $V \subseteq 2^{[n]}$. Le problème de départ est le suivant :

$$\text{Optimiser } f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}\,.$$

Fonction qui peut s'écrire de la façon suivante [5] :

$$f(x_1, ..., x_n) = a_S \prod_{i \in S} x_i + a_T \prod_{i \in T} x_i + a_V \prod_{i \in V} x_i + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

et que l'on peut réexprimer de la manière suivante :

$$f(x_1, ..., x_n, y_S, y_T, y_V) = a_S y_S + a_T y_T + a_V y_V + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

en ajoutant les contraintes $y_S = \prod_{i \in S} x_i, y_T = \prod_{i \in T} x_i$ et $y_V = \prod_{i \in V} x_i$ au problème d'optimisation.

L'ensemble des solutions du problème d'optimisation est à nouveau noté X_L et est défini comme suit :

$$X_L := \left\{ (x, y_S, y_T, y_V) \in \{0,1\}^{n+3} : y_S = \prod_{i \in S} x_i, y_T = \prod_{i \in T} x_i, y_V = \prod_{i \in V} x_i \right\}.$$

Problème d'optimisation qui, comme précédemment, par le Théorème 10, peut être décrit de manière équivalente par un programme linéaire mixte :

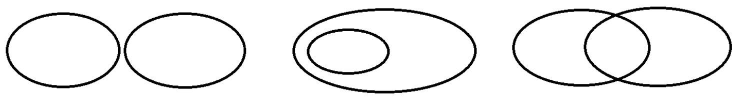
$$\text{Optimiser } a_S \cdot y_S + a_T \cdot y_T + a_V \cdot y_V + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

$$\begin{aligned}
\text{sous les contraintes : } & y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\
& y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\
& y_S \geq 0 \\
& y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\
& y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) \\
& y_T \geq 0 \\
& y_V \leq x_i \quad \forall i \in V \\
& y_V \geq \sum_{i \in V} x_i - (|V| - 1) \\
& y_V \geq 0 \\
& x_i \in \{0, 1\} \text{ pour tout } i \in [n]
\end{aligned}$$

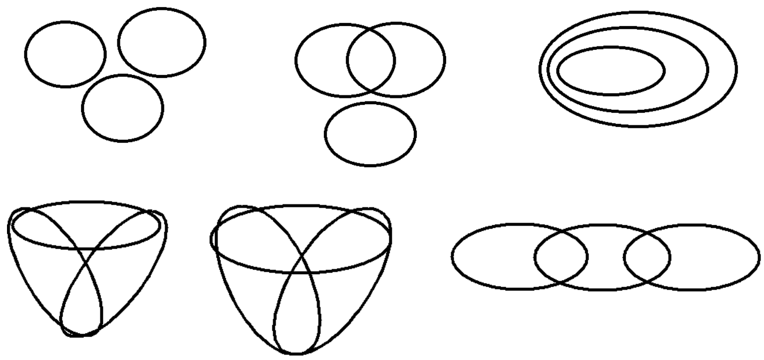
où le polyèdre des solutions associé à ce programme linéaire mixte est noté P_L.
Pour rappel,P_L^* est la notation utilisée pour décrire l'enveloppe convexe des solutions binaires du programme linéaire mixte, plus particulièrement :

$$P_L^* = conv(X_L) = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+3}).$$

Dans le cas de deux monômes non linéaires, les relations possibles entre les deux sous-ensembles d'indices sont faciles à représenter et à lister : soit leur intersection est vide, soit les deux monômes sont emboîtés, soit non emboîtés et d'intersection non vide.



Dans le cas de trois sous-ensembles d'indices, les configurations sont beaucoup plus nombreuses. Par exemple (liste non exhaustive) :



Comme indiqué dans l'introduction, le cas d'une fonction à trois monômes non linéaires n'a jamais été étudié spécifiquement dans une publication. J'ai donc dû aborder ce chapitre d'une manière différente des deux chapitres précédents.

Un contre-exemple présenté dans l'article [6] montre que les inégalités 2-links ne sont, dans un cas quelconque, pas suffisantes pour décrire l'enveloppe convexe de l'ensemble des solutions d'une fonction à trois monômes non linéaires. Ainsi, dans un cas quelconque, de nouvelles inégalités doivent être introduites pour décrire l'enveloppe convexe des ensembles de solutions tout en ne sachant pas si les inégalités de la linéarisation standard et les inégalités 2-links seront toujours présentes dans la description du polyèdre des solutions.

Afin de mieux comprendre les inégalités décrivant les facettes de l'enveloppe convexe des solutions d'une fonction à trois monômes non linéaires, j'ai généré de nombreux exemples via le programme POLYMAKE disponible sur LINUX.
POLYMAKE est un logiciel libre pour la recherche en géométrie des polyèdres. Il est, entre autres, utile pour générer l'enveloppe convexe d'un ensemble de sommets. C'est cette fonctionnalité que j'ai utilisée. A partir d'un ensemble de points entiers binaires, j'ai généré la description de l'enveloppe convexe de ceux-ci.
Par exemple, prenons l'ensemble

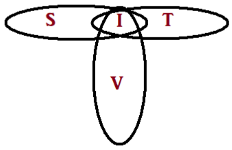
$$X_L = \left\{ x \in \{0,1\}^{6+3} : \begin{array}{c} y_S = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \\ y_T = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ y_V = x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \end{array} \right\}$$

Après avoir entré un à un les points de $\{0,1\}^9$ satisfaisant les trois contraintes ci-dessus, le programme POLYMAKE génère la description de l'enveloppe convexe de ces points (c'est-à-dire, selon nos notations : P_L^*)

J'ai dans un premier temps mené des tests expérimentaux concernant plusieurs configurations différentes. Il est très vite apparu que le cas d'une fonction à trois monômes non linéaires était bien plus compliqué que celui de deux monômes, et comportait de nombreux cas particuliers. Je me suis donc concentrée sur deux configurations particulières des trois sous-ensembles d'indices S, T et V.

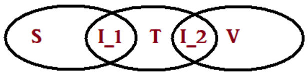
— Le cas dit en "fleur" : Les trois sous-ensembles d'indices S,T et V ont une intersection commune. Plus particulièrement, si l'intersection commune est notée I, on a :

$$S \cap T = I, T \cap V = I, S \cap V = I, I \neq \emptyset, S \setminus I \neq \emptyset, T \setminus I \neq \emptyset, V \setminus I \neq \emptyset.$$



— Le cas "chaîne" :

$$S \cap T = I_1, T \cap V = I_2, S \cap V = \emptyset, I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset.$$



4.2 Cas en "fleur"

Après avoir généré de multiples exemples via le programme POLYMAKE, en variant la cardinalité des monômes S, T et V et celle de l'intersection commune notée I, j'ai émis l'hypothèse suivante :

Dans le cas où $|I| = 1$, seules les inégalités de la linéarisation standard des monômes S, T et V sont nécessaires pour décrire l'enveloppe convexe des solutions.
Dans le cas où $|I| \geq 2$, les inégalités de la linéarisation standard sont nécessaires pour décrire l'enveloppe convexe des solutions ainsi que les inégalités 2-links $(S, T), (T, S), (S, V), (V, S), (T, V), (V, T)$. Mais aucune nouvelle inégalité ne doit être introduite pour décrire l'enveloppe convexe.

Par curiosité, j'ai également généré un exemple avec 4 monômes (S, T, V et W) configurés en fleur c'est-à-dire :

$$S \cap T = I, T \cap V = I, S \cap V = I, S \cap W = I, T \cap W = I, V \cap W = I$$
$$I \neq \emptyset, S \setminus I \neq \emptyset, T \setminus I \neq \emptyset, V \setminus I \neq \emptyset, W \setminus I \neq \emptyset$$

et à nouveau : dans le cas où $|I| = 1$, seules les inégalités de la linéarisation standard des monômes S, T, V, W sont nécessaires pour décrire l'enveloppe convexe des solutions.

Dans le cas où $|I| \geq 2$, les inégalités de la linéarisation standard sont nécessaires pour décrire l'enveloppe convexe des solutions ainsi que les inégalités 2-links $(S,T),(T,S),(S,V),(V,S),(T,V),(V,T),(S,W),(W,S),(T,W),(W,T),(V,W),(W,V)$. Mais, à nouveau, aucune nouvelle inégalité ne doit être introduite pour décrire l'enveloppe convexe.

J'ai, dans un premier temps, montré que la description de P_L^* associé à une fonction à exactement trois monômes non linéaires tels que les sous-ensembles d'indices sont configurés en fleur correspond au polyèdre décrit par les inégalités de la linéarisation standard des monômes S, T et V ainsi que les inégalités 2-links $(S,T),(T,S),(S,V),(V,S)(T,V),(V,T)$.

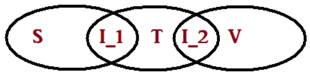
Mais, au vu des résultats des exemples générés dans le cas de 4 monômes, j'ai tenté de montrer le résultat pour m sous-ensembles d'indices configurés en fleur. Ce résultat se trouve dans le dernier chapitre.

Pour ne pas alourdir ce travail, aucun résultat ne sera montré dans cette section et j'invite le lecteur à se diriger vers le Chapitre 5 pour une généralisation à m monômes dont les sous-ensembles d'indices sont configurés en fleur.

4.3 Cas en "chaîne"

Pour rappel, la fonction à optimiser est une fonction pseudo-booléenne à trois monômes distincts non linéaires S, T et V telle que la configuration des trois monômes étudiée est la suivante :

$$S \cap T = I_1, T \cap V = I_2, S \cap V = \emptyset, I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset.$$



La configuration ci-dessus sera toujours supposée afin d'éviter certaines répétitions inutiles.

Comme dans le cas en fleur, plusieurs exemples ont dû être générés afin d'avoir une idée de la description de l'enveloppe convexe des solutions.

Il est rapidement apparu que dans le cas où $|I_1| \geq 2$ et $|I_2| \geq 2$, une nouvelle classe d'inégalités se présente. Dans la suite nous appellerons ces inégalités les inégalités maillon.

Définition 14. Soit f une fonction pseudo-booléenne à trois monômes non linéaires de sous-ensembles d'indices respectifs S, T et $V \subseteq 2^{[n]}$ tels que

$$S \cap T = I_1, T \cap V = I_2, S \cap V = \emptyset, I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset.$$

Soient les variables y_S, y_T et y_V telles que $y_S = \prod_{i \in S} x_i, y_T = \prod_{i \in T} x_i, y_V = \prod_{i \in V} x_i$. On définit l'**inégalité maillon** associée à (S,T,V) par :

$$y_T \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1.$$

Montrons dans un premier temps que cette inégalité est valide pour P_L^* associé à la fonction f considérée.

Théorème 13. *La classe des inégalités maillon est valide pour l'enveloppe convexe des solutions entières du programme linéaire mixte associé à une fonction pseudo-booléenne f à trois monômes non linéaires de sous-ensembles d'indices respectifs S, T et $V \subseteq 2^{[n]}$ tels que*

$$S \cap T = I_1, T \cap V = I_2, S \cap V = \emptyset, I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset.$$

Démonstration. Pour rappel, $P_L^* = conv(X_L)$. Nous allons montrer que l'inégalité est valide pour X_L et par conséquent qu'elle le sera également pour P_L^*.

Soit $(x_1, ..., x_n, y_S, y_T, y_V)$ un point quelconque appartenant à X_L. C'est-à-dire :

$$(x_1, ..., x_n, y_S, y_T, y_V) \in \{0,1\}^{n+3} \text{ tel que } y_S = \prod_{i \in S} x_i, y_T = \prod_{i \in T} x_i, y_V = \prod_{i \in V} x_i.$$

Étant donné que le point considéré appartient à $\{0,1\}^{n+3}$, il est direct que

$$\sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i \leq |T \setminus (S \cup V)|.$$

L'inégalité maillon ne peut donc être violée que dans le cas où

$$y_T + 1 < y_S + y_V$$

ce qui ne peut se produire que si $(y_S, y_T, y_V) = (1, 0, 1)$.
Dans ce cas, l'inégalité se réécrit :

$$0 \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + 1 + 1 - |T \setminus (S \cup V)| - 1$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i \leq |T \setminus (S \cup V)| - 1.$$

Étant donné que $y_T = 0$, au vu de sa définition : $y_T = \prod_{i \in T} x_i$, on en déduit qu'il existe un $i_0 \in T$ tel que $x_{i_0} = 0$, mais $y_S = 1 = y_V$, donc i_0 appartient forcément au sous-ensemble d'indices $T \setminus (S \cup V)$, ainsi $\sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i \leq |T \setminus (S \cup V)| - 1$ et l'inégalité est bien vérifiée.

Dans tous les autres cas :
- $(y_S, y_T, y_V) = (0, 0, 0)$
- $(y_S, y_T, y_V) = (1, 0, 0)$
- $(y_S, y_T, y_V) = (0, 1, 0)$
- $(y_S, y_T, y_V) = (0, 0, 1)$
- $(y_S, y_T, y_V) = (1, 1, 0)$
- $(y_S, y_T, y_V) = (0, 1, 1)$
- $(y_S, y_T, y_V) = (1, 1, 1)$

l'inégalité est toujours directement satisfaite au vu de l'observation

$$\sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i \leq |T \setminus (S \cup V)|.$$

$\square$

Remarque 13. Notons que dans le cas où $|I_1| \leq 1$ ou $|I_2| \leq 1$, alors, l'inégalité maillon peut être retrouvée à partir des inégalités 2-links et celles de la linéarisation standard des trois variables y_S, y_T et y_V.

Supposons que $|I_1| = 1$ tel que $I_1 = \{k\}$ et aucune hypothèse particulière concernant $|I_2|$.
Dans ce cas, à partir de l'inégalité 2-links (V, T) et de l'inégalité $y_S \leq x_k$ on a :

$$y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V|$$

$$\Rightarrow y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V| + x_k - y_S$$

$$\Leftrightarrow - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + x_k + y_T - y_S - y_V + |T \setminus V| \geq 0$$

étant donné que $S \cap T = I_1 = \{k\}, - \sum_{i \in T \setminus V} x_i = - \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i - x_k$

$$\Leftrightarrow - \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_T - y_S - y_V + |T \setminus V| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow - \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_T - y_S - y_V + |T \setminus (S \cup V)| + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y_T \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1$$

Un raisonnement similaire peut être utilisé dans le cas où $|I_2| = 1$ tel que $I_2 = \{k\}$. Dans ce cas, à partir de l'inégalité 2-links (S, T) et de l'inégalité $y_V \leq x_k$, l'inégalité maillon peut être retrouvée.

Supposons à présent que $|I_1| = 0$. Dans ce cas, à partir de l'inégalité 2-links (V, T) et de l'inégalité $y_S \leq 1$ l'inégalité maillon peut être directement déduite :

$$\begin{aligned}
& y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V| \\
& \Rightarrow y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V| + 1 - y_S \\
& \text{étant donné que } I_1 = S \cap T = \emptyset : \ T \setminus V = T \setminus (S \cup V) \\
& \Leftrightarrow - \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_T - y_S - y_V + |T \setminus (S \cup V)| + 1 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow y_T \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1
\end{aligned}$$

A nouveau, un raisonnement similaire est applicable dans le cas où $|I_2| = 0$. Dans ce cas, à partir de l'inégalité 2-links (S, T) et de l'inégalité $y_V \leq 1$, l'inégalité maillon associée à (S, T, V) peut être retrouvée.

On va à présent montrer que dans le cas où $|I_1| \geq 2$ et $|I_2| \geq 2$, l'inégalité maillon associée à (S, T, V) définit une facette de P_L^*.

Remarque 14. Notons que le polyèdre P_L^* associé à la fonction étudiée est de dimension maximale. Cette affirmation ne sera pas démontrée. [1]

Proposition 4. *L'inégalité maillon associée à (S, T, V) définit une facette de l'enveloppe convexe des points entiers satisfaisant les contraintes de la linéarisation standard d'une fonction pseudo-booléenne à trois monômes distincts non linéaires S, T et V telle que la configuration des trois monômes étudiée est la suivante :*

$$S \cap T = I_1, T \cap V = I_2, S \cap V = \emptyset, |I_1| \geq 2, |I_2| \geq 2.$$

Démonstration. Par le Théorème 13, nous savons que l'inégalité étudiée est valide pour P_L^*. Ainsi, on peut supposer qu'elle décrit une face de ce dernier. Nous allons montrer plus particulièrement qu'elle décrit une facette.
Pour cela, le Théorème 2 est utilisé. Nous allons montrer que l'hyperplan dans lequel la face est incluse est défini (à une constante multiplicative près) par l'égalité décrivant la face. Au vu de l'hypothèse que P_L^* est de dimension maximale et par le théorème cité nous pourrons conclure que la face est bien une facette.

Soit u_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Dans la suite, les points considérés sont écrits sous la forme (x, y_S, y_T, y_V) avec $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y_S, y_T, y_V \in \mathbb{R}$ respectivement.

1. Dans le chapitre suivant, le cas de m monômes configurés en fleur est traité et il sera montré que le polyèdre P_L^* associé à cette configuration est de dimension maximale. Même si le cas considéré dans la preuve est différent de celui-ci, la démonstration est également valable dans le cas de 3 monômes non linéaires dont les sous-ensembles d'indices sont configurés en chaîne.

Soit F une face de P_L^* décrite par

$$F = \left\{ (x, y_S, y_T, y_V) \in P_L^* : y_T = \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1 \right\}.$$

Supposons que F est incluse dans un hyperplan

$$b(x, y) = b_0$$

où

$$b(x, y) = \sum_{i \in [n]} b_i x_i + b_S y_S + b_T y_T + b_V y_V.$$

Nous allons montrer que cet hyperplan est de la forme (à une constante multiplicative près)

$$y_T = \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1.$$

Dans la suite, notons $T' = T \setminus (S \cup V)$.

1. Soit $(x, y_S, y_T, y_V)_1 = (\sum_{i \in [n]} u_i, 1, 1, 1)$.
   Le point appartient à F car il appartient à P_L^* (c'est-à-dire qu'il vérifie les inégalités de la linéarisation standard) et il vérifie également l'égalité définissant F :

   $$\begin{aligned} &y_T = 1 \\ &\sum_{i \in T'} x_i + y_S + y_V - |T'| - 1 = \sum_{i \in T'} 1 + 2 - |T'| - 1 = 1. \end{aligned}$$

   Ensuite, en supposant que le point satisfait l'équation de l'hyperplan, on a :

   $$\begin{aligned} &b((x, y_S, y_T, y_V)_1) = b_0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i \in [n]} b_i + b_S + b_T + b_V = b_0. \end{aligned}$$

   Ainsi on peut retenir de ce premier point : $\boxed{b_0 = \sum_{i \in [n]} b_i + b_S + b_T + b_V}$

2. Soit le point $(x, y_S, y_T, y_V)_2 = (\sum_{i \in S \cup T'} u_i, 1, 0, 0)$.
   A nouveau, le point appartient à F car il s'agit d'un point de P_L^* et :

   $$\begin{aligned} &y_T = 0 \\ &\sum_{i \in T'} x_i + y_S + y_V - |T'| - 1 = \sum_{i \in T'} 1 + 1 - |T'| - 1 = 0. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
b((x,y_S,y_T,y_V)_2) &= b_0 \\
\Leftrightarrow \sum_{i\in S\cup T'} b_i + b_S &= b_0 \\
\text{Vu le point 1} \Leftrightarrow \sum_{i\in S} b_i + \sum_{i\in T'} b_i + b_S &= \sum_{i\in[n]} b_i + b_S + b_T + b_V \\
\Leftrightarrow \sum_{i\in V} b_i + b_T + b_V &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi on a : $\boxed{\sum_{i\in V} b_i + b_T + b_V = 0}$

Par le même raisonnement, mais en inversant les rôles des sous-ensembles S et V, on obtient $\boxed{\sum_{i\in S} b_i + b_T + b_S = 0}$.

3. Soit $k \in V$ fixé et soit le point $(x,y_S,y_T,y_V)_3 = (\sum_{i\in S\cup T'} u_i + u_k, 1, 0, 0)$.
A nouveau, il s'agit bien d'un point de P_L^* et il appartient à F car $y_T = 0$ et $\sum_{i\in T'} x_i + y_S + y_V - |T'| - 1 = \sum_{i\in T'} 1 + 1 - |T'| - 1 = 0$.
En supposant que le point satisfait l'équation de l'hyperplan, on obtient :

$$\begin{aligned}
b((x,y_S,y_T,y_V)_3) &= b_0 \\
\Leftrightarrow \sum_{i\in S\cup T'} b_i + b_k + b_S &= b_0 \\
\text{Vu le point 1} \Leftrightarrow \sum_{i\in S\cup T'} b_i + b_k + b_S &= \sum_{i\in[n]} b_i + b_S + b_T + b_V \\
\Leftrightarrow b_k &= \sum_{i\in V} b_i + b_T + b_V \\
\text{Vu le point 2} \Leftrightarrow b_k &= 0.
\end{aligned}$$

et ce pour tout $k \in V$, on en déduit donc $\boxed{b_k = 0 \text{ pour tout } k \in V}$
De plus, étant donné que $\sum_{i\in V} b_i + b_T + b_V = 0$, $\boxed{b_V = -b_T}$

En supposant à présent que $k \in S$, par un raisonnement similaire mais en inversant les sous-ensembles S et V, les observations suivantes sont trouvées : $\boxed{b_k = 0 \text{ pour tout } k \in S}$ et $\boxed{b_S = -b_T}$.
De plus, étant donné le point 1 : $b_0 = \sum_{i\in[n]} b_i + b_S + b_T + b_V$, on a : $\boxed{b_0 = \sum_{i\in T'} b_i - b_T}$.

4. Si $|T'| \geq 1$, soit $k \in T'$ fixé et soit le point $(x, y_S, y_T, y_V)_4 = (\sum_{i\in[n], i\neq k} u_i, 1, 0, 1)$. Le point appartient à P_L^* et en particulier à F car $y_T = 0$ et $\sum_{i\in T'} x_i + y_S + y_V - |T'| - 1 = \sum_{i\in T', i\neq k} 1 + 2 - |T'| - 1 = 0$
De plus, en supposant que le point satisfait l'équation de l'hyperplan, on a :

$$\begin{aligned} b((x, y_S, y_T, y_V)_4) &= b_0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i\in[n], i\neq k} b_i + b_S + b_V &= b_0 \\ \text{Vu le point 2} \Leftrightarrow \sum_{i\in T', i\neq k} b_i + b_S + b_V &= b_0 \\ \text{Vu les déductions du point 3} \Leftrightarrow \sum_{i\in T', i\neq k} b_i - b_T - b_T &= \sum_{i\in T'} b_i - b_T \\ \Leftrightarrow b_k &= -b_T. \end{aligned}$$

et ce pour tout $k \in T'$. Ainsi : $\boxed{b_k = -b_T \text{ pour tout } k \in T'}$ et $\boxed{b_0 = (-|T'| - 1)b_T}$

Notons que dans le cas où $|T'| = 0$ alors il n'existe pas de coefficient b_i tel que i appartient à T' et nous aurons simplement $b_0 = -b_T$.

Grâce à toutes ces observations, on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in[n]} b_i x_i + b_S y_S + b_T y_T + b_V y_V = b_0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i\in T'} b_i x_i + b_S y_S + b_T y_T + b_V y_V = b_0 \quad \text{(par la 2ème observation)} \\ \Leftrightarrow &\sum_{i\in T'} -b_T x_i - b_T y_S + b_T y_T - b_T y_V = -(|T'| + 1)b_T \quad \text{(par les 3ème et 4ème observations)} \\ \Leftrightarrow &b_T \cdot (-\sum_{i\in T'} x_i - y_S + y_T - y_V) = b_T \cdot (-(|T'| + 1)) \\ \Leftrightarrow &b_T \cdot (y_T) = b_T \cdot (\sum_{i\in T'} x_i + y_S + y_V - |T'| - 1). \end{aligned}$$

Pour rappel nous avions posé $T' = T \setminus (S \cup V)$. Nous venons de montrer que l'hyperplan contenant F est unique à une constante près : b_T. Étant donné qu'il a été supposé que P_L^* est de dimension maximale, par le Théorème 2, on peut conclure que F est une facette définie par $y_T = \sum_{i\in T\setminus(S\cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1$.

□

4.3.1 Description de l'enveloppe convexe des solutions

Posons P_L^{3C} le polytope décrit par les inégalités de la linéarisation standard des monômes indexés par S, T et V, les inégalités 2-links associées à $(S,T),(T,S),(S,V),(V,S),(T,V),(V,T)$ et l'inégalité maillon associée à (S,T,V).

$$P_L^{3C} = P_L \cap \left\{ (x, y_S, y_T, y_V) \in \mathbb{R}^{n+3} : \begin{array}{l} y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \\ y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V| \\ y_T \leq y_V - \sum_{i \in V \setminus T} x_i + |V \setminus T| \\ \\ y_T \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1 \end{array} \right\}$$

ou de manière équivalente :

$$P_L^{3C} = \left\{ (x, y_S, y_T, y_V) \in [0,1]^{n+3} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \\ y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) \\ y_V \leq x_i \quad \forall i \in V \\ y_V \geq \sum_{i \in V} x_i - (|V| - 1) \\ \\ y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \\ y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V| \\ y_T \leq y_V - \sum_{i \in V \setminus T} x_i + |V \setminus T| \\ \\ y_T \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1 \end{array} \right\}$$

On va montrer que le polytope P_L^{3C} décrit l'enveloppe convexe des solutions binaires du programme linéaire mixte associé à la fonction f particulière étudiée dans cette section. Pour cela, deux affirmations vont être montrées :

- Le polytope P_L^{3C} est un polyèdre entier.
- Le polytope P_L^{3C} est égal à P_L^*.

Théorème 14. *Soit f une fonction pseudo-booléenne à trois monômes distincts non linéaires S, T et V telle que la configuration des trois monômes étudiée est la suivante :*

$$S \cap T = I_1, T \cap V = I_2, S \cap V = \emptyset, I_1 \neq \emptyset, I_2 \neq \emptyset.$$

Alors, le polytope P_L^* associé à f est égal au polytope entier P_L^{3C} associé à cette même fonction.

Démonstration. Dans la suite de cette démonstration, nous noterons :

— $I_1 = S \cap T$
— $I_2 = T \cap V$
— $T' = T \setminus (I_1 \cup I_2)$

Considérons les sous-ensembles d'inégalités suivants :

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_{I_2} = \prod_{i \in I_2} x_i$:

$$\begin{aligned}
&y_{I_2} \geq 0 \\
&y_{I_2} \leq x_i \quad \forall i \in I_2 \\
&y_{I_2} \geq \sum_{i \in I_2} x_i - |I_2| + 1 \\
&0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in I_2.
\end{aligned}$$

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_S = \prod_{i \in S} x_i$:

$$\begin{aligned}
&y_S \geq 0 \\
&y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\
&y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - |S| + 1 \\
&0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in S.
\end{aligned}$$

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_T = y_{I_2} \cdot \prod_{i \in T \setminus I_2} x_i$:

$$\begin{aligned}
&y_T \geq 0 \\
&y_T \leq I_2 \\
&y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \setminus I_2 \\
&y_T \geq \sum_{i \in T \setminus I_2} x_i + y_{I_2} - |T \setminus I_2| \\
&0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in T \setminus I_2.
\end{aligned}$$

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_V = y_{I_2} \cdot \prod_{i \in V \setminus I_2} x_i$:

$$\begin{aligned}
&y_V \geq 0 \\
&y_V \leq I_2 \\
&y_V \leq x_i \quad \forall i \in V \setminus I_2 \\
&y_V \geq \sum_{i \in V \setminus I_2} x_i + y_{I_2} - |V \setminus I_2| \\
&0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus I_2.
\end{aligned}$$

— Inégalités 2-links (S,T) et (T,S) :

$$y_S \leq y_T - \sum_{i \in T'} x_i - y_{I_2} + |T'| + 1$$
$$y_T \leq y_S - \sum_{S \setminus I_1} x_i + |S \setminus I_1|.$$

Posons P le polytope de $\mathbb{R}^{n+4}$ décrit par l'ensemble des inégalités ci-dessus.

Posons P^0 la face de P telle que $y_{I_2} = 0$ et P^1 la face de P telle que $y_{I_2} = 1$. Par la Remarque 1, on sait qu'il s'agit de polytopes. Ainsi :

$$P^0 = \left\{ (x, y_S, y_T, y_V, y_{I_2}) \in \mathbb{R}^{n+4} : \begin{array}{l} y_S \geq 0 \\ y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - |S| + 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in S \\ \\ \sum_{i \in I_2} x_i \leq |I_2| - 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in T' \cup I_2 \cup V \\ y_{I_2} = y_T = y_V = 0 \end{array} \right\}$$

$$P^1 = \left\{ (x, y_S, y_T, y_V, y_{I_2}) \in \mathbb{R}^{n+4} : \begin{array}{l} y_S \geq 0 \\ y_S \leq x_i \quad \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - |S| + 1 \\ y_T \geq 0 \\ y_T \leq 1 \\ y_T \leq x_i \quad \forall i \in T \setminus I_2 \\ y_T \geq \sum_{i \in T \setminus I_2} x_i + 1 - |T \setminus I_2| \\ y_S \leq y_T - \sum_{i \in T'} x_i + |T'| \\ y_T \leq y_S - \sum_{S \setminus I_1} x_i + |S \setminus I_1| \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in (T \setminus I_2) \cup S \\ \\ y_V \geq 0 \\ y_V \leq 1 \\ y_V \leq x_i \quad \forall i \in V \setminus I_2 \\ y_V \geq \sum_{i \in V \setminus I_2} x_i + 1 - |V \setminus I_2| \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in V \setminus I_2 \\ \\ y_{I_2} = 1 \\ x_i = 1 \quad \forall i \in I_2 \end{array} \right\}$$

Remarquons dans un premier temps que P^0 et P^1 sont deux polytopes entiers.

P^0 : P^0 est décrit au moyen de deux systèmes disjoints. L'un décrit la linéarisation standard du monôme S (par le Chapitre 2 on sait qu'il décrit un polyèdre entier) et l'autre n'est constitué que d'une contrainte de cardinalité (à nouveau par la Section 1.2.2 on sait que ce système décrit un polytope entier). Les solutions optimales de tout problème d'optimisation sur P^0 seront des produits cartésiens des solutions optimales des deux problèmes disjoints (solutions que l'on sait entières) ainsi, par le Théorème 9, P^0 est un polytope entier.

P^1 : De la même manière, P^1 est également décrit par deux systèmes disjoints. Le premier décrit les inégalités du polytope P_L^2 associé aux monômes S et $T \backslash I_2$ (dans le Chapitre 3, il a été démontré qu'il s'agit d'un polytope entier) et le deuxième système décrit la linéarisation standard du monôme associé à V. Par le même argument que pour le polytope P^0, P^1 est un polytope entier.

Etant donné que P^0 et P^1 sont entiers, on peut en déduire que $conv(P^0 \cup P^1)$ est entier.

L'objectif est à présent de prouver que $Proj_{(x,y_S,y_T,y_V)}(conv(P^0 \cup P^1)) = P_L^{3C}$.

Pour décrire explicitement $conv(P^0 \cup P^1)$, le Théorème de Balas est appliqué (Théorème 4).

Plusieurs nouvelles variables réelles sont introduites :

- x_i^0 et x_i^1 pour tout $i \in [n]$
- y_S^0 et y_S^1
- y_T^0 et y_T^1
- y_V^0 et y_V^1
- $y_{I_2}^0$ et $y_{I_2}^1$
- z^0 et z^1

et les inégalités introduites par le Théorème de Balas sont les suivantes :

$$\text{- } \sum_{k=0}^{q} x^k = x \ : \ \begin{cases} x_i^0 + x_i^1 = x_i \text{ pour tout } i \in [n] \\ y_S^0 + y_S^1 = y_S \\ y_T^0 + y_T^1 = y_T \\ y_V^0 + y_V^1 = y_V \\ y_{I_2}^0 + y_{I_2}^1 = y_{I_2} \end{cases}$$

$$\text{- } A^k x^k \leq b^k z^k \text{ pour } P^0 \ (k=0) \ : \ \begin{cases} y_S^0 - x_i^0 \leq 0 \cdot z^0 \quad \forall i \in S \\ \sum_{i \in S} x_i^0 - y_S^0 \leq (|S|-1) \cdot z^0 \\ \sum_{i \in I_2} x_i^0 \leq (|I_2|-1) \cdot z^0 \end{cases}$$

$$\text{- } A^k x^k \leq b^k z^k \text{ pour } P^1 \ (k=1) \ : \ \begin{cases} y_S^1 - x_i^1 \leq 0 \cdot z^1 \quad \forall i \in S \\ \sum_{i \in S} x_i^1 - y_S^1 \leq (|S|-1) \cdot z^1 \\ y_T^1 - x_i^1 \leq 0 \cdot z^1 \quad \forall i \in T \setminus I_2 \\ \sum_{i \in T \setminus I_2} x_i^1 - y_T^1 \leq (|T \setminus I_2|-1) \cdot z^1 \\ y_V^1 - x_i^1 \leq 0 \cdot z^1 \quad \forall i \in V \setminus I_2 \\ \sum_{i \in V \setminus I_2} x_i^1 - y_V^1 \leq (|V \setminus I_2|-1) \cdot z^1 \\ y_S^1 - y_T^1 + \sum_{T'} x_i^1 \leq |T'| \cdot z^1 \\ y_T^1 - y_S^1 + \sum_{S \setminus I_1} x_i^1 \leq |S \setminus I_1| \cdot z^1 \end{cases}$$

- $0 \leq x^k \leq d^k z^k$ pour P^0 $(k=0)$: $\begin{cases} x_i^0 \leq 1 \cdot z^0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ x_i^0 \geq 0 \cdot z^0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ y_S^0 \leq 1 \\ y_S^0 \geq 0 \\ y_{I_2}^0 = 0 \cdot z^0 \\ y_T^0 = 0 \cdot z^0 \\ y_V^0 = 0 \cdot z^0 \end{cases}$

- $0 \leq x^k \leq d^k z^k$ pour P^1 $(k=1)$: $\begin{cases} x_i^1 \leq 1 \cdot z^1 \text{ pour tout } i \in S \cup T' \cup (V \setminus I_2) \\ x_i^1 \geq 0 \cdot z^1 \text{ pour tout } i \in\in S \cup T' \cup (V \setminus I_2) \\ y_S^1 \leq 1 \cdot z^1 \\ y_S^1 \geq 0 \cdot z^1 \\ y_T^1 \leq 1 \cdot z^1 \\ y_T^1 \geq 0 \cdot z^1 \\ y_V^1 \leq 1 \cdot z^1 \\ y_V^1 \geq 0 \cdot z^1 \\ y_{I_2}^1 = 1 \cdot z^1 \\ x_i^1 = 1 \cdot z^1 \text{ pour tout } i \in I_2 \end{cases}$

- $\sum_{k=0}^{q} z^k = 1,\ 0 \leq z^k \leq 1 \quad \forall k \in \{0,1\}$: $\begin{cases} z^0 + z^1 = 1 \\ z^0 \leq 1 \\ z^0 \geq 0 \\ z^1 \leq 1 \\ z^1 \geq 0 \end{cases}$

Notons W le polytope défini par l'ensemble des inégalités introduites par le Théorème de Balas. Nous allons décrire l'ensemble des inégalités définissant

$$Proj_{(x, y_S, y_T, y_V, y_{I_2})}(W) = conv(P^0 \cup P^1)$$

en simplifiant certaines inégalités et en utilisant la méthode de projection de Fourier-Motzkin(Section 1.2.2). [2]

Remarquons dans un premier temps que :

— Au vu de $\begin{cases} y_{I_2}^0 = 0 \\ y_T^0 = 0 \\ y_V^0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_{I_2}^0 + y_{I_2}^1 = y_{I_2} \\ y_T^0 + y_T^1 = y_T \\ y_V^0 + y_V^1 = y_V \end{cases}$, on en déduit que : $\begin{cases} y_{I_2}^1 = y_{I_2} \\ y_T^1 = y_T \\ y_V^1 = y_V \end{cases}$

— Étant donné que $y_{I_2}^1 = z^1$, il est direct que $z^1 = y_{I_2}$

— De là, par l'équation $z^0 + z^1 = 1$, on a $z^0 = 1 - y_{I_2}$

— Ensuite, par l'égalité $y_S^0 + y_S^1 = y_S$, posons : $y_S^1 = y_S - y_S^0$

— Finalement, par $\begin{cases} x_i^1 = z^1 \quad \forall i \in I_2 \\ x_i^0 + x_i^1 = x_i \\ z^1 = y_{I_2} \end{cases}$ on obtient : $\begin{cases} x_i^1 = y_{I_2} \quad \forall i \in I_2 \\ x_i^0 = x_i - y_{I_2} \quad \forall i \in I_2 \\ x_i^1 = x_i - x_i^0 \quad \forall i \in S \cup T' \cup (V \setminus I_2) \end{cases}$

2. Les détails des calculs des inégalités introduites par la méthode d'élimination des variables de Fourier-Motzkin ne sont pas repris dans cette démonstration.

Ainsi, on obtient une nouvelle description des inégalités du polytope W :

$$
\begin{aligned}
& y_S^0 - x_i^0 \leq 0 && \forall i \in S \\
& \sum_{i \in S} x_i^0 - y_S^0 \leq (|S| - 1) \cdot (1 - y_{I_2}) && \\
& \sum_{i \in I_2} (x_i - y_{I_2}) \leq (|I_2| - 1) \cdot (1 - y_{I_2}) && \\
& y_S - y_S^0 \leq x_i - x_i^0 && \forall i \in S \\
& \sum_{i \in S} (x_i - x_i^0) - (y_S - y_S^0) \leq (|S| - 1) \cdot y_{I_2} && \\
& y_T \leq x_i - x_i^0 && \forall i \in T \setminus I_2 \\
& \sum_{i \in T \setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_T \leq (|T \setminus I_2| - 1) \cdot y_{I_2} && \\
& y_V \leq x_i - x_i^0 && \forall i \in V \setminus I_2 \\
& \sum_{i \in V \setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_V \leq (|V \setminus I_2| - 1) \cdot y_{I_2} && \\
& (y_S - y_S^0) - y_T + \sum_{T'} (x_i - x_i^0) \leq |T'| \cdot y_{I_2} && \\
& y_T - (y_S - y_S^0) + \sum_{S \setminus I_1} (x_i - x_i^0) \leq |S \setminus I_1| \cdot y_{I_2} && \\
& 0 \leq y_{I_2} \leq 1 && \\
& 0 \leq y_S^0 \leq 1 - y_{I_2} && \\
& 0 \leq x_i^0 \leq 1 - y_{I_2} && \forall i \in S \cup T' \cup (V \setminus I_2) \\
& 0 \leq y_S - y_S^0 \leq y_{I_2} && \\
& 0 \leq y_T \leq y_{I_2} && \\
& 0 \leq y_V \leq y_{I_2} && \\
& 0 \leq x_i - x_i^0 \leq y_{I_2} && \forall i \in S \cup T' \cup (V \setminus I_2)
\end{aligned}
$$

La prochaine étape consiste à éliminer la variable y_S^0 dans la description du polytope W par la méthode de Fourier-Motzkin. Les inégalités (réarrangées pour plus de clarté) impliquant la variable sont :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in S} x_i^0 - (|S|-1)\cdot(1-y_{I_2}) &\le y_S^0 \\
\forall i \in S \quad y_S - x_i + x_i^0 &\le y_S^0 \\
y_S - y_T + \sum_{i\in T'}(x_i - x_i^0) - |T'|\cdot y_{I_2} &\le y_S^0 \\
0 &\le y_S^0 \\
y_S - y_{I_2} &\le y_S^0 \\
& y_S^0 \le x_i^0 \quad \forall i \in S \\
& y_S^0 \le y_S - \sum_{i\in S}(x_i - x_i^0) + (|S|-1)\cdot y_{I_2} \\
& y_S^0 \le y_S - y_T - \sum_{i\in S\setminus I_1}(x_i - x_i^0) + |S\setminus I_1|\cdot y_{I_2} \\
& y_S^0 \le 1 - y_{I_2} \\
& y_S^0 \le y_S
\end{aligned}
$$

En appliquant la méthode de FOURIER-MOTZKIN, les dix nouvelles inégalités suivantes sont introduites (les autres étant redondantes aux inégalités toujours présentes dans la description de W ou peuvent se déduire de ces dernières) :

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i\in S} x_i - |S| - 1 \le y_S \\
& \sum_{i\in I_1} x_i^0 + \sum_{i\in S\setminus I_1} x_i - |S| + 1 + (|I_1|-1)\cdot y_{I_2} \le y_S - y_T \\
& \sum_{i\in S} x_i^0 \le (|S|-1)\cdot(1-y_{I_2}) + y_S \\
& y_S \le x_i \quad \forall i \in S \\
& \sum_{i\in S\cup T'} (x_i - x_i^0) \le (|S\cup T'|-1)\cdot y_{I_2} + y_T \\
& \sum_{i\in T'}(x_i - x_i^0) \le (|T'|-1)\cdot y_{I_2} + y_T + 1 - y_{I_2} - y_S \\
& \sum_{i\in S}(x_i - x_i^0) \le (|S|-1)\cdot y_{I_2} + y_S \\
& \sum_{i\in S\setminus I_1} (x_i - x_i^0) \le |S\setminus I_1|\cdot y_{I_2} - y_T + y_S \\
& 0 \le y_S \\
& y_S \le 1
\end{aligned}
$$

Les inégalités décrivant la projection du polytope W sur l'ensemble des variables restantes (appelons ce nouveau polytope W_1) sont les suivantes :

$$\sum_{i\in S} x_i - |S| - 1 \leq y_S$$
$$\sum_{i\in I_1} x_i^0 + \sum_{i\in S\setminus I_1} x_i - |S| + 1 + (|I_1| - 1)\cdot y_{I_2} \leq y_S - y_T$$
$$\sum_{i\in S} x_i^0 \leq (|S| - 1)\cdot(1 - y_{I_2}) + y_S$$
$$y_S \leq x_i \qquad \forall i \in S$$
$$\sum_{i\in S\cup T'} (x_i - x_i^0) \leq (|S\cup T'| - 1)\cdot y_{I_2} + y_T$$
$$\sum_{i\in T'} (x_i - x_i^0) \leq (|T'| - 1)\cdot y_{I_2} + y_T + 1 - y_{I_2} - y_S$$
$$\sum_{i\in S} (x_i - x_i^0) \leq (|S| - 1)\cdot y_{I_2} + y_S$$
$$\sum_{i\in S\setminus I_1} (x_i - x_i^0) \leq |S\setminus I_1|\cdot y_{I_2} - y_T + y_S$$
$$0 \leq y_S$$
$$y_S \leq 1$$

$$\sum_{i\in I_2} (x_i - y_{I_2}) \leq (|I_2| - 1)\cdot(1 - y_{I_2})$$
$$y_T \leq x_i - x_i^0 \qquad \forall i \in T\setminus I_2$$
$$\sum_{i\in T\setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_T \leq (|T\setminus I_2| - 1)\cdot y_{I_2}$$
$$y_V \leq x_i - x_i^0 \qquad \forall i \in V\setminus I_2$$
$$\sum_{i\in V\setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_V \leq (|V\setminus I_2| - 1)\cdot y_{I_2}$$
$$0 \leq y_{I_2} \leq 1$$
$$0 \leq x_i^0 \leq 1 - y_{I_2} \qquad \forall i \in S\cup T'\cup (V\setminus I_2)$$
$$0 \leq y_T \leq y_{I_2}$$
$$0 \leq y_V \leq y_{I_2}$$
$$0 \leq x_i - x_i^0 \leq y_{I_2} \qquad \forall i \in S\cup T'\cup (V\setminus I_2)$$

L'objectif est à présent d'éliminer les variables x_i^0 pour tout $i \in [n]$ dans l'ensemble d'inégalités décrivant W_1. Remarquons dans un premier temps que les variables x_i^0 telles que $i \in I_2$ ne sont déjà plus présentes dans la description de W_1. Il reste à éliminer les variables pour tout $i \in S \cup T' \cup (V \setminus I_2)$. L'idée est de procéder par groupe d'indices. Dans un premier temps, éliminer les variables x_i^0 telles que $i \in S \setminus I_1$, ensuite celles telles que $i \in I_1$, puis $i \in T'$, et finalement $i \in V \setminus I_2$.

Elimination des variables $x_i^0, i \in S \setminus I_1$ par la méthode de Fourier-Motzkin. Les inégalités impliquant des variables $x_i^0, i \in S \setminus I_1$ dans le description de W_1 sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i \in S} x_i^0 \leq (|S| - 1) \cdot (1 - y_{I_2}) + y_S \\
&\sum_{i \in S \cup T'} (x_i - x_i^0) \leq (|S \cup T'| - 1) \cdot y_{I_2} + y_T \\
&\sum_{i \in S} (x_i - x_i^0) \leq (|S| - 1) \cdot y_{I_2} + y_S \\
&\sum_{i \in S \setminus I_1} (x_i - x_i^0) \leq |S \setminus I_1| \cdot y_{I_2} - y_T + y_S \\
&0 \leq x_i^0 \leq 1 - y_{I_2} && \forall i \in (S \setminus I_1) \\
&0 \leq x_i - x_i^0 \leq y_{I_2} && \forall i \in (S \setminus I_1)
\end{aligned}
$$

Après élimination de toutes les variables $x_i, i \in S \setminus I_1$, les inégalités décrivant la projection du polytope W_1 sur les variables restantes (appelons ce polytope W_2) sont les suivantes :

Les inégalités déduites par Fourier-Motzkin :

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq x_i \leq 1 && \forall i \in S \setminus I_1 \\
& \sum_{i \in S \setminus I_1} x_i \leq y_S - y_T + |S \setminus I_1| \\
\star \quad & \sum_{i \in S} x_i - \sum_{i \in I_1} x_i^0 \leq (|I_1| - 1) y_{I_2} + y_S + |S \setminus I_1| \\
\star \quad & \sum_{i \in S \cup T'} x_i - \sum_{i \in T \setminus I_2} x_i^0 \leq (|T \setminus I_2| - 1) y_{I_2} + y_T + |S \setminus I_1| \\
\star \quad & \sum_{i \in I_1} x_i^0 + \sum_{i \in S \setminus I_1} x_i \leq |S| - 1 - (|I_1| - 1) y_{I_2} + y_S
\end{aligned}
$$

Les inégalités n'impliquant pas de variable $x_i^0, i \in S \setminus I_1$:

$$\sum_{i \in S} x_i - |S| - 1 \leq y_S$$

$$\star \quad \sum_{i \in I_1} x_i^0 + \sum_{i \in S \setminus I_1} x_i - |S| + 1 + (|I_1| - 1) \cdot y_{I_2} \leq y_S - y_T$$

$$y_S \leq x_i \qquad \forall i \in S$$

$$\sum_{i \in T'} (x_i - x_i^0) \leq (|T'| - 1) \cdot y_{I_2} + y_T + 1 - y_{I_2} - y_S$$

$$0 \leq y_S$$

$$y_S \leq 1$$

$$\sum_{i \in I_2} (x_i - y_{I_2}) \leq (|I_2| - 1) \cdot (1 - y_{I_2})$$

$$\star \quad y_T \leq x_i - x_i^0 \qquad \forall i \in T \setminus I_2$$

$$\star \quad \sum_{i \in T \setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_T \leq (|T \setminus I_2| - 1) \cdot y_{I_2}$$

$$y_V \leq x_i - x_i^0 \qquad \forall i \in V \setminus I_2$$

$$\sum_{i \in V \setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_V \leq (|V \setminus I_2| - 1) \cdot y_{I_2}$$

$$0 \leq y_{I_2} \leq 1$$

$$\star \quad 0 \leq x_i^0 \leq 1 - y_{I_2} \qquad \forall i \in (T \cup V) \setminus I_2$$

$$0 \leq y_T \leq y_{I_2}$$

$$0 \leq y_V \leq y_{I_2}$$

$$\star \quad 0 \leq x_i - x_i^0 \leq y_{I_2} \qquad \forall i \in (T \cup V) \setminus I_2$$

Elimination des variables $x_i^0, i \in I_1$ par la méthode de Fourier-Motzkin. Les inégalités impliquant les variables $x_i^0, i \in I_1$ sont celles précédées d'une $\star$ dans la description de W_2. Après élimination de toutes les variables $x_i^0, i \in I_1$, la projection de W_2 sur l'ensemble des variables restantes (appelons ce polytope W_3) est décrite par les inégalités suivantes :

Les inégalités déduites par Fourier-Motzkin :

$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \in I_2$

$y_T \leq x_i \qquad \forall i \in I_2$

$\sum_{i \in S} x_i \leq y_S - y_{I_2} + |S|$

$\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 + y_{I_2} + y_S - y_T$

$\star \quad \sum_{i \in S \cup T'} x_i - \sum_{i \in T'} x_i^0 \leq y_T + (|T'| - 1) y_{I_2} + |S|$

$\star \quad \sum_{i \in T \setminus I_2} x_i - \sum_{i \in T'} x_i^0 \leq y_T + (|T'| - 1) y_{I_2} + |I_1|$

Les inégalités n'impliquant pas de variable $x_i^0, i \in I_1$:

$\sum_{i \in S} x_i - |S| - 1 \leq y_S$

$y_S \leq x_i \qquad \forall i \in S$

$\star \quad \sum_{i \in T'} (x_i - x_i^0) \leq (|T'| - 1) \cdot y_{I_2} + y_T + 1 - y_{I_2} - y_S$

$0 \leq y_S$

$y_S \leq 1$

$\sum_{i \in I_2} (x_i - y_{I_2}) \leq (|I_2| - 1) \cdot (1 - y_{I_2})$

$\star \quad y_T \leq x_i - x_i^0 \qquad \forall i \in T'$

$y_V \leq x_i - x_i^0 \qquad \forall i \in V \setminus I_2$

$\sum_{i \in V \setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_V \leq (|V \setminus I_2| - 1) \cdot y_{I_2}$

$0 \leq y_{I_2} \leq 1$

$\star \quad 0 \leq x_i^0 \leq 1 - y_{I_2} \qquad \forall i \in T' \cup (V \setminus I_2)$

$0 \leq y_T \leq y_{I_2}$

$0 \leq y_V \leq y_{I_2}$

$\star \quad 0 \leq x_i - x_i^0 \leq y_{I_2} \qquad \forall i \in T' \cup (V \setminus I_2)$

$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \in S \setminus I_1$

$\sum_{i \in S \setminus I_1} x_i \leq y_S - y_T + |S \setminus I_1|$

Elimination des variables $x_i^0, i \in T'$ par la méthode de Fourier-Motzkin.
Les inégalités impliquant les variables $x_i^0, i \in T'$ sont celles précédées d'une $\star$ dans la description de W_3. Après élimination de toutes les variables $x_i^0, i \in T'$, la projection de W_3 sur l'ensemble des variables restantes (appelons ce polytope W_4) est décrite par les inégalités suivantes :

Les inégalités déduites par Fourier-Motzkin :

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \in T'$$

$$y_T \leq x_i \qquad \forall i \in T'$$

$$\sum_{i \in T'} x_i \leq y_T - y_{I_2} - y_S + 1 + |T'|$$

$$\sum_{i \in T \setminus I_2} x_i \leq y_T - y_{I_2} + |T \setminus I_2|$$

Les inégalités n'impliquant pas de variable $x_i^0, i \in T'$:

$$\sum_{i \in S} x_i - |S| - 1 \leq y_S$$

$$y_S \leq x_i \qquad \forall i \in S$$

$$0 \leq y_S$$

$$y_S \leq 1$$

$$\sum_{i \in I_2} (x_i - y_{I_2}) \leq (|I_2| - 1) \cdot (1 - y_{I_2})$$

$$\star \quad y_V \leq x_i - x_i^0 \qquad \forall i \in V \setminus I_2$$

$$\star \quad \sum_{i \in V \setminus I_2} (x_i - x_i^0) - y_V \leq (|V \setminus I_2| - 1) \cdot y_{I_2}$$

$$0 \leq y_{I_2} \leq 1$$

$$\star \quad 0 \leq x_i^0 \leq 1 - y_{I_2} \qquad \forall i \in V \setminus I_2$$

$$0 \leq y_T \leq y_{I_2}$$

$$0 \leq y_V \leq y_{I_2}$$

$$\star \quad 0 \leq x_i - x_i^0 \leq y_{I_2} \qquad \forall i \in V \setminus I_2$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \in (S \setminus I_1) \cup I_1$$

$$\sum_{i \in S \setminus I_1} x_i \leq y_S - y_T + |S \setminus I_1|$$

$$y_T \leq x_i \qquad \forall i \in I_2$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq y_S - y_{I_2} + |S|$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 + y_{I_2} + y_S - y_T$$

Elimination des variables $x_i^0, i \in V \setminus I_2$ par la méthode de FOURIER-MOTZKIN.

Les inégalités impliquant les variables $x_i^0, i \in V \setminus I_2$ sont celles précédées d'une $\star$ dans la description de W_4. Après élimination de toutes les variables $x_i^0, i \in V \setminus I_2$, la projection de W_4 sur l'ensemble des variables restantes (appelons ce polytope W_5) est décrite par les inégalités suivantes :

Les inégalités déduites par Fourier-Motzkin :

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \in V \setminus I_2$$

$$y_V \leq x_i \qquad \forall i \in V \setminus I_2$$

$$\sum_{i \in V \setminus I_2} x_i \leq y_V - y_{I_2} + |V \setminus I_2|$$

Les inégalités n'impliquant pas de variable $x_i^0, i \in V \setminus I_2$:

$$\sum_{i \in S} x_i - |S| - 1 \leq y_S$$

$$y_S \leq x_i \qquad \forall i \in S$$

$$0 \leq y_S$$

$$y_S \leq 1$$

$$\sum_{i \in I_2} (x_i - y_{I_2}) \leq (|I_2| - 1) \cdot (1 - y_{I_2})$$

$$0 \leq y_{I_2} \leq 1$$

$$0 \leq y_T \leq y_{I_2}$$

$$0 \leq y_V \leq y_{I_2}$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \in (S \setminus I_1) \cup I_1 \cup T'$$

$$\sum_{i \in S \setminus I_1} x_i \leq y_S - y_T + |S \setminus I_1|$$

$$y_T \leq x_i \qquad \forall i \in I_1 \cup T'$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq y_S - y_{I_2} + |S|$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 + y_{I_2} + y_S - y_T$$

$$\sum_{i \in T'} x_i \leq y_T - y_{I_2} - y_S + 1 + |T'|$$

$$\sum_{i \in T \setminus I_2} x_i \leq y_T - y_{I_2} + |T \setminus I_2|$$

Notons dans un premier temps que l'inégalité

$$\sum_{i \in S} x_i \leq |S| - 1 + y_{I_2} + y_S - y_T$$

peut se déduire des deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in I_2} (x_i - y_{I_2}) \leq (|I_2| - 1) \cdot (1 - y_{I_2}) \Leftrightarrow \sum_{i \in I_2} x_i \leq |I_2| - 1 + y_{I_2} \\
&\sum_{i \in S \setminus I_1} x_i \leq y_S - y_T + |S \setminus I_1|.
\end{aligned}$$

A présent, la projection du polytope W_5 sur les variables restantes, ou, de manière équivalente, la projection du polytope de départ W sur l'ensemble des variables $(x, y_S, y_T, y_V, y_{I_2})$ est la suivante (notons le polytope décrit par ces inégalités W_6) :

$$\begin{array}{cll}
 & \sum_{i \in S} x_i - |S| + 1 \leq y_S & \\
 & y_s \leq x_i & \forall i \in S \\
 & 0 \leq y_S \leq 1 & \\
\star & \sum_{i \in I_2} x_i - |I_2| + 1 \leq y_{I_2} & \\
\star & y_{I_2} \leq x_i & \forall i \in I_2 \\
\star & 0 \leq y_{I_2} \leq 1 & \\
\star & 0 \leq y_T \leq y_{I_2} & \\
\star & 0 \leq y_V \leq y_{I_2} & \\
 & \sum_{i \in S \setminus I_1} x_i \leq y_S - y_T + |S \setminus I_1| & \\
 & y_T \leq x_i & \forall i \in (I_1 \cup T') \\
\star & \sum_{i \in S} x_i \leq y_S - y_{I_2} + |S| & \\
\star & \sum_{i \in T'} x_i \leq y_T - y_S - y_{I_2} + |T'| + 1 & \\
\star & \sum_{i \in T \setminus I_2} x_i \leq y_T - y_{I_2} + |T \setminus I_2| & \\
 & y_V \leq x_i & \forall i \in V \setminus I_2 \\
\star & \sum_{i \in V \setminus I_2} x_i \leq y_V - y_{I_2} + |V \setminus I_2| & \\
 & 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n]
\end{array}$$

La dernière étape est d'éliminer la variable y_{I_2} dans l'ensemble d'inégalités ci-dessus. Pour cela la méthode de Fourier - Motzkin est à nouveau utilisée. Les inégalités impliquant la variable y_{I_2} (précédées d'une $\star$ dans la description de W_6) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_2} x_i - |I_2| + 1 \leq & y_{I_2} \\
y_T \leq & y_{I_2} \\
y_V \leq & y_{I_2} \\
0 \leq & y_{I_2} \\
& y_{I_2} \leq y_S - \sum_{i\in S} x_i + |S| \\
& y_{I_2} \leq y_T - y_S - \sum_{i\in T'} x_i + |T'| + 1 \\
& y_{I_2} \leq y_T - \sum_{i\in T\setminus I_2} x_i + |T \setminus I_2| \\
& y_{I_2} \leq y_T - \sum_{i\in S\cup T'} x_i + |S \cup T'| \\
& y_{I_2} \leq y_V - \sum_{i\in V\setminus I_2} x_i + |V \setminus I_2| \\
& y_{I_2} \leq x_i \quad \forall i \in I_2 \\
& y_{I_2} \leq 1
\end{aligned}$$

Dix nouvelles inégalités sont introduites par la méthode (les autres étant redondantes par rapport à celles déjà présentes dans la description de W_6) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i\in T\setminus I_1} x_i \leq y_T - y_S + |T \setminus I_1| \\
& \sum_{i\in T} x_i \leq y_T + |T| - 1 \\
& \sum_{i\in V} x_i \leq y_V + |V| - 1 \\
& y_T \leq y_V - \sum_{i\in V\setminus I_2} x_i + |V \setminus I_2| \\
& y_T \leq x_i \quad \forall i \in I_2 \\
& y_T \leq 1 \\
& \sum_{i\in T'} x_i \leq y_T - y_S - y_V + |T'| + 1 \\
& y_V \leq y_T - \sum_{i\in T\setminus I_2} x_i + |T \setminus I_2| \\
& y_V \leq x_i \quad \forall i \in I_2 \\
& y_V \leq 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $Proj_{x,y_S,y_T,y_V}(W_6)$ est décrit par l'ensemble d'inégalités suivant ;

Les inégalités non précédées d'une $\star$ dans la description de W_6 :

$$\sum_{i\in S} x_i - |S| + 1 \leq y_S$$

$$y_s \leq x_i \qquad \forall i \in S$$

$$0 \leq y_S \leq 1$$

$$\sum_{i\in S\setminus I_1} x_i \leq y_S - y_T + |S \setminus I_1|$$

$$y_T \leq x_i \qquad \forall i \in T \setminus I_2$$

$$y_V \leq x_i \qquad \forall i \in V \setminus I_2$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad \forall i \in [n]$$

Les nouvelles inégalités introduites par FOURIER-MOTZKIN :

$$\sum_{i\in T\setminus I_1} x_i \leq y_T - y_S + |T \setminus I_1|$$

$$\sum_{i\in T} x_i \leq y_T + |T| - 1$$

$$\sum_{i\in V} x_i \leq y_V + |V| - 1$$

$$y_T \leq y_V - \sum_{i\in V\setminus I_2} x_i + |V \setminus I_2|$$

$$y_T \leq x_i \qquad \forall i \in I_2$$

$$y_T \leq 1$$

$$\sum_{i\in T'} x_i \leq y_T - y_S - y_V + |T'| + 1$$

$$y_V \leq y_T - \sum_{i\in T\setminus I_2} x_i + |T \setminus I_2|$$

$$y_V \leq x_i \qquad \forall i \in I_2$$

En notant que :
- $T \setminus I_1 = T \setminus S$
- $T \setminus I_2 = T \setminus V$
- $V \setminus I_2 = V \setminus T$
- $S \setminus I_1 = S \setminus T$,

on remarque que les inégalités décrivant $Proj_{(x,y_S,y_T,y_V)}(W_6)$ sont exactement celles qui définissent le polytope P_L^{3C}.

$$P_L^{3C} = \left\{ (x, y_S, y_T, y_V) \in [0,1]^{n+3} : \begin{array}{l} y_S \leq x_i \forall i \in S \\ y_S \geq \sum_{i \in S} x_i - (|S| - 1) \\ y_T \leq x_i \forall i \in T \\ y_T \geq \sum_{i \in T} x_i - (|T| - 1) \\ y_V \leq x_i \forall i \in V \\ y_V \geq \sum_{i \in V} x_i - (|V| - 1) \\ \\ y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \\ y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V| \\ y_T \leq y_V - \sum_{i \in V \setminus T} x_i + |V \setminus T| \\ \\ y_T \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1 \end{array} \right\}$$

Ainsi, sachant $conv(P_0 \cup P_1) = Proj_{(x,y_S,y_T,y_V,y_{I_2})}(W) = W_6$ entier, $Proj_{(x,y_S,y_T,y_V)}(W_6)$ est également un polytope entier. Or, on vient de montrer que $Proj_{(x,y_S,y_T,y_V)}(W_6)$ est exactement le polytope P_L^{3C}. Le polytope P_L^{3C} est donc entier également et par le Théorème 8, on a :

$$P_L^{3C} = conv(P_L^{3C} \cap \mathbb{Z}^{n+3})$$

Pour rappel, la première définition donnée de P_L^{3C} est la suivante :

$$P_L^{3C} = P_L \cap \left\{ (x, y_S, y_T, y_V) \in \mathbb{R}^{n+3} : \begin{array}{l} y_S \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus S} x_i + |T \setminus S| \\ y_T \leq y_S - \sum_{i \in S \setminus T} x_i + |S \setminus T| \\ y_V \leq y_T - \sum_{i \in T \setminus V} x_i + |T \setminus V| \\ y_T \leq y_V - \sum_{i \in V \setminus T} x_i + |V \setminus T| \\ \\ y_T \geq \sum_{i \in T \setminus (S \cup V)} x_i + y_S + y_V - |T \setminus (S \cup V)| - 1 \end{array} \right\}$$

On a montré dans le Théorème 13 que l'inégalité maillon associée à (S, T, V) est valide pour P_L^*. Il a été également montré dans le Théorème 11 que les inégalités 2-links sont valides pour P_L^*. Ainsi,

$$conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+3}) = conv(P_L^{3C} \cap \mathbb{Z}^{n+3}).$$

Finalement, au vu de la définition de P_L^* on a :

$$P_L^* = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+3}) = conv(P_L^{3C} \cap \mathbb{Z}^{n+3}) = P_L^{3C},$$

ce qui nous permet de conclure : P_L^* l'enveloppe convexe des solutions binaires du programme linéaire mixte associé à la fonction f est égal au polytope entier P_L^{3C}. $\square$

Chapitre 5

Généralisation

Les démonstrations présentées dans cette section ne sont pas issues d'un ouvrage publié. Il s'agit d'un travail personnel. Certaines preuves reprennent les démarches utilisées dans l'article de CRAMA, RODRIGUEZ-HECK *[6] qui traite une situation particulière du cas présenté ci-dessous.*

5.1 Mise en situation

Plaçons-nous dans un contexte général où $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$, la fonction pseudo-booléenne à optimiser a m monômes non linéaires. Elle peut toujours s'écrire sous la forme suivante [5] :

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i \in [n]} a_i x_i + \sum_{S \in S*} a_S \prod_{i \in S} x_i$$

où

- $S*$ est l'ensemble des sous-ensembles d'indices $S \subseteq 2^{[n]}$ tel que S contient au moins deux éléments et tel que son coefficient a_S est non nul. On notera par la suite $S* = \{S_1, \cdots, S_m\}$, où $m = |S*|$.
- a_i, a_S sont des réels pour tous $i \in [n]$ et $S \in S*$.

Nous pouvons réexprimer cette fonction de la manière suivante :

$$f'(x_1, \cdots, x_n, y_{S_1}, \cdots, y_{S_m}) = \sum_{i \in [n]} a_i \cdot x_i + \sum_{j \in [m]} a_{S_j} \cdot y_{S_j}$$

en ajoutant les contraintes $y_{S_j} = \prod_{i \in S_j} x_i$ pour tous $S_j \in S*$, $j \in [m]$ au problème d'optimisation.

L'ensemble des solutions (associé à la fonction f') est noté X_L et il est décrit par :

$$X_L = \left\{ (x,y) \in \{0,1\}^{n+m} : y_{S_j} = \prod_{i \in S_j} x_i \text{ pour tout } j \in [m] \right\}.$$

Notons son enveloppe convexe P_L^*.

Par le Théorème 10, un problème d'optimisation sur la fonction de départ f peut s'exprimer sous la forme d'un programme linéaire mixte :

$$\mathit{Optimiser} : \sum_{j \in [m]} a_{S_j} \cdot y_{S_j} + \sum_{i \in [n]} a_i x_i$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
y_{S_j} &\leq x_i & \forall i \in S_j \quad \forall j \in [m] \\
y_{S_j} &\geq \sum_{i \in S_j} x_i - (|S_j| - 1) & \forall j \in [m] \\
y_{S_j} &\geq 0 & \forall j \in [m] \\
x_i &\in \{0,1\} & \forall i \in [n]
\end{aligned}$$

Une fois le problème d'optimisation mis sous forme d'un programme linéaire mixte, on peut introduire le polyèdre des solutions de ce dernier. Il s'agit de l'ensemble des points $(x,y) \in [0,1]^{n+m}$ satisfaisant les contraintes ci-dessus, c'est-à-dire :

$$P_L = \left\{ (x,y) \in [0,1]^{n+m} : \begin{array}{l} y_{S_j} \leq x_i \quad \forall i \in S_j \\ y_{S_j} \geq \sum_{i \in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \end{array} \text{ pour tout } j \in [m] \right\}.$$

Hypothèses :

Supposons à partir de maintenant que les m sous-ensembles d'indices $S_1, \cdots, S_m$ sont configurés en "fleur". Plus précisément, $S_i \cap S_j = I$ pour tous $i, j \in [m], i \neq j$ avec $I \neq \emptyset$. Et pour tout $j \in [m]$ il existe $i \in [n]$ tel que $i \in S_j \setminus I$.

Dans le suite de cette section **cette hypothèse sera toujours supposée**.

Dans la suite, 3 points vont être montrés :

1. Les inégalités de la linéarisation standard de chaque monôme décrivent des facettes de l'enveloppe convexe des solutions.
2. Dans le cas où $|I| \geq 2$, les inégalités 2-links (S_k, S_l) et (S_l, S_k) décrivent également des facettes de l'enveloppe convexe des solutions, et ce pour tous $k, l \in [m], k \neq l$.
3. L'enveloppe convexe des solutions peut être décrite à l'aide des inégalités mentionnées dans les points 1 et 2 uniquement.

5.2 Description des facettes de l'enveloppe convexe des solutions

Proposition 5. *Le polyèdre $P_L^* \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ est de dimension maximale.*

Pour rappel,
$$P_L^* = conv(X_L) = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+m}).$$

Démonstration. Soient
- u_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$
- v_{S_j} le $j^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$

Considérons les $n+m+1$ points suivants :
- $(u_i, 0)$ pour tout $i \in [n]$ (n points).
- $(\sum_{i \in S_j} u_i, v_{S_j})$ pour tout j $\in [m]$ (m points).
- $(0,0)$

NB : Les points sont écrits sous la forme (x,y) avec $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_{S_1}, ..., y_{S_m}) \in \mathbb{R}^m$

Nous allons montrer que ces $n+m+1$ points de $\mathbb{R}^{n+m}$ sont tous dans P_L^* et affinement indépendants. Ainsi, nous pourrons conclure sur la dimension de P_L^* qui sera de $n+m+1-1 = n+m$.

1. **Appartenance à P_L^*.** Étant donné que $P_L^* = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+m})$, si on montre qu'ils appartiennent tous à $P_L \cap \mathbb{Z}^{n+m}$, ils appartiendront également à P_L^*.

   Il est évident que les points considérés appartiennent tous à $\mathbb{Z}^{n+m}$ et en particulier $\{0,1\}^{n+m}$. Il reste donc à montrer que chaque point satisfait les inégalités décrivant P_L qui, pour rappel, sont :

$$y_{S_j} \leq x_i \quad \forall i \in S_j, \quad \forall j \in [m]$$
$$y_{S_j} \geq \sum_{i \in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \quad \forall j \in [m].$$

   - Fixons $i_0 \in [n]$ et considérons le point $(u_{i_0}, 0)$,

     $y_{S_j} \leq x_i \quad \forall i \in S_j, \quad \forall j \in [m]$:
     $(u_{i_0}, 0)$ n'a que des composantes égales à zéro, exceptée la $i_0^{\text{ème}}$ qui est égale à 1. On a donc $y_{S_j} = 0$ pour tout $j \in [m]$ et, par conséquent, la première inégalité est directement vérifiée pour tout $i \in S_j$, pour tout $j \in [m]$.

     $y_{S_j} \geq \sum_{i \in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \quad \forall j \in [m]$:
     $\sum_{i \in S_j} x_i$ sera égal à 0 ou 1 (en fonction de si $i_0 \in S_j$ ou non). De plus, étant donné que $I \neq \emptyset$ et que nous avons supposé que chaque monôme avait au

minimum un indice $i \in [n]$ qui lui est propre, on a $|S_j| \geq 2$ pour tout $j \in [m]$. Ainsi, $\sum_{i\in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \leq 0 \quad \forall j \in [m]$. Sachant que $y_{S_j} = 0$ pour tout $j \in [m]$, l'inégalité est toujours satisfaite.

- Fixons $j_0 \in [m]$ et considérons le point $(\sum_{i\in S_{j_0}} u_i, v_{S_{j_0}})$,

  $y_{S_j} \leq x_i \quad \forall i \in S_j, \quad \forall j \in [m]$:
  Pour j_0 l'inégalité est bien vérifiée car parmi les n premières composantes du point considéré, seules les valeurs aux indices appartenant à l'ensemble S_{j_0} ont des composantes égales à 1, ce qui implique $x_i = 1 \ \forall i \in S_{j_0}$ et vu la description du point $y_{S_{j_0}} = 1$ également .
  Pour tout $j \neq j_0$, $y_{S_j} = 0$, ainsi l'inégalité est directement vérifiée, que la variable x_i soit égale à 0 ou 1.

  $y_{S_j} \geq \sum_{i\in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \quad \forall j \in [m]$:
  Pour j_0, $\sum_{i\in S_{j_0}} x_i = |S_{j_0}|$ ce qui implique bien
  $1 = y_{S_{j_0}} \geq \sum_{i\in S_{j_0}} x_i - (|S_{j_0}| - 1) = 1$.
  Pour tout $j \neq j_0$, $\sum_{i\in S_j} x_i = |I|$. En effet, seules les variables x_i $i \in S_j \cap S_{j_0} = I$ seront égales à 1. De plus, étant donnée l'hypothèse posée en début de section affirmant qu'il existe toujours un indice propre à chaque sous-ensemble S_j, on a : $|I| < |S_{j_0}|$. Par conséquent, $\sum_{i\in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \leq 0$ et étant donné que $y_{S_j} = 0$, l'équation considérée est vérifiée.

  Ainsi, le point $(\sum_{i\in S_{j_0}} u_i, v_{S_{j0}})$ vérifie bien les inégalités et ce pour tout $j_0 \in [m]$.

- $(0, 0)$
  Les inégalités sont directement vérifiées.

2. **Indépendance affine**

   N.B : Montrer que les points $v_1, ...v_{n+m+1}$ sont affinement indépendants, est équivalent à montrer que les points $(v_1 - v_{n+m+1}), ..., (v_{n+m} - v_{n+m+1})$ sont linéairement indépendants.
   Nous allons montrer que les points
   — $((u_i, 0) - (0, 0)) \quad \forall i \in [n]$
   — $((\sum_{i\in S_j} u_i, v_{S_j}) - (0, 0)) \quad \forall j \in [m]$
   sont linéairement indépendants. Il s'agit de $n + m$ points de dimension $n + m$; il est donc possible de calculer le déterminant de la matrice formée par les coefficients de ces points.
   Les n premières lignes de la matrice correspondent à la description des n points $(u_i, 0)$ pour tout $i \in [n]$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la $i^{\text{ème}}$ ligne est décrite par le point$(u_i, 0)$. Les coefficients sont égaux à zéro sur toute la ligne, excepté pour l'élément $a_{i,i} = 1$.

Les m lignes suivantes de la matrice décriront les points $(\sum_{i\in S_j} u_i, v_{S_j})$ pour tout $j \in [m]$. A nouveau, on peut poser que la $n+j^{\text{ème}}$ ligne décrira le point $(\sum_{i\in S_j} u_i, v_{S_j})$. Pour la $n+1^{\text{ème}}$ ligne (point $(\sum_{i\in S_1} u_i, v_{S_1})$) par exemple, les n premiers coefficients ne sont pas connus explicitement mais, l'élément $a_{n+1,n+1}$ vaut 1 et $a_{n+1,n+k} = 0$ pour tout $k \in \{2, ..., m\}$. De la même manière, pour la $n+j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice (point $(\sum_{i\in S_j} u_i, v_{S_j})$), les éléments des n premières colonnes ne sont pas explicitement connus, mais on aura $a_{n+j,n+j} = 1$ et $a_{n+j,n+k} = 0$ pour tout $k \in [m], k \neq j$ et ce pour tout $j \in [m]$.
Au final, la matrice formée est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.
Son déterminant sera donc égal à 1, ce qui suffit pour prouver que les $n+m$ points sont linéairement indépendants et, par conséquent, P_L^* est de dimension $n+m$ (dimension maximale).

□

5.2.1 Inégalités de la linéarisation standard

Proposition 6. *Les inégalités de la linéarisation standard des monômes associés aux sous-ensembles d'indices $S_1, ..., S_m$ définissent des facettes de l'enveloppe convexe des points satisfaisant les contraintes de la linéarisation standard de la fonction considérée (c'est-à-dire, de P_L^* associé à la fonction f).*
Plus particulièrement, les inégalités suivantes définissent chacune une facette de P_L^* et ce pour tout $j \in [m]$.

$$\begin{aligned} y_{S_j} &\leq x_i \quad \forall i \in S_j \\ y_{S_j} &\geq \sum_{i\in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \\ y_{S_j} &\geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Soient
— u_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$
— v_{S_j} le $j^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$
Dans la suite, les points considérés sont écrits sous la forme (x, y) avec $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_{S_1}, ..., y_{S_m}) \in \mathbb{R}^m$.

Sans perte de généralité, intéressons-nous aux inégalités de la linéarisation standard de S_1.

Par le Théorème 10, il est connu que les inégalités de la linéarisation standard sont valides pour P_L^*. Ainsi, on peut supposer qu'elles décrivent chacune une face de ce dernier, on va montrer plus particulièrement qu'elles décrivent des facettes.

Pour cela, le Théorème 2 va être utilisé. On va montrer que l'hyperplan dans lequel la face est incluse est défini (à une constante multiplicative près) par l'égalité décrivant la face. Par la proposition précédente qui prouve que P_L^* est de dimension maximale et par le théorème cité ci-dessus, on pourra conclure que la face est bien une facette.

$\underline{y_{S_1} \leq x_i \text{ définit une facette de } P_L^* \text{ pour tout } i \text{ appartenant à } S_1.}$

Fixons $l \in S_1$, et soit F une face de P_L^* décrite par

$$F = \{(x, y) \in P_L^* : y_{S_1} = x_l\}.$$

Supposons que F est incluse dans un hyperplan

$$b(x, y) = b_0$$

où

$$b(x, y) = \sum_{i \in [n]} b_i x_i + \sum_{j \in [m]} b_{S_j} y_{S_j}$$

et nous allons prouver que cet hyperplan est de la forme (à une constante multiplicative près)

$$y_{S_1} = x_l.$$

Notons que les points considérés dans cette démonstration appartiennent tous à P_L^*, c'est-à-dire qu'ils satisfont les inégalités de la linéarisation standard. Ainsi, quand nous vérifierons que le point considéré appartient bien à la face F, on supposera déjà connu qu'il appartient à P_L^*.

1. Soit $(x, y)_1 = (0, 0)$.
   Il est clair que $(x, y)_1$ appartient à F car $y_{S_1} = 0 = x_l$. En supposant que $(x, y)_1$ satisfait l'équation de l'hyperplan contenant F, on obtient $\boxed{b_0 = 0}$.
2. Soient $k \in [n], k \neq l$ fixé et $(x, y)_2 = (u_k, 0)$.
   A nouveau, il est direct que le point $(x, y)_2$ appartient bien à F ($y_{S_1} = 0 = x_l$) et en supposant qu'il satisfait l'équation de l'hyperplan, on a :

$$\begin{aligned} & b((x, y)_2) = b_0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i \in [n], i \neq k} b_i \cdot 0 + b_k \cdot 1 + \sum_{j \in [m]} b_{S_j} \cdot 0 = b_0 \\ \Leftrightarrow & b_k = b_0 \\ \text{Vu le point 1. } \Leftrightarrow & b_k = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{b_k = 0 \text{ et ce pour tout } k \in [n], k \neq l}$.

3. Soit $(x,y)_3 = (\sum_{i\in S_1} u_i, v_{S_1})$.
   Le point $(x,y)_3$ appartient bien à F car $y_{S_1} = 1$ et, étant donné que $l \in S_1$, on a bien $x_l = 1$ vu la définition du point.
   Ensuite, en supposant que le point satisfait l'équation de l'hyperplan, on a

$$\begin{aligned}
&b((x,y)_3) = b_0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i\in[n], i\notin S_1} b_i \cdot 0 + \sum_{i\in S_1} b_i \cdot 1 + \sum_{j\in[m], j\neq 1} b_{S_j} \cdot 0 + b_{S_1} \cdot 1 = b_0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i\in S_1} b_i + b_{S_1} = b_0
\end{aligned}$$

   Vu les points 1. et 2. $\Leftrightarrow b_l + b_{S_1} = 0$.

   Ainsi, $\boxed{b_{S_1} = -b_l}$.
4. Soit $h \in [m], h \neq 1$ fixé et $(x,y)_4 = (\sum_{i\in S_1\cup S_h} u_i, v_1 + v_h)$.
   A nouveau, le point $(x,y)_4$ appartient bien à F car $y_{S_1} = 1$ et, étant donné que $l \in S_1 \cup S_h$, on a bien $x_l = 1$ vu la définition du point.
   En supposant que le point satisfait l'équation de l'hyperplan, on a

$$\begin{aligned}
&b((x,y)_4) = b_0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i\in S_1\cup S_k} b_i + b_{S_1} + b_{S_h} = b_0 \\
\text{Par les trois points précédents } \Leftrightarrow &b_l - b_l + b_{S_h} = 0 \\
\Leftrightarrow &b_{S_h} = 0.
\end{aligned}$$

   Et ce pour tout $h \in [m], h \neq 1$. Ainsi $\boxed{b_{S_h} = 0 \text{ pour tout } h \in [m], h \neq 1}$.

Grâce à toutes ces observations, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in[n]} b_i x_i + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j} = b_0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i\in[n]} b_i x_i + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j} = 0 \quad \text{(Par la première observation)} \\
\Leftrightarrow &\, b_l x_l + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j} = 0 \quad \text{(Par la deuxième observation)} \\
\Leftrightarrow &\, b_l \cdot x_l - b_l \cdot y_{S_1} = 0 \quad \text{(Par les troisème et quatrième observations)} \\
\Leftrightarrow &\, b_l \cdot (\quad y_{S_1} \quad) = b_l \cdot (x_l)
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, car l'hyperplan contenant F est unique à une constante près : b_l. Ainsi, étant donné que P_L^* est de dimension maximale, F est une facette et elle est définie par l'égalité $y_S = x_l$.

$\underline{y_{S_1} \geq \sum_{i\in S_1} x_i - (|S_1|-1) \text{ définit une facette de } P_L^*.}$

Soit F une face de P_L^* décrite par

$$F = \{(x,y) \in P_L^* : y_{S_1} = \sum_{i\in S_1} x_i - (|S_1|-1)\}.$$

Supposons que F est incluse dans un hyperplan

$$b(x,y) = b_0$$

où

$$b(x,y) = \sum_{i\in[n]} b_i x_i + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j}$$

et nous allons prouver que cet hyperplan est de la forme (à une constante multiplicative près)

$$y_{S_1} = \sum_{i\in S_1} x_i - (|S_1|-1).$$

1. Soit $(x,y)_1 = (\sum_{i\in S_1} u_i, v_1)$.
   $(x,y)_1$ appartient bien à F étant donné que $y_{S_1} = 1$ et
   $\sum_{i\in S_1} x_i - (|S_1|-1) = |S_1| - (|S_1|-1) = 1$.
   Supposons à présent que $(x,y)_1$ satisfait l'équation de l'hyperplan :
   $$\begin{aligned} & b((x,y)_1) = b_0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i\in S_1} b_i \cdot 1 + b_{S_1} \cdot 1 = b_0. \end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{\sum_{i\in S_1} b_i + b_{S_1} = b_0}$
2. Soit $k \in S_1$ fixé et $(x,y)_2 = (\sum_{i\in S_1, i\neq k} u_i, 0)$.
   $(x,y)_2$ est bien un point de F car $y_S = 0$ et
   $\sum_{i\in S_1} x_i - (|S_1|-1) = |S_1| - 1 - (|S_1|-1) = 0$.
   Supposons à présent que $(x,y)_2$ satisfait l'équation de l'hyperplan :
   $$\begin{aligned} & b((x,y)_2) = b_0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i\in S_1, i\neq k} b_i = b_0 \\ \text{Vu le point 1 } \Leftrightarrow & b_k + b_{S_1=0} \end{aligned}$$
   Et ce pour tout $k \in S_1$. Ainsi : $\boxed{b_k = -b_{S_1} \text{ pour tout } k \in S_1}$ et, à partir des points 1 et 2, nous pouvons également déduire $\boxed{b_0 = (1-|S_1|) \cdot b_{S_1}}$.

3. Soient $h \in [m], h \neq 1$ fixé, $k \in S_h \setminus S_1$ fixé, $j \in I$ fixé et soit le point $(x,y)_3 = (u_k + \sum_{i \in S, i \neq j} u_i, 0)$.
$(x,y)_3$ appartient à F, en effet $y_{S_1} = 0$ et $\sum_{i \in S_1} x_i - (|S_1| - 1) = |S_1| - 1 - (|S_1| - 1) = 0$, l'équation définissant F est donc bien vérifiée.
Ensuite, supposons que $(x,y)_3$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned} & b((x,y)_3) = b_0 \\ & \Leftrightarrow b_k + \sum_{i \in S_1, i \neq j} b_i = b_0 \\ \text{Vu les déductions du point 2.} & \Leftrightarrow b_k - \sum_{i \in S_1, i \neq j} b_{S_1} = (1 - |S_1|) \cdot b_{S_1} \\ & \Leftrightarrow b_k - (|S_1| - 1) \cdot b_{S_1} = (1 - |S_1|) \cdot b_{S_1} \\ & \Leftrightarrow b_k = 0 \end{aligned}$$

Et ce, pour tout $k \in S_h \setminus S_1$, pour tout $h \in [m], h \neq 1$.
Ainsi : $\boxed{\text{Pour tout } h \in [m], h \neq 1 : b_k = 0 \text{ pour tout } k \in S_h \setminus S_1}$.

4. Soit $h \in [m], h \neq 1$ fixé et soit le point $(x,y)_4 = (\sum_{i \in S_1 \cup S_h} u_i, v_1 + v_h)$.
$(x,y)_4$ appartient à F, en effet, $y_{S_1} = 1$ et $\sum_{i \in S_1} x_i - (|S_1| - 1) = |S_1| - (|S_1| - 1) = 1$, l'équation définissant F est donc bien vérifiée.
Ensuite, supposons que $(x,y)_4$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned} & b((x,y)_4) = b_0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_1 \cup S_h} b_i + b_{S_1} + b_{S_h} = b_0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_1} b_i + \sum_{i \in S_h \setminus S_1} b_i + b_{S_1} + b_{S_h} = b_0 \\ \text{Vu les deuxième et troisème points} & \Leftrightarrow \ -(|S_1|) \cdot b_{S_1} + 0 + b_{S_1} + b_{S_h} = (1 - |S_1|) \cdot b_{S_1} \\ & \Leftrightarrow b_{S_h} = 0 \end{aligned}$$

Et ce, pour tout $h \in [m], h \neq 1$.
Ainsi $\boxed{b_{S_h} = 0 \text{ pour tout } h \in [m], h \neq 1}$.

Grâce à toutes ces observations, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in [n]} b_i x_i + \sum_{j \in [m]} b_{S_j} y_{S_j} = b_0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i \in S_1} -b_{S_1} x_i + b_{S_1} y_{S_1} = (1 - |S_1|) \cdot b_{S_1} \\ \Leftrightarrow & \ b_{S_1} \cdot (-\sum_{i \in S_1} x_i + y_{S_1}) = b_{S_1} \cdot (1 - |S_1|) \\ \Leftrightarrow & \ b_{S_1} \cdot (\ y_{S_1}\ ) = b_{S_1} \cdot (\sum_{i \in S_1} x_i - (|S_1| - 1)) \end{aligned}$$

ce qui permet à nouveau de conclure, car l'hyperplan contenant F est unique à une constante près : b_{S_1}. Ainsi, étant donné que P_L^* est de dimension maximale, F est une facette définie par $y_{S_1} = \sum_{i\in S_1} x_i - (|S_1| - 1)$.

$\underline{y_{S_1} \geq 0 \text{ définit une facette de } P_L^*.}$

Soit F une face de P_L^* décrite par

$$F = \{(x, y) \in P_L^* : y_{S_1} = 0\}$$

Supposons que F est incluse dans un hyperplan

$$b(x, y) = b_0$$

où

$$b(x, y) = \sum_{i\in[n]} b_i x_i + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j}$$

et on va prouver que cet hyperplan est de la forme (à une constante multiplicative près)

$$y_{S_1} = 0$$

1. Soit $(x, y)_1 = (0, 0)$.
   Il est direct que le point $(x, y)_1$ appartient à F étant donné que $y_{S_1} = 0$. En supposant qu'il satisfait l'équation de l'hyperplan contenant F, on obtient $\boxed{b_0 = 0}$
2. Soit $k \in [n]$ fixé et $(x, y)_2 = (u_k, 0)$.
   $(x, y)_2$ appartient à F étant donné que $y_{S_1} = 0$. En supposant qu'il satisfait l'équation de l'hyperplan et, au vu du point 1, on obtient $b_k = 0$ pour tout $k \in [n]$.
   Retenons de ce deuxième point : $\boxed{b_k = 0 \text{ pour tout } k \in [n]}$.
3. Soit $h \in [m], h \neq 1$ fixé, $(x, y)_3 = (\sum_{i\in S_h} u_i, v_h)$.
   Par le même argument $(x, y)_3$ appartient à F et en supposant qu'il satisfait l'équation de l'hyperplan on obtient $\boxed{b_{S_h} = 0 \text{ et ce pour tout } h \in [m], h \neq 1}$

Au final, par ces trois observations, on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in[n]} b_i x_i + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j} = b_0 \\ \Leftrightarrow\ & b_{S_1} \cdot y_{S_1} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & b_{S_1} \cdot (\ y_{S_1}\ ) = b_{S_1} \cdot (0) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, car l'hyperplan contenant F est unique à une constante près : b_{S_1}. Ainsi, étant donné que P_L^* est de dimension maximale, F est une facette définie par $y_{S_1} = 0$.

Pour les inégalités concernant les sous-ensembles d'indices $S_2, ..., S_m$, la procédure est exactement la même que celle utilisée pour les trois premières inégalités concernant le sous-ensemble S_1. $\square$

5.2.2 Inégalités 2-links

Proposition 7. *Pour tous k, l tels que $k \neq l$ et $|S_k \cap S_l| \geq 2$, l'inégalité 2-links (S_k, S_l), définit une facette de l'enveloppe convexe des points entiers satisfaisant les contraintes de la linéarisation standard de la fonction f. En particulier, il s'agit de l'inégalité suivante :*

$$y_{S_k} \leq y_{S_l} - \sum_{i \in S_l \setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k|.$$

Remarque 15. L'inégalité 2-links (S_l, S_k) définira également une facette. Dans les conditions décrites en début de section, on aura toujours les inégalités 2-links qui décriront des facettes par "paire", c'est-à-dire si l'inégalité 2-links (S_k, S_l) définit une facette, alors l'inégalité 2-links (S_l, S_k) également.

Démonstration. Fixons k et $l \in [m]$, $k \neq l$ et tels que $|S_k \cap S_l| \geq 2$.

Soient

— u_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$

— v_{S_j} le $j^{\text{ème}}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$

Les points considérés dans la suite sont écrits sous la forme (x, y) avec $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_{S_1}, ..., y_{S_m}) \in \mathbb{R}^m$.

Étant donné que l'on a prouvé dans le Chapitre 1 que les inégalités 2-links, sont valides pour P_L^*, posons F une face du polyèdre P_L^* définie par l'inégalité

$$y_{S_k} \leq y_{S_l} - \sum_{i \in S_l \setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k|$$

c'est-à-dire

$$F = \left\{ (x, y) \in P_L^* : y_{S_k} = y_{S_l} - \sum_{i \in S_l \setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| \right\}.$$

Comme dans la proposition précédente, le but est de montrer que F est une facette.

Supposons que F est incluse dans un hyperplan

$$b(x, y) = b_0$$

où

$$b(x, y) = \sum_{i \in [n]} b_i x_i + \sum_{j \in [m]} b_{S_j} y_{S_j}$$

et on va prouver que cet hyperplan est de la forme (à une constante multiplicative près)

$$y_{S_k} = y_{S_l} - \sum_{i \in S_l \setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k|.$$

Comme dans la proposition précédente, notons que tous les points considérés dans cette démonstration appartiennent à P_L^*, c'est-à-dire qu'ils satisfont les inégalités de la linéarisation standard. Ainsi, quand nous vérifierons que le point considéré appartient bien à la face F, on supposera déjà connu qu'il appartient à P_L^*.

1. Soit le point $(x,y)_1 = (\sum_{i\in S_l\setminus S_k} u_i, 0)$.
   Premièrement, $(x,y)_1$ appartient à F. En effet, vu sa définition $y_{S_k} = 0$ et $y_{S_l} - \sum_{i\in S_l\setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| = 0 - |S_l \setminus S_k| + |S_l \setminus S_k| = 0$. L'égalité décrivant F est donc bien vérifiée.
   Supposons à présent que $(x,y)_1$ satisfait l'équation
   $$\begin{aligned} b((x,y)_1) &= b_0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_i &= b_0. \end{aligned}$$
   Retenons de ce premier point : $\boxed{\sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_i = b_0}$
2. Soit $h \in S_k$ fixé et soit le point $(x,y)_2 = (\sum_{i\in S_l\setminus S_k} u_i + u_h, 0)$.
   De la même manière que $(x,y)_1$, le point $(x,y)_2$ appartient à F car $y_{S_k} = 0$ et $y_{S_l} - \sum_{i\in S_l\setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| = 0 - |S_l \setminus S_k| + |S_l \setminus S_k| = 0$.
   Supposons que $(x,y)_2$ satisfait l'équation
   $$\begin{aligned} b((x,y)_2) &= b_0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_i \cdot 1 + b_h \cdot 1 &= b_0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_i + b_h &= b_0 \\ \text{Au vu du point 1} \Leftrightarrow b_h &= 0 \end{aligned}$$
   Et ce pour tout $h \in S_k$. Ainsi : $\boxed{b_h = 0 \text{ pour tout } h \in S_k}$
3. Si $m \geq 3$, soient $g \in [m], g \neq l, g \neq k$ fixé et $h \in S_g \setminus S_l \cup S_k$ fixé et considérons le point $(x,y)_3 = (\sum_{i\in S_l\setminus S_k} u_i + u_h, 0)$.
   Le point $(x,y)_3$ appartient à F car $y_{S_k} = 0$ et
   $y_{S_l} - \sum_{i\in S_l\setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| = 0 - |S_l \setminus S_k| + |S_l \setminus S_k| = 0$.
   Supposons que $(x,y)_3$ satisfait l'équation
   $$\begin{aligned} b((x,y)_3) &= b_0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_i \cdot 1 + b_h \cdot 1 &= b_0 \\ \text{Au vu du point 1} \Leftrightarrow b_h &= 0 \end{aligned}$$
   et ce pour tout $h \in S_g$. Ainsi : $\boxed{\text{Pour tout } g \in [m], g \neq l, g \neq k,\ b_h = 0 \text{ pour tout } h \in S_g}$

4. Soient $h \in S_l \setminus S_k$ fixé et $(x,y)_4 = (\sum_{i \in S_l \cup S_k, i \neq h} u_i, v_k)$.
   Le point $(x,y)_4$ appartient à F car $y_{S_k} = 1$ dans ce cas-ci, et

$$y_{S_l} - \sum_{i \in S_l \setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| = 0 - (|S_l \setminus S_k| - 1) + |S_l \setminus S_k| = 1.$$

   L'équation décrivant F est donc bien vérifiée.
   Supposons ensuite que $(x,y)_4$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned} & b((x,y)_4) = b_0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_l \cup S_k, i \neq h} b_i \cdot 1 + b_{S_k} \cdot 1 = b_0 \\ \text{Vu le point 2. } & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_l \setminus S_k, i \neq h} b_i \cdot 1 + b_{S_k} \cdot 1 = b_0 \\ \text{Vu le point 1. } & \Leftrightarrow b_h = b_{S_k} \end{aligned}$$

   Et ce pour tout $h \in S_l \setminus S_k$. Ainsi : $\boxed{b_h = b_{S_k} \text{ pour tout } h \in S_l \setminus S_k}$

5. Soit le point $(x,y)_5 = (\sum_{i \in S_l \cup S_k} u_i, v_l + v_k)$.
   Le point appartient à F car $y_{S_k} = 1$ et
   $y_{S_l} - \sum_{i \in S_l \setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| = 1 - |S_l \setminus S_k| + |S_l \setminus S_k| = 1$.
   Supposons ensuite que $(x,y)_5$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned} & b((x,y)_5) = b_0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_l \cup S_k} b_i \cdot 1 + b_{S_k} \cdot 1 + b_{S_l} \cdot 1 = b_0 \\ \text{Vu le point 2. } & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_l \setminus S_k} b_i \cdot 1 + b_{S_k} \cdot 1 + b_{S_l} \cdot 1 = b_0 \\ \text{Vu le point 1. } & \Leftrightarrow b_{S_k} + b_{S_l} = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi : $\boxed{b_{S_l} = -b_{S_k}}$

6. Si $m \geq 3$, soit $g \in [m], g \neq l, g \neq k$ fixé et soit le point $(x,y)_6 = (\sum_{i \in S_g \cup (S_l \setminus S_k)} u_i, v_g)$.
   Le point appartient à F car $y_{S_k} = 0$ et
   $y_{S_l} - \sum_{i \in S_l \setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| = 0 - |S_l \setminus S_k| + |S_l \setminus S_k| = 0$.
   Supposons à présent que le point $(x,y)_6$ satisfait l'équation de l'hyperplan, on a :

$$\begin{aligned} & b((x,y)_6) = b_0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_g \setminus (S_l \setminus S_k)} b_i \cdot 1 + \sum_{i \in S_l \setminus S_k} b_i \cdot 1 + b_{S_g} \cdot 1 = b_0 \\ \text{Vu le point 1. } & \Leftrightarrow \sum_{i \in S_g \setminus (S_l \setminus S_k)} b_i + b_{S_g} = 0 \\ \text{Vu le point 3. } & \Leftrightarrow b_{S_g} = 0 \end{aligned}$$

Et ce pour tout $g \in [m], g \neq l, g \neq k$. Ainsi $\boxed{b_{S_g} = 0 \text{ pour tout } g \in [m], g \neq l, g \neq k}$

Grâce à toutes ces observations, on obtient :

$$\sum_{i\in[n]} b_i x_i + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j} = b_0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_i x_i + \sum_{j\in[m]} b_{S_j} y_{S_j} = \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_i \quad \text{(Par les 1ère, 2ème et 3ème observations)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_{S_k} x_i + b_{S_k} y_{S_k} - b_{S_k} y_{S_l} = \sum_{i\in S_l\setminus S_k} b_{S_k} \quad \text{(Par les 4ème, 5ème et 6ème observations)}$$

$$\Leftrightarrow b_{S_k} \cdot \left(\sum_{i\in S_l\setminus S_k} x_i + y_{S_k} - y_{S_l} \right) = b_{S_k} \cdot (|S_l \setminus S_k|)$$

$$\Leftrightarrow b_{S_k} \cdot (\quad y_{S_k} \quad) = b_{S_k} \cdot \left(\quad y_{S_l} - \sum_{i\in S_l\setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k| \quad \right)$$

ce qui permet de conclure, car l'hyperplan contenant F est unique à une constante près : b_{S_k}. Ainsi, étant donné que P_L^* est de dimension maximale, par le Théorème 2, F est une facette définie par $y_{S_k} \leq y_{S_l} - \sum_{i\in S_l\setminus S_k} x_i + |S_l \setminus S_k|$.

□

5.3 Description de l'enveloppe convexe des solutions

Posons

$$P_L^2 = \left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}) \in [0,1]^{n+m} : \begin{array}{l} \text{pour tout j} \in [m], \\ y_{S_j} \leq x_i \forall i \in S_j \\ y_{S_j} \geq \sum_{i\in S_j} x_i - (|S_j| - 1) \\ y_{S_j} \leq y_{S_l} - \sum_{i\in\setminus S_j} x_i + |S_l \setminus S_j| \text{ pour tout l} \in [m], l \neq j \end{array} \right\}$$

et montrons que P_L^2 décrit entièrement l'enveloppe convexe des solutions du problème d'optimisation associé à la fonction considérée. [1]

Remarque 16. Comme déjà mentionné dans le Chapitre 3, le cas de deux monômes non emboîtés est couvert par ce cas à m monômes.

1. L'énoncé exact du théorème se trouve après la démonstration.

Démonstration. Le schéma de la preuve va être proche de celui utilisé dans la démonstration à deux monômes.

Considérons les ensembles d'inégalités suivants :

— Inégalités de la linéarisation standard de $y_I = \prod_{i\in I} x_i$:

$$\begin{aligned} & y_I \leq x_i \quad \forall i \in I \\ & y_I \geq \sum_{i\in I} x_i - |I| + 1 \qquad\qquad y_I \geq 0 \end{aligned}$$

— Pour tout $j \in [m]$, les inégalités de la linéarisation standard de $y_{S_j} = y_I \cdot \prod_{i\in S_j\setminus I} x_i$:

$$\begin{aligned} & y_{S_j} \leq y_I \\ & y_{S_j} \leq x_i \quad \forall i \in S_j \setminus I \\ & y_{S_j} \geq \sum_{i\in S_j\setminus I} x_i + y_I - |S_j \setminus I| \\ & y_{S_j} \geq 0 \end{aligned}$$

Posons P un polytope de $\mathbb{R}^{n+m+1}$, tel que :

$$P = \left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}, y_I) \in \mathbb{R}^{n+m+1} : \begin{array}{lll} y_I & \leq x_i & \forall i \in I \\ y_I & \geq \sum_{i\in I} x_i - |I| + 1 & \\ y_{S_j} & \leq y_I & \forall j \in [m] \\ y_{S_j} & \leq x_i & \forall i \in (S_j \setminus I), \forall j \in [m] \\ y_{S_j} & \geq \sum_{i\in S_j\setminus I} x_i + y_I - |S_j \setminus I| & \forall j \in [m] \\ 0 & \leq y_{S_j} \leq 1 & \forall j \in [m] \\ 0 & \leq y_I \leq 1 & \\ 0 & \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \end{array} \right\}$$

Posons P^0 la face de P, telle que $y_I = 0$ et P^1 la face de P, telle que $y_I = 1$. Par la Remarque 1, P^0 et P^1 sont des polytopes.

Ainsi, P_0 est le polytope décrit par l'ensemble d'inégalités suivant :

$$P^0 = \left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}, y_I) \in \mathbb{R}^{n+m+1} : \begin{array}{ll} \sum_{i\in I} x_i \leq |I| - 1 & \\ 0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n] \\ y_I = 0 & \\ y_{S_j} = 0 & \forall j \in [m] \end{array} \right\}$$

Il s'agit d'un polytope entier. En effet, en plus des contraintes $0 \leq x_i \leq 1$ pour tout i appartenant à $\cup_{j\in[m]} S_j$ et $y_I = y_{S_1} = ... = y_{S_m} = 0$, l'unique autre contrainte est une contrainte de cardinalité. Par la Sous-section 1.2.2, on sait que la solution optimale de tout problème d'optimisation sur ce polytope est entière, et par le Théorème 9, on peut conclure que P^0 est entier.

Le polytope P_1 est quant à lui décrit par :

$$P^1 = \left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}, y_I) \in \mathbb{R}^{n+m+1} : \begin{array}{lll} y_I & = 1 & \\ x_i & = 1 & \forall i \in I \\ & & \\ y_{S_j} & \leq x_i & \forall i \in S_j \quad \forall j \in [m] \\ y_{S_j} & \geq \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i - |S \setminus I| + 1 & \forall j \in [m] \\ 0 & \leq y_{S_j} \leq 1 & \forall j \in [m] \\ 0 & \leq x_i \leq 1 & \forall i \in \cup_{j \in [m]} (S_j \setminus I) \end{array} \right\}$$

La description du polytope P^1 se fait au moyen de m sous-ensembles d'inégalités disjoints l'un de l'autre (chacun décrivant la linéarisation standard de $S_j \setminus I$). Étant donné qu'ils décrivent chacun respectivement la linéarisation standard d'un monôme, on sait que pour tout problème d'optimisation, leur solution optimale respective sera entière. Ainsi, pour des problèmes d'optimisation linéaires sur le polytope P^1, les solutions optimales sont les produits cartésiens de l'ensemble des solutions des m problèmes disjoints. Il s'agira toujours de solutions entières. On peut conclure, par le Théorème 9, que le polytope P^1 est également entier.

Étant donné que P^0 et P^1 sont entiers, on peut en déduire que $conv(P^0 \cup P^1)$ est entier. L'objectif est à présent de prouver que $conv(P^0 \cup P^1) = P$.

Afin de décrire $conv(P_0 \cup P_1)$, le Théorème de Balas va être utilisé.
Soient les nouvelles variables réelles introduites par le théorème :
— x_i^0 et x_i^1 pour tout $i \in [n]$
— $y_{S_j}^0$ et $y_{S_j}^1$ pour tout $j \in [m]$
— y_I^0 et y_I^1
— z^0 et z^1

Les inégalités introduites par le théorème sont les suivantes :
— $\sum_{k=0}^{q} x^k = x : \begin{cases} x_i^0 + x_i^1 = x_i \text{ pour tout } i \in [n] \\ y_{S_j}^0 + y_{S_j}^1 = y_{S_j} \text{ pour tout } j \in [m] \\ y_I^0 + y_I^1 = y_I \end{cases}$
— $A^k x^k \leq b^k z^k$ pour P^0 $(k = 0)$: $\{ \sum_{i \in I} x_i^0 \leq (|I| - 1) \cdot z^0$
— $A^k x^k \leq b^k z^k$ pour P^1 $(k = 1)$: $\begin{cases} \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i^1 - y_{S_j}^1 \leq (|S_j \setminus I| - 1) \cdot z^1 \text{ pour tout } j \in [m] \\ y_{S_j}^1 \leq x_i^1 \text{ pour tout } i \in S_j \setminus I, \text{ pour tout } j \in [m] \end{cases}$
— $0 \leq x^k \leq d^k z^k$ pour P^0 $(k = 0)$: $\begin{cases} x_i^0 \leq 1 \cdot z^0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ x_i^0 \geq 0 \cdot z^0 \text{ pour tout } i \in [n] \\ y_{SI}^0 = 0 \cdot z^0 \\ y_{S_j}^0 = 0 \cdot z^0 \text{ pour tout } j \in [m] \end{cases}$

— $0 \leq x^k \leq d^k z^k$ pour P^1 $(k=1)$: $\begin{cases} x_i^1 \leq 1 \cdot z^1 \text{ pour tout } i \in \cup_{j\in[m]}(S_j \setminus I) \\ x_i^1 \geq 0 \cdot z^1 \text{ pour tout } i \in \cup_{j\in[m]}(S_j \setminus I) \\ y_{S_j}^1 \leq 1 \cdot z^1 \text{ pour tout } j \in [m] \\ y_{S_j}^1 \geq 0 \cdot z^1 \text{ pour tout } j \in [m] \\ y_I^1 = 1 \cdot z^1 \\ x_i^1 = 1 \cdot z^1 \text{ pour tout } i \in I \end{cases}$

— $\sum_{k=0}^{q} z^k = 1,\ 0 \leq z^k \leq 1 \quad \forall k \in \{0,1\}$: $\begin{cases} z^0 + z^1 = 1 \\ z^0 \leq 1 \\ z^0 \geq 0 \\ z^1 \leq 1 \\ z^1 \geq 0 \end{cases}$

Notons W, le polytope défini par l'ensemble des inégalités décrites par le Théorème de Balas. On va à présent obtenir une description de $Proj_{(x,y_{S_1},\ldots,y_{S_m},y_I)}(W) = conv(P^0 \cup P^1)$ en simplifiant certaines inégalités et en utilisant la méthode de projection de Fourier-Motzkin.

Élimination des variables x_i^1 pour tout $i \in [n]$, $y_{S_j}^0, y_{S_j}^1$ pour tout $j \in [m]$, y_I^0, y_I^1, z^0, et z^1 par simplification.

— Par les équations $\begin{cases} y_{S_j}^0 + y_{S_j}^1 = y_{S_j} \\ y_{S_j}^0 = 0 \end{cases}$ on obtient $y_{S_j}^1 = y_{S_j}$ pour tout $j \in [m]$.

— De même, $\begin{cases} y_I^0 + y_I^1 = y_I \\ y_I^0 = 0 \end{cases}$ implique $y_I^1 = y_I$.

— Étant donné l'égalité $y_I^1 = z^1$ il est direct que $z^1 = y_I$.

— De là, par $\begin{cases} z^0 + z^1 = 1 \\ z^1 = y_I \end{cases}$ on obtient $z^0 = 1 - y_I$.

— Finalement $\begin{cases} x_i^0 + x_i^1 = x_i \ \forall i \in [n] \\ x_i^1 = z^1 \ \forall i \in I \\ z^1 = y_I \end{cases}$ implique $\begin{cases} x_i^0 = x_i - y_I \ \forall i \in I \\ x_i^1 = x_i - x_i^0 \ \forall i \in \cup_{j\in[m]} S_j \setminus I \end{cases}$.

Par cette série d'observations, par substitution et par réarrangement des inégalités de W, on obtient un nouvel ensemble d'inégalités décrivant W :

$$
\begin{array}{lll}
 & \sum_{i\in I}(x_i - y_I) \leq (|I|-1)\cdot(1-y_I) & \\
\star & \sum_{i\in S_j\setminus I}(x_i - x_i^0) - y_{S_j} \leq (|S_j\setminus I|-1)\cdot y_I & \forall j\in[m] \\
 & x_i \leq 1 & \forall i\in I \\
 & x_i \geq y_I & \forall i\in I \\
\star & x_i^0 \leq x_i & \forall i\in \cup_{j\in[m]}(S_j\setminus I) \\
\star & 0 \leq x_i^0 & \forall i\in \cup_{j\in[m]}(S_j\setminus I) \\
\star & x_i - x_i^0 \leq y_I & \forall i\in \cup_{j\in[m]}(S_j\setminus I) \\
\star & y_I \leq 1 - x_i^0 & \forall i\in \cup_{j\in[m]}(S_j\setminus I) \\
 & y_{S_j} \leq y_I & \forall j\in[m] \\
 & y_{S_j} \geq 0 & \forall j\in[m] \\
\star & y_{S_j} \leq x_i - x_i^0 & \forall i\in(S_j\setminus I), \forall j\in[m] \\
 & y_I \leq 1 & \\
 & y_I \geq 0 &
\end{array}
$$

Élimination des variables $x_1^0, ..., x_n^0$ par la méthode de Fourier-Motzkin.

On remarque dans un premier temps que les variables x_i^0 telles que $i \in I$ sont déjà éliminés dans la nouvelle description de W. Ainsi, il reste à éliminer les variables x_i^0 telles que $i \in \cup_{j\in[m]}(S_j \setminus I)$. Pour cela, intéressons-nous aux inégalités impliquant x_i^0. Il s'agit de celles précédées d'une '$\star$'. Notons x_{i*}^0, la première variable à éliminer, et supposons sans perte de généralité que $i* \in S_1 \setminus I$. Les inégalités la concernant sont :

$$
\begin{aligned}
x_{i*} - y_I &\leq x_{i*}^0 \\
0 &\leq x_{i*}^0 \\
\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1\setminus I|-1)\cdot y_I &\leq x_{i*}^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{i*}^0 &\leq 1 - y_I \\
x_{i*}^0 &\leq x_{i*} - y_{S_1} \\
x_{i*}^0 &\leq x_{i*}
\end{aligned}
$$

Par la méthode d'élimination de FOURIER-MOTZKIN(Sous-section 1.2.2) appliquée à la variable x^0_{i*} les nouvelles inégalités suivantes sont trouvées :

$$\begin{aligned}
&x_{i*} - y_I \leq 1 - y_I\\
&x_i - y_I \leq x_{i*} - y_{S_1}\\
&x_i - y_I \leq x_{i*}\\
&0 \leq 1 - y_I\\
&0 \leq x_{i*} - y_{S_1}\\
&0 \leq x_{i*}\\
&\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1\setminus I| - 1)\cdot y_I \leq 1 - y_I\\
&\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1\setminus I| - 1)\cdot y_I \leq x_{i*} - y_{S_1}\\
&\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1\setminus I| - 1)\cdot y_I \leq x_{i*}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous un peu plus en détails à chacune d'entre elles :

- $x_{i*} - y_I \leq 1 - y_I$: On en déduit directement la nouvelle inégalité suivante $\boxed{x_{i*} \leq 1}$

- $x_{i*} - y_I \leq x_{i*} - y_{S_1}$: Cette inégalité est équivalente à $y_I \geq y_{S_1}$, qui est déjà présente dans l'ensemble d'inégalités n'impliquant pas de x_i^0.

- $x_{i*} - y_I \leq x_{i*}$: $\Leftrightarrow y_I \geq 0$, à nouveau, il s'agit d'une inégalité redondante par rapport à celles présentes dans la description de W.

- $0 \leq 1 - y_I$: $\Leftrightarrow y_I \leq 1$, équation également déjà présente dans la description de W.

- $0 \leq x_{i*} - y_{S_1}$: nouvelle inégalité $\boxed{y_{S_1} \leq x_{i*}}$

- $0 \leq x_{i*}$: nouvelle inégalité obtenue directement : $\boxed{0 \leq x_{i*}}$

- $\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1\setminus I| - 1)\cdot y_I \leq 1 - y_I$: ce qui revient à la nouvelle inégalité suivante $\boxed{\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 \leq y_{S_1} + (|S_1\setminus I| - (1+\mathbf{1}))\cdot y_I + \mathbf{1}}$

- $\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1\setminus I| - 1)\cdot y_I \leq x_{i*}$: Il s'agit en fait d'une équation redondante. En effet, à partir des inégalités $\begin{cases} x_i - x_i^0 \leq y_I & \forall i \in ((S_1\setminus I)\setminus i*)\\ y_{S_1} \geq 0\\ x_{i*} \geq 0\end{cases}$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
& x_i - x_i^0 \leq y_I \\
\Rightarrow & \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} (x_i - x_i^0) \leq (|S_1 \setminus I| - 1) \cdot y_I \\
\Rightarrow & \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 \leq y_{S_1} + (|S_1 \setminus I| - 1) \cdot y_I \\
\Rightarrow & \sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1 \setminus I| - 1) \cdot y_I \leq x_{i*}
\end{aligned}
$$

-$\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1 \setminus I| - 1) \cdot y_I \leq x_{i*} - y_{S_1}$: Il s'agit également d'une équation redondante par les mêmes arguments :

$$
\begin{aligned}
& x_i - x_i^0 \leq y_I \\
\Rightarrow & \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} (x_i - x_i^0) \leq (|S_1 \setminus I| - 1) \cdot y_I \\
\Rightarrow & \sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x_i^0 - y_{S_1} - (|S_1 \setminus I| - 1) \cdot y_I \leq x_{i*} - y_{S_1}
\end{aligned}
$$

Les inégalités décrivant la projection de W sur l'ensemble des variables excepté x^0_{i*} sont à présent (notons le polytope décrit par ces inégalités W_1) :

Les inégalités n'impliquant pas de variable x^0_i :

$$\sum_{i\in I}(x_i - y_I) \leq (|I|-1)\cdot(1-y_I)$$

$$x_i \leq 1 \qquad \forall i \in I$$

$$x_i \geq y_I \qquad \forall i \in I$$

$$y_{S_j} \leq y_I \qquad \forall j \in [m]$$

$$y_{S_j} \geq 0 \qquad \forall j \in [m]$$

$$y_I \leq 1$$

$$y_I \geq 0$$

Les inégalités implquant les variables $x^0_i, i \neq i*$:

$$\sum_{i\in S_j\setminus I}(x_i - x^0_i) - y_{S_j} \leq (|S_j \setminus I|-1)\cdot y_I \qquad \forall j \in [m], j \neq 1$$

$$y_{S_1} \leq x_i - x^0_i \qquad \forall i \in (S_1 \setminus I) \setminus i*$$

$$y_{S_j} \leq x_i - x^0_i \qquad \forall i \in (S_j \setminus I), \forall j \in [m], j \neq 1$$

$$x_i - x^0_i \leq y_I \qquad \forall i \in \cup_{j\in[m],j\neq 1}(S_j \setminus I)$$

$$x_i - x^0_i \leq y_I \qquad \forall i \in ((S_1 \setminus I) \setminus i*)$$

$$y_I \leq 1 - x^0_i \qquad \forall i \in \cup_{j\in[m],j\neq 1}(S_j \setminus I)$$

$$y_I \leq 1 - x^0_i \qquad \forall i \in ((S_1 \setminus I) \setminus i*)$$

$$x^0_i \leq x_i \qquad \forall i \in \cup_{j\in[m],j\neq 1}(S_j \setminus I)$$

$$x^0_i \leq x_i \qquad \forall i \in ((S_1 \setminus I) \setminus i*)$$

$$0 \leq x^0_i \qquad \forall i \in \cup_{j\in[m],j\neq 1}(S_j \setminus I)$$

$$0 \leq x^0_i \qquad \forall i \in ((S_1 \setminus I) \setminus i*)$$

Les inégalités introduites par Fourier-Motzkin :

$$\sum_{i\in S_1\setminus I} x_i - \sum_{i\in(S_1\setminus I)\setminus i*} x^0_i - y_{S_1} \leq (|S_1 \setminus I| - (1+1))\cdot y_I + 1$$

$$y_{S_1} \leq x_{i*}$$

$$x_{i*} \leq 1$$

$$0 \leq x_{i*}$$

Montrons à présent par induction sur le nombre de variables éliminées, que la projection de W est décrite par l'ensemble d'inégalités n'impliquant pas de variables x^0_i, ainsi que les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
& y_{S_j} \leq x_i - x_i^0 && \forall i \in ((S_j \setminus I) \setminus S'_j), \forall j \in [m] \\
& x_i - x_i^0 \leq y_I && \forall i \in \cup_{j\in[m]}((S_j \setminus I) \setminus S'_j) \\
& y_I \leq 1 - x_i^0 && \forall i \in \cup_{j\in[m]}((S_j \setminus I) \setminus S'_j) \\
& x_i^0 \leq x_i && \forall i \in \cup_{j\in[m]}((S_j \setminus I) \setminus S'_j) \\
& 0 \leq x_i^0 && \forall i \in \cup_{j\in[m]}((S_j \setminus I) \setminus S'_j)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i\in S_j\setminus I} x_i - \sum_{i\in (S_j\setminus I)\setminus S'_j} x_i^0 \leq y_{S_j} + (|S_j \setminus I| - (1+p_j)) \cdot y_I + p_j && \forall j \in [m] \\
& y_{S_j} \leq x_i && \forall i \in S'_j, \forall j \in [m] \\
& x_i \leq 1 && \forall i \in \cup_{j\in[m]} S'_j \\
& 0 \leq x_i && \forall i \in \cup_{j\in[m]} S'_j
\end{aligned}
$$

où

- S'_j est l'ensemble d'indices inclus dans $S_j \setminus I$, tel que les variables x_i^0 ont été éliminées pour tout $i \in S'_j$ (et ce pour tout $j \in [m]$)
- $p_j = |S'_j|$.

Le cas de base où $S'_j = \emptyset$ et $p_j = 0$ pour tout $j \in [m]$ est direct. En remplaçant ces valeurs dans la description ci-dessus on retrouve directement l'ensemble d'inégalités décrit après la première étape d'élimination des variables par substitution.

L'induction est directe vu le travail effectué lors de l'élimination de la variable x_{i*}^0.

Il a déjà été mentionné que, étant donné la configuration des m sous-ensembles d'indices (configuration symétrique), choisir $i*$ dans un sous-ensemble S_j quelconque donnait un résultat tout à fait similaire à celui trouvé, excepté que les rôles de S_j et S_1 sont inversés.

Une fois toutes les variables x_i^0 éliminées, on a $S'_j = S_j \setminus I$ et $p_j = |S_j \setminus I|$ pour tout $j \in [m]$. Les inégalités décrivant la projection de W sur les variables (x, y, y_I) sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in I}(x_i - y_I) \leq (|I|-1)\cdot(1-y_I) && \\
&x_i \leq 1 && \forall i \in I\\
&x_i \geq y_I && \forall i \in I\\
&y_{S_j} \leq y_I && \forall j \in [m]\\
&y_{S_j} \geq 0 && \forall j \in [m]\\
&y_I \leq 1 && \\
&y_I \geq 0 &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_i \leq 1 && \forall i \in \cup_{j\in[m]}(S_j \setminus I)\\
&y_{S_j} \leq x_i && \forall i \in (S_j \setminus I), \forall j \in [m]\\
&0 \leq x_i && \forall i \in \cup_{j\in[m]}(S_j \setminus I)\\
&\sum_{i\in S_j\setminus I} x_i \leq y_{S_j} + (|S_j \setminus I| - (1+|S_j\setminus I|))\cdot y_I + |S_j \setminus I| && \forall j \in [m]
\end{aligned}
$$

Après un réarrangement et quelques simplifications, on peut se rendre compte qu'il s'agit exactement de l'ensemble d'inégalités décrivant P, à l'exception des inégalités suivantes, manquantes dans la description de W :

$$
\begin{aligned}
&y_{S_j} \leq 1 \quad \forall j \in [m]\\
&x_i \geq 0 \quad \forall i \in I
\end{aligned}
$$

Cependant, elles peuvent être aisément déduites à partir de $\left\{\begin{array}{ll} y_{S_j} \leq y_I & \forall j \in [m] \\ y_I \leq 1 & \end{array}\right.$ et de $\left\{\begin{array}{ll} x_i \geq y_I & \forall i \in I \\ y_I \geq 0 & \end{array}\right.$.

Pour rappel, P était défini tel que :

$$
P = \left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}, y_I) \in \mathbb{R}^{n+m+1} : \begin{array}{ll}
y_I \leq x_i & \forall i \in I\\
y_I \geq \sum_{i\in I} x_i - |I| + 1 & \\
y_{S_j} \leq y_I & \forall j \in [m]\\
y_{S_j} \leq x_i & \forall i \in S_j \setminus I, \forall j \in [m]\\
y_{S_j} \geq \sum_{i\in S_j\setminus I} x_i + y_I - |S_j \setminus I| & \forall j \in [m]\\
0 \leq y_{S_j} \leq 1 & \forall j \in [m]\\
0 \leq y_I \leq 1 & \\
0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n]
\end{array} \right\}.
$$

Ainsi, on vient bien de montrer que $Proj_{(x,y,y_I)}(W)$ qui est égal à $conv(P^0 \cup P^1)$, est exactement le polytope P de départ. Sachant $conv(P^0 \cup P^1)$ entier, P est par conséquent entier.

La dernière étape de la preuve consiste à présent à montrer que $Proj_{(x,y)}(P) = P_L^2$. Pour cela, la méthode l'élimination de FOURIER-MOTZKIN va à nouveau être utilisée pour éliminer la variable y_I de l'ensemble des inégalités décrivant P.

Les inégalités impliquant la variable y_I (réarrangées pour plus de clarté) sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
y_{S_j} &\leq y_I && \forall j \in [m] \\
\sum_{i \in I} x_i - |I| + 1 &\leq y_I \\
0 &\leq y_I \\
& y_I \leq y_{S_j} - \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i + |S_j \setminus I| && \forall j \in [m] \\
& y_I \leq x_i && \forall i \in I \\
& y_I \leq 1
\end{aligned}
$$

Et, par FOURIER-MOTZKIN, de nouvelles inégalités apparaissent, plus particulièrement :

- Soit $j_0 \in [m]$ fixé, on a
  - $y_{S_{j_0}} \leq y_{S_{j_0}} - \sum_{i \in S_{j_0} \setminus I} x_i + |S_{j_0} \setminus I|$ qui peut se réécrire $\sum_{i \in S_{j_0} \setminus I} x_i \leq |S_{j_0} \setminus I|$, ce qui est trivialement vrai étant donné que $x_i \in [0,1]$ pour tout $i \in [n]$.
  - Ensuite, pour tout $j \neq j_0$, $y_{S_{j_0}} \leq y_{S_j} - \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i + |S_j \setminus I|$ est, quant à elle, une nouvelle inégalité. On a donc :
    $\boxed{y_{S_{j_0}} \leq y_{S_j} - \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i + |S_j \setminus I| \text{ pour tout } j \in [m], j \neq j_0}$
    et ce pour tout $j_0 \in [m]$
- $\boxed{y_{S_j} \leq x_i \quad \forall i \in I \quad \forall j \in [m]}$
- $y_{S_j} \leq 1 \quad \forall j \in [m]$: inégalité déjà connue.
- $\sum_{i \in I} x_i - |I| + 1 \leq y_{S_j} - \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i + |S_j \setminus I|$ donne la nouvelle inégalité suivante :
  $\boxed{\sum_{i \in S_j} x_i - |S_j| + 1 \leq y_{S_j} \quad \forall j \in [m]}$
- $\sum_{i \in I} x_i - |I| + 1 \leq x_{i*} \quad \forall i* \in I \Leftrightarrow \sum_{i \in I} x_i - x_{i*} \leq |I| - 1 \quad \forall i* \in I$, ce qui est toujours vrai étant donné que $x_i \in [0,1]$ pour tout $i \in [n]$.
- $\sum_{i \in I} x_i - |I| + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} x_i \leq |I|$: inégalité qui, à nouveau, est une inégalité toujours vérifiée étant donné que $x_i \in [0,1]$ pour tout $i \in [n]$.
- $0 \leq y_{S_j} - \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i + |S_j \setminus I| \quad \forall j \in [m] \Leftrightarrow \sum_{i \in S_j \setminus I} x_i \leq |S_j \setminus I| + y_{S_j} \quad \forall j \in [m]$. Cette inégalité est directe étant donné que toutes les variables sont entre 0 et 1.
- $0 \leq x_i \quad \forall i \in I$: inégalité déjà présente dans la description de P.
- $0 \leq 1$: inégalité trivialement vraie.

Ainsi, les nouvelles inégalités introduites sont :

$$\begin{aligned}
&y_{S_j} \leq y_{S_l} - \sum_{i\in S_l\setminus S_j} x_i + |S_l \setminus S_j| \quad \forall j,l \in [m], j \neq l\\
&y_{S_j} \leq x_i \quad \forall i \in I \quad \forall j \in [m]\\
&\sum_{i\in S_j} x_i - |S_j| + 1 \leq y_{S_j} \quad \forall j \in [m]
\end{aligned}$$

Donc, au final, P projeté sur l'ensemble des $(x, y_{S_1}, ..., y_{S_m})$, c'est-à-dire $Proj_{(x,y_{S_1},...,y_{S_m})}(P)$, est décrit par :

$$\left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \begin{array}{ll}
y_{S_j} \leq x_i & \forall i \in S_j \setminus I \quad \forall j \in [m]\\
y_{S_j} \leq x_i & \forall i \in I \quad \forall j \in [m]\\
y_{S_j} \leq y_{S_l} - \sum_{i\in S_l\setminus S_j} x_i + |S_l \setminus S_j| & \forall j,l \in [m], j \neq l\\
\sum_{i\in S_j} x_i - |S_j| + 1 \leq y_{S_j} & \forall j \in [m]\\
0 \leq y_{S_j} \leq 1 & \forall j \in [m]\\
0 \leq x_i \leq 1 & \forall i \in [n]
\end{array} \right\}$$

Il s'agit exactement de P_L^2 que nous avions défini comme :

$$P_L^2 = \left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}) \in [0,1]^{n+m} : \begin{array}{ll}
\text{pour tout j} \in [m], & \\
y_{S_j} \leq x_i & \forall i \in S_j\\
y_{S_j} \geq \sum_{i\in S_j} x_i - (|S_j| - 1) & \\
y_{S_j} \leq y_{S_l} - \sum_{i\in \setminus S_j} x_i + |S_l \setminus S_j| & \forall l \in [m], l \neq j
\end{array} \right\}$$

Étant donné qu'il a été prouvé que les sommets du polytope P sont entiers, les projections de ses sommets restent des entiers. Ainsi on peut conclure que P_L^2 a des sommets entiers et par conséquent est un polytope entier.
De là, par le Théorème 8 on a : $P_L^2 = conv(P_L^2 \cap \mathbb{Z}^{n+2})$.
Or, on a démontré dans le Chapitre 1 que les inégalités 2-links sont valides pour P_L^*, donc

$$P_L^* = conv(P_L \cap \mathbb{Z}^{n+2}) = conv(P_L^2 \cap \mathbb{Z}^{n+2}) = P_L^2.$$

C'est-à-dire, P_L^2, polytope entier, est une description parfaite de P_L^*.

□

Ainsi, au vu de la démonstration ci-dessus, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 15. *Soit $f : \{0,1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction pseudo-booléenne à m monômes non linéaires telle que :*
- *les m monômes non linéaires sont indexés par $\{S_1, \cdots, S_m\}$*
- *pour tout $j \in [m]$, il existe au minimum un $i \in [n]$ tel que $i \in S_j$ mais $i \notin S_k$ pour tout $k \neq j$*
- *pour tous $j, l \in [m], j \neq l$ on a $S_j \cap S_l = I$ où $I \neq \emptyset$*

Alors, le polytope suivant décrit entièrement l'ensemble des solutions du programme linéaire mixte associé à la fonction f et il s'agit d'un polytope entier.

$$P_L^2 = \left\{ (x, y_{S_1}, ..., y_{S_m}) \in [0,1]^{n+m} : \begin{array}{ll} \textit{pour tout } j \in [m] : & \\ y_{S_j} \leq x_i & \forall i \in S_j \\ y_{S_j} \geq \sum_{i \in S_j} x_i - (|S_j| - 1) & \\ y_{S_j} \leq y_{S_l} - \sum_{i \in \setminus S_j} x_i + |S_l \setminus S_j| & \forall l \in [m], l \neq j \end{array} \right\}$$

5.4 Résultat analogue

Il est important de noter que le Théorème 15 présenté dans la section précédente, ainsi que le Théorème 14 du Chapitre 4, ne sont pas des nouveaux résultats.

En effet, dans l'article "*The multilinear polytope for acyclic hypergraphs*" écrit par Alberto Del pia et Aida Khajavirad [7], le problème d'optimisation de fonctions pseudo-booléennes non linéaires est également traité.

Leur approche est tout à fait différente et indépendante de celle présentée ici. La première grande différence est qu'ils utilisent la notion d'hypergraphe pour représenter de manière équivalente des problèmes d'optimisation.

Définition 15. Considérons un hypergraphe $G = (V, E)$ où $V = V(G)$ est l'ensemble des noeuds de G et $E = E(G)$ est l'ensemble des sous-ensembles de V de cardinalité au moins deux. On appellera E l'ensemble des arêtes de G.

A tout hypergraphe G, et vecteur $c \in \mathbb{R}^{|V|+|E|}$, on peut associer un problème d'optimisation binaire de la forme :

$$\text{Max} \sum_{v \in V} c_v z_v + \sum_{e \in E} c_e \prod_{v \in e} z_e$$

Leur approche est de définir différents types de cycles dans les hypergraphes. Pour un sous-ensemble de graphes contenant un cycle particulier, ils ont réussi à décrire l'enveloppe convexe.

La deuxième grande différence avec l'approche présentée dans ce travail est qu'ils n'utilisent pas les inégalités 2-links, ni les inégalités maillons, mais plutôt ce qu'ils appellent les inégalités *flower*

Remarque 17. Les inégalités *flower* n'ont aucun lien avec la configuration des monômes que nous avons appelés "en fleur". Pour éviter tout quiproquo, j'ai préféré garder le mot anglais *flower* pour définir la nouvelle classe d'inégalités.

Définition 16. Soit un hypergraphe $G = (V, E)$ et soient

— e_0 une arête de G

— K l'ensemble d'indices des arêtes, tel que $|e_k \cap e_0| \geq 2$ pour tout $k \in K$.

— T un sous-ensemble non vide de K, tel que $e_i \cap e_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in T, i \neq j$.

Alors on définit l'**inégalité *flower*** centrée en e_0 liées aux $e_k, k \in T$ par :

$$\sum_{v \in e_0 \setminus \cup_{k \in T} e_k} z_v + \sum_{k \in T} z_{e_k} \leq |e_0 \setminus \cup_{k \in T}| + |T| + 1.$$

Pour le cas de m monômes configurés en fleur, les inégalités *flower* et les inégalités 2-links sont équivalentes. De même, dans le cas en "chaîne" traité dans le Chapitre 4, les inégalités 2-links et l'inégalité maillon sont également équivalentes aux inégalités *flower*. De plus, ces deux cas retombent dans la famille des hypergraphes contenant un certain type de cycle pour laquelle un théorème qui décrit entièrement l'enveloppe convexe des solutions est présenté dans l'article précité.

J'ai pris connaissance de l'article [7] à l'étape de la généralisation et l'ai uniquement étudié pour cette brève introduction. En effet, il ne m'était pas utile avant, car la première étape du travail était d'étudier l'article de Crama, Rodriguez-Heck [6]. Il est néanmoins important de mentionner que, même si l'approche utilisée dans ce travail est indépendante de leur approche, les résultats que j'ai démontrés ne sont pas nouveaux.

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire était de décrire parfaitement l'ensemble des inégalités de l'enveloppe convexe des solutions binaires (P_L^*) d'un programme linéaire mixte associé à un problème d'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne particulière.

Plusieurs configurations de fonctions ont été étudiées :
- fonction pseudo-booléenne à un monôme non linéaire (Chapitre 2),
- fonction pseudo-booléenne à deux monômes non linéaires non emboîtés et d'intersection non vide (Chapitre 3),
- fonction pseudo-booléenne à trois monômes non linéaires configurés en fleur (Chapitre 4),
- fonction pseudo-booléenne à trois monômes non linéaires configurés en chaîne (Chapitre 4),
- fonction pseudo-booléenne à m monômes non linéaires configurés en fleur (Chapitre 5).

Bien que dans tous les cas cités, une description de l'enveloppe convexe des solutions binaires est présentée, les deux cas les plus intéressants à retenir concernent les deux dernières configurations ci-dessus.

Lors de l'étude d'une fonction pseudo-booléenne à trois monômes (de sous-ensemble d'indices S, T et V inclus dans $2^{[n]}$) non linéaires configurés en chaîne, une nouvelle classe d'inégalités est définie et les inégalités utilisées décrivant P_L^* sont :
- — inégalités de la linéarisation standard des monômes indexés par S, T et V,
- — inégalités 2-links $(S, T), (T, S), (T, V), (V, T)$,
- — inégalité maillon associée à (S, T, V).

Tandis que pour l'optimisation d'une fonction pseudo-booléenne à m monômes non linéaires (de sous-ensembles d'indices $S_1, ..., S_m$) configurés en fleur, les inégalités décrivant P_L^* sont les suivantes :
- — inégalités de la linéarisation standard des monômes indexés par $S_1, ..., S_m$,
- — inégalités 2-links (S_l, S_k) et (S_k, S_l) pour tout $k, l \in [m], k \neq l$.

Enfin, rappelons que le cas de m monômes configurés en fleur englobe le cas des deux monômes non emboités et d'intersection non vide ainsi que le cas de 3 monômes configurés en fleur.

Ainsi, pour ces différentes configurations, le fait d'avoir une description des inégalités définissant le polyèdre P_L^* permet de résoudre tout programme linéaire à variables entières sur ce polyèdre comme un programme linéaire à variables continues. Dès lors, une solution optimale du problème d'optimisation sur l'ensemble des solutions binaires sera aisément trouvée.

Bibliographie

[1] ASSARF, Benjamin, Ewgenij GAWRILOW, Katrin HERR, Michael JOSWIG, Benjamin LORENZ, Andreas PAFFENHOLZ et Thomas REHN. Computing convex hulls and counting integer points with polymake. *Mathematical Programming Computation*. Mar 2017, 9(1), p. 1–38. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/s12532-016-0104-z>.

[2] CONFORTI, Michele. *Integer Programming*. Cham : Springer International Publishing : Imprint : Springer, 2014. (Graduate Texts in Mathematics, 271). ISBN 3-319-11008-X.

[3] CRAMA, Yves. Operations research - chapter 1: Linear programming. (Notes de cours), Septembre 2017.

[4] CRAMA, Yves. Operations research - chapter 2: Integer programming. (Notes de cours), Octobre 2017.

[5] CRAMA, Yves et Peter L. HAMMER. *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications*. NY, New York : Cambridge University Press, 2011.

[6] CRAMA, Yves et Elisabeth RODRÍGUEZ-HECK. A class of valid inequalities for multilinear 0-1 optimization problems. *Discrete Optimization*. August 2017, 25, p. 28–47.

[7] DEL PIA, Alberto et Aida KHAJAVIRAD. The multilinear polytope for acyclic hypergraphs. *SIAM Journal on Optimization*. 2017, 28(2), p. 1049–1076.

[8] KRUMKE, Sven O. Integer programming: Polyhedra and algorithms. (Notes de cours), Janvier 2006.