



UNIVERSITÉ DE LIÈGE - FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

**DÉVELOPPEMENT ET APPLICATION D'UN
ALGORITHME DE SÉPARATION DE MODES DANS DES
PRESSIONS DE VENT SUR DES ÉLÉMENTS DE FAÇADE**

Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention du grade de
master "Ingénieur Civil en construction" par Bastin Thibaud

PROMOTEUR

M. V. DENOËL (ULiège)

MEMBRES DU JURY

M. T. ANDRIANNE (ULiège)

M. F. RIGO (ULiège)

M. V. DE VILLE (ULiège et Bureau Greisch)

ANNÉE ACADÉMIQUE 2020-2021

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble du corps enseignant de l'Université ainsi que les autres personnes m'ayant aidé et instruit lors de ces cinq années passées à l'Université de Liège.

Je voudrais aussi témoigner ma gratitude à monsieur Denoël, qui m'a soutenu, aidé et encouragé durant ces derniers mois. Sans son aide et ses précieux conseils, je n'aurais pas pu accomplir ce travail.

Je remercie les membres de mon jury, M. Andrianne, M. Rigo et M. de Ville pour le temps qu'ils ont accordé à mon travail. Je les remercie aussi d'avoir accepté une réunion en cours de rédaction afin de m'aiguiller sur la finalité de ce document et sa présentation finale.

Je tiens aussi à remercier M. Blaise et M. Rigo pour leurs travaux qui m'ont été grandement utiles. Tout particulièrement, M. Blaise qui a réalisé les mesures en soufflerie discutées dans ce document.

Enfin, j'aimerais remercier mon entourage qui m'a soutenu non seulement dans le cadre de ce travail, mais aussi durant ces 5 années d'études.

Abstract

In this work, an in-depth study was carried out on the corner vortices that are observable on the flat roof of a building (phenomenon illustrated by [Banks *et al.* \(2000\)](#)). The wind tunnel measurements used for this work come from the thesis of [Blaise \(2016\)](#). The measurements of [Blaise \(2016\)](#) concern 121 sensors. The wind tunnel tests were carried out for 13 hours. As a result of these observations, it was possible to observe large underpressures which will strongly influence the structural design. It was possible to observe that the probability density functions of the pressure coefficients obtained in the wind tunnel have a behaviour similar to a mixture of two probability density functions. A de-mixing approach has been treated at the University of Liege in the past by [Bourcy \(2020\)](#) and [Rigo *et al.* \(2020\)](#).

In this work, a general study was carried out for signals with a probability density function mixed by two normal probability density functions transformed by a cubic. The mathematical developments of the mixtures have been carried out for joint probability density functions and tri-correlation. The mathematical formulations used can easily be transposed for a probability density function depending on n mixed signals. The theory developed is general and can be used in a multitude of fields dealing with mixed signals. With the help of the mathematical formulations, it was possible to develop an Exp-Max algorithm to define the one-sided and cross-sided statistics of each of the components of the mixtures obtained for the wind tunnel measurements. An improvement of the Exp-Max algorithm was used to deal with long measurement vectors.

Using the newly created model, different studies on the behaviour of cross-sectional statistics could be carried out. Areas with different behaviour were defined and studied separately. A study was made on the spatial behaviour of correlation integration to improve the arrangement of sensors on wind tunnel models. The behaviour of the correlation and covariance integration lines illustrating the spatial relationships between sensors was also studied. This highlights the problems with the TVL approach and the need to find a better model in the future. The current TVL approach uses a dimensionless parameter K . There are several values for the K coefficient, the choice of the K value will strongly influence the results that can be transmitted to the engineering offices.

Then, a mathematical formulation was developed in order to calculate the mean and standard deviation of a pressure resultant for a set of n sensors by considering that the signals have a probability density function mixed by two normal probability density functions transformed by a cubic function.

In view of the difficulty of reconstructing spatial phenomena using local measurements, a new type of sensor has been imagined as a conclusion to this work. One solution would be to stop working with local pressure sensors and use surface sensors instead. Working in this way would make it possible to integrate spatial effects in a physical manner without using a mathematical formulation that approximates reality.

Résumé

Dans ce travail, une étude approfondie a été réalisée sur les tourbillons de coin qui sont observables sur le toit plat d'un bâtiment (phénomène illustré par [Banks *et al.* \(2000\)](#)). Les mesures de soufflerie utilisées pour ce travail proviennent de la thèse de [Blaise \(2016\)](#). Elles concernent 121 capteurs. Les tests en soufflerie ont été réalisés pendant 13 heures. Suite à ces observations, on a remarqué de larges sous-pressions qui vont fortement influencer le dimensionnement de la structure. Il a été possible d'observer que les densités de probabilité des coefficients de pression obtenus en soufflerie ont un comportement s'apparentant à un mélange de deux densités de probabilité. Une approche de dé-mixage a été traitée à l'Université de Liège par le passé par [Bourcy \(2020\)](#) et [Rigo *et al.* \(2020\)](#).

Dans ce travail, une étude générale a été réalisée pour des signaux ayant une densité de probabilité mélangée par deux densités de probabilité normales transformées par une cubique. Les développements mathématiques des mélanges ont été réalisés pour les densités de probabilité conjointes et tri-variées. Les formulations mathématiques utilisées peuvent facilement être transposées pour une densité de probabilité dépendante de n signaux mélangés. La théorie développée est générale et pourra être utilisée dans une multitude de domaines traitant des signaux mélangés. A l'aide des formulations mathématiques, il a été possible de réaliser un algorithme d'Exp-Max permettant de définir les statistiques unilatérales et croisées de chacune des composantes des mélanges obtenus pour les mesures en soufflerie. Une amélioration de l'algorithme Exp-Max a été utilisée afin de traiter des vecteurs de mesures de grande longueur.

À l'aide du nouveau modèle créé, on a pu réaliser différentes études sur le comportement des statistiques croisées. On a défini des zones avec des comportements différents, qui ont été étudiées séparément. Une étude a été faite sur le comportement spatial d'intégration de corrélation permettant d'améliorer la disposition des capteurs sur les modèles en soufflerie. On a aussi étudié le comportement des lignes d'intégration de corrélation et de covariance illustrant les relations spatiales entre capteurs. Cela permet de mettre en évidence les problèmes avec l'approche TVL et la nécessité de trouver un modèle plus performant dans le futur. L'approche actuelle TVL utilise un paramètre adimensionnel K . Il existe plusieurs valeurs pour le coefficient K . Le choix de la valeur de ce dernier va fortement influencer les résultats qui peuvent être transmis aux bureaux d'études.

Ensuite, une formulation mathématique a été développée de manière à calculer la moyenne et l'écart-type d'une résultante de pression pour un ensemble de n capteurs en considérant que les signaux ont une densité de probabilité mélangée par deux densités de probabilité normales transformées par une fonction cubique.

Au vu de la difficulté de reconstruction des phénomènes spatiaux à l'aide de mesures locales, un nouveau type de capteur a été imaginé en conclusion de ce travail. Une solution consisterait à ne plus travailler avec des capteurs de pression locaux, mais avec des capteurs de surface. Travailler de cette manière permettrait d'intégrer les effets spatiaux de manière physique sans passer par une formulation mathématique approchant la réalité.

Table des matières

1	INTRODUCTION	1
1	Mise en situation du travail et de la problématique étudiée	1
1.1	Introduction de l'approche TVL	2
1.2	Recherche réalisée à Liège et apport personnel	4
2	Motivation pour développer un algorithme de dé-mixage	6
2.1	Facteur de pointe pour un capteur	6
2.2	Calcul de résultantes de pression	7
3	Mesures en soufflerie utilisées pour ce travail	7
3.1	Protocole des essais en soufflerie	7
3.2	Données de soufflerie	8
2	NOTIONS MATHÉMATIQUES	11
1	Moments statistiques	11
1.1	Statistiques unilatérales	12
1.1.1	Moment d'ordre 1	12
1.1.2	Moment d'ordre 2	12
1.1.3	Moment d'ordre 3	13
1.1.4	Moment d'ordre 4	13
1.2	Statistiques croisées	14
1.2.1	Covariance et corrélation	14
2	Mixing process	15
3	La transformation cubique	16
3.1	Introduction	16
3.2	Condition de monotonie	17
3.3	Fonction inverse cubique	17
3.4	Transformation cubique	17
3.5	Transformation bi-cubique	18
3.6	Transformation tri-cubique (apport personnel)	19
3.7	Relations entre les moments statistiques et les paramètres de la fonction de transformation cubique	20
3.8	Champ d'application de la transformation cubique	20
4	Génération d'une densité de probabilité à partir d'un signal donné, cfr cours Denoël (2013)	22
5	Évaluation de la position du pic d'une densité de probabilité unimodale	23
3	Algorithme d'identification des moments statistiques de densité de probabilité	24
1	Calcul des paramètres de la fonction de transformation grâce aux moments statistiques	24
2	Algorithme de dé-mixage pour les statistiques unilatérales (1 signal)	26
2.1	Algorithme pour un signal avec une densité de probabilité sans mélange	26

2.1.1	Paramètres nécessaires	26
2.1.2	Détermination des paramètres	26
2.2	Algorithme pour un signal avec une densité de probabilité mélangée . . .	26
2.2.1	Paramètres nécessaires	26
2.2.2	Détermination des paramètres	27
3	Algorithme de dé-mixage pour les statistiques croisées	34
3.1	Algorithme pour deux signaux ayant une densité de probabilité non mélangée	34
3.1.1	Paramètres nécessaires	34
3.1.2	Détermination des paramètres	34
3.2	Algorithme entre deux signaux ayant une densité de probabilité mélangée .	35
3.2.1	Paramètres nécessaires	35
3.2.2	Détermination des paramètres	36
4	Algorithme de dé-mixage pour la tri-corrélation	39
4.1	Algorithme entre trois signaux non mélangés	39
4.1.1	Paramètres nécessaires	39
4.1.2	Détermination des paramètres	39
4.2	Algorithme entre trois signaux avec une densité de probabilité mélangée .	39
4.2.1	Paramètres nécessaires	39
4.2.2	Détermination des paramètres	42
5	Conclusion	45

4 Résultats obtenus avec l'algorithme pour les mesures de soufflerie et analyse de la qualité des algorithmes 47

1	Résultats pour l'algorithme traitant les statistiques unilatérales	47
1.1	Résultats du signal étudié	47
1.2	Convergence de l'algorithme	48
1.3	Convergence du code vers la solution optimale	50
1.4	Convergence des marginales pour n générations	53
1.5	Longueur du signal et effet sur les résultats	54
1.6	Limitations de l'algorithme (résultats obtenus avec génération de signaux aléatoires pour des moments imposés)	55
1.6.1	Réduction et illustration des paramètres variables	55
1.6.2	Limitations identifiées	58
2	Résultats pour l'algorithme traitant les statistiques corrélées	60
2.1	Résultats des signaux étudiés	60
2.2	Convergence des résultats avec l'algorithme Exp-Max	62
2.3	Convergence de l'algorithme Exp-Max vers la solution optimale	63
2.4	Convergence des paramètres pour n générations	65
2.5	Longueur du signal et impact sur la résolution	65
2.6	Limitation identifiée	66
3	Résultats obtenus pour les densités de probabilité de 3 capteurs	67
4	Résultats obtenus pour les densités de probabilité de rang supérieur à 3	68

5 Présentation générale des résultats obtenus avec les mesures en soufflerie 69

1	Densités de probabilité obtenues pour les 121 capteurs, étude statistique unilatérale .	69
1.1	Tri des données	71
2	Densités de probabilité obtenues pour 1 capteur choisi corrélé aux 121 capteurs, étude statistique corrélée	71
2.1	Résultats pour le capteur 1 corrélé aux 121 autres	73
2.2	Résultats pour les capteurs 6/11 corrélés aux 121 autres (zone 1)	79

2.3	Résultats pour les capteurs 4/41 corrélés aux 121 autres (zone 2)	81
2.4	Résultats pour les capteurs 61/121 corrélés aux 121 autres (zone 3)	83
2.5	Conclusion pour les densités de probabilité conjointes	85
6	ÉTUDE DES RÉSULTANTES DE PRESSION À PARTIR DES RÉSULTATS DE L'ALGORITHME DÉVELOPPÉ	86
1	Développement mathématique pour le calcul de résultantes de pression	86
1.1	Développement des formules de manière générale	87
1.2	Introduction des mélanges dans la formulation générale	89
2	Identification du mode critique pour les statistiques unilatérales	92
2.1	Génération de résultante de pression pour deux capteurs	92
2.2	Analyse des résultantes de pression pour 2 capteurs	94
2.2.1	Résultats pour la section 1 de la figure 6.5	96
2.2.2	Résultats pour la section 2 de la figure 6.5	97
2.2.3	Résultats pour la section 3 de la figure 6.5	98
2.2.4	Conclusion	99
3	Analyse d'intégrales de covariance et de corrélation	99
3.1	Analyse du comportement spatial des intégrales de corrélation	99
3.2	Analyse de l'intégrale de corrélation linéaire avec différentes orientations	102
3.3	Analyse de la corrélation spatiale avec un comportement polaire	104
3.3.1	Première vérification	105
3.3.2	Seconde vérification	107
3.4	Analyse des résultantes de pression pour une surface de 4 capteurs	109
4	Conclusion	113
7	Conclusion	114
1	Conclusion	114
2	Recherches futures	116
2.1	Création d'un nouveau capteur	116
2.2	Restrictions des paramètres de l'algorithme	117
	Bibliographie	118
A	Relation de bimodalité	120
1	Moment d'ordre 1	120
2	Moment d'ordre 2	120
3	Moment d'ordre 3	121
4	Moment d'ordre 4	122
B	Borne limitant les valeurs des moyennes des signaux unimodaux : μ_i	124
C	Probabilité d'observer un évènement z	125
D	Compléments de mesure de la section 3.2 du chapitre 6	127

Table des figures

1.1	La figure de gauche vient de mesures de plaques par Bearman (1971). La figure de droite vient de l'article de Cook (1985). Les deux zones grises ont la même surface.	3
1.2	Admittance aérodynamique et déplacement équivalent moyen pour une surface	4
1.3	Approche de signaux de soufflerie avec une densité de probabilité normale transformée avec une cubique	6
1.4	Histogramme croisé sans l'utilisation d'un algorithme de dé-mixage	7
1.5	Images des essais en soufflerie, venant de l'article Rigo <i>et al.</i> (2020)	8
1.6	Densités de probabilité des 121 capteurs pour une échelle linéaire	9
1.7	Densités de probabilité des 121 capteurs pour une échelle logarithmique	9
1.8	Moments statistiques sur la surface du toit	10
1.9	Développement de tourbillons de coin, figure de l'article Banks <i>et al.</i> (2000)	10
2.1	Influence de la moyenne sur les densités de probabilité	12
2.2	Influence de l'écart-type (de la variance) sur les densités de probabilité	13
2.3	Influence du skewness sur les densités de probabilité	13
2.4	Influence du kurtosis sur les densités de probabilité	14
2.5	Influence de la corrélation sur les densités de probabilité conjointes	15
2.6	Représentation de la fonction de transformation monotonique et cubique	16
2.7	Isosurface limitant l'application de la densité de probabilité de 3 signaux	20
2.8	Borne limite et champ d'application du skewness et kurtosis pour une fonction de transformation cubique	21
2.9	Comparaison des critères de limitation avec la solution exacte	22
3.1	Valeur de la fonction erreur minimisée pour transformer les moments statistiques en paramètres de la fonction cubique	25
3.2	Paramètres pour un signal ayant une densité de probabilité mélangée	27
3.3	Relation entre les deux signaux avec une densité de probabilité mélangée	36
3.4	Tri-corrélation entre 3 signaux	42
3.5	Modèle initial Blaise (2016) et Blaise <i>et al.</i> (2017)	45
3.6	Modèle pour le rang 2 avec des signaux mélangés	45
3.7	Modèle pour une composante du signal mélangé au troisième rang	45
4.1	Localisation du capteur 36 de pression	48
4.2	Application de l'algorithme pour le capteur 36 de pression	48
4.3	Convergence des coupes vers le résultat obtenu	49
4.4	Validation de la convergence du code	50
4.5	Convergence du code vers un minimum pour les 9 coupes	51
4.6	Évolution de l'erreur en fonction des nouveaux paramètres	52
4.7	Modification de la solution dans le voisinage de la solution obtenue avec l'algorithme	52
4.8	Résultats obtenus pour la réalisation de 10 fois l'algorithme	53
4.9	Évolution de l'erreur en fonction de la longueur du signal	55

4.10	Densité de probabilité mélangée composée de 2 densités de probabilité normales	56
4.11	Signal 1 : $\mu_1 = -3, \mu_2 = 4, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1$ / Signal 2 : $\mu_1 = -30, \mu_2 = 40, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 10$ / Signal 3 : $\mu_1 = -300, \mu_2 = 400, \sigma_1 = 200, \sigma_2 = 100$	57
4.12	Réalisation respectant la monotonie (γ_3, γ_4)	57
4.13	Décompositions de la densité de probabilité mélangée	59
4.14	Modification des moments statistiques pour le cas le plus critique (la solution approchée par l'algorithme est en vert et la densité de probabilité générée avec les moments donnés)	60
4.15	Localisation des capteurs 35 et 36	61
4.16	Comparaison entre l'algorithme et les mesures de soufflerie	61
4.17	4 modes composant la densité de probabilité de l'algorithme	61
4.18	Convergence de l'algorithme Exp-Max pour 5 coupes	62
4.19	Convergence de l'algorithme Exp-Max dans l'espace à 5 dimensions	63
4.20	Différence d'optimum pour la différence au carré avec une échelle linéaire	64
4.21	Différence d'optimum pour la différence au carré avec une échelle logarithmique	64
4.22	Évolution du facteur de pondération en fonction de la longueur du signal	65
4.23	Évolution des corrélations en fonction de la longueur du signal	66
4.24	Densité de probabilité conjointe entre les capteurs 1	66
4.25	Reconstruction d'une PDF pour les capteurs 34, 36 et 38	68
5.1	Reconstruction des signaux selon l'échelle linéaire (courbes rouges : PDF des mesures de soufflerie, courbes épaisses bleues : PDF reconstruites par l'algorithme, courbes en trait bleu : 2 composantes du mélange)	69
5.2	Reconstruction des signaux selon l'échelle logarithmique (courbes rouges : PDF des mesures de soufflerie, courbes bleues : PDF reconstruites par l'algorithme)	70
5.3	Relation surfacique pour les 9 paramètres du code	71
5.4	Zones ayant des comportements différents	72
5.5	Évolution des densités de probabilité conjointes en fonction du capteur 1	74
5.6	Résolution des densités de probabilité conjointes en fonction du capteur 1 par l'algorithme	74
5.7	Résolution des densités de probabilité conjointes pour le premier mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	75
5.8	Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	75
5.9	Résolution des densités de probabilité conjointes pour le deuxième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	76
5.10	Paramètres de résolution pour le deuxième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	76
5.11	Résolution des densités de probabilité conjointes pour le troisième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	77
5.12	Paramètres de résolution pour le troisième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	77
5.13	Résolution des densités de probabilité conjointes pour le quatrième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	78
5.14	Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)	78
5.15	Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 6 corrélé aux 121 autres)	79
5.16	Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 11 corrélé aux 121 autres)	79
5.17	Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 6 corrélé aux 121 autres)	80
5.18	Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 11 corrélé aux 121 autres)	80
5.19	Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 4 corrélé aux 121 autres)	81
5.20	Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 41 corrélé aux 121 autres)	81

5.21 Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 4 corrélé aux 121 autres)	82
5.22 Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 41 corrélé aux 121 autres)	82
5.23 Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 61 corrélé aux 121 autres)	83
5.24 Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 121 corrélé aux 121 autres)	83
5.25 Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 61 corrélé aux 121 autres)	84
5.26 Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 121 corrélé aux 121 autres)	84
6.1 Résultante avec une échelle linéaire avec la première approche	93
6.2 Résultante avec une échelle logarithmique avec la première approche	93
6.3 Résultante avec une échelle linéaire avec la deuxième approche	93
6.4 Résultante avec une échelle logarithmique avec la deuxième approche	93
6.5 Régions ayant des comportements différents	94
6.6 Identification du mode critique dans la zone 1 en fonction du capteur 6	96
6.7 Identification du mode critique dans la zone 1 en fonction du capteur 11	96
6.8 Identification du mode critique dans la zone 2 en fonction du capteur 4	97
6.9 Identification du mode critique dans la zone 2 en fonction du capteur 41	97
6.10 Identification du mode critique dans la zone 3 en fonction du capteur 61	98
6.11 Identification du mode critique dans la zone 3 en fonction du capteur 121	98
6.12 Mise en avant du mode critique	99
6.13 Évolution des résultantes de corrélation pour le mode 1	101
6.14 Évolution des résultantes de corrélation sans décomposition	101
6.15 Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 29	102
6.16 Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 29	102
6.17 Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 85	103
6.18 Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 85	104
6.19 Identification des lignes d'intégration et des capteurs composant les lignes	105
6.20 Évolution des intégrales de corrélation en fonction de leurs longueurs	106
6.21 Évolution des intégrales de corrélation en fonction de leurs longueurs	106
6.22 Évolution des intégrales de corrélation en fonction de leurs longueurs	107
6.23 Intégrales de corrélation pour le capteur i	107
6.24 Capteur utilisé pour vérifier le comportement polaire des intégrales de corrélation	108
6.25 Disposition des résultantes des coefficients de pression du tableau 6.2	110
7.1 Capteur de mesures de pression de surface imaginé	116
C.1 Représentation d'une résultante dans une densité de probabilité conjointe	125
D.1 Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 25	127
D.2 Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 25	128
D.3 Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 41	128
D.4 Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 41	129

Chapitre 1

INTRODUCTION

1 Mise en situation du travail et de la problématique étudiée

L'ingénierie est une science qui cherche à résoudre des problèmes techniques qui permettent de satisfaire des besoins mis en avant par l'homme. Ce travail répond directement à cette définition : il s'intéresse au dimensionnement de structures soumises au vent. L'objectif est de réaliser une approche spatio-temporelle qui permettrait d'optimiser la méthode actuelle de dimensionnement des éléments de façade. Ce type d'approche serait très utile pour les bâtiments de grande hauteur. Une optimisation à ce niveau pourrait avoir un impact important sur les charges appliquées sur les façades et réduire leur coût de construction.

Pour dimensionner des bâtiments et des structures du génie civil, les ingénieurs travaillent avec trois méthodes principales : l'analytique, l'expérimentale (utilisation de modèles réduits en soufflerie) et la numérique (CFD). La méthode analytique utilise les formules trouvées dans les codes (en Europe : les Eurocodes et les annexes nationales [NBN EN 1991-1-4 (2004)]). Cette approche est principalement utilisée pour les ouvrages où le dimensionnement au vent n'est pas le chargement le plus dimensionnant. Dans le cas où les charges venant du vent et où le confort des utilisateurs sont importants, les bureaux d'études recourent souvent à des souffleries afin de vérifier les divers critères. La méthode numérique CFD développée ces dernières années est une modélisation des écoulements de vent. Cette approche est utilisée afin de compléter les résultats réalisés en soufflerie.

L'approche qui nous intéresse dans ce travail est la méthode de dimensionnement réalisée à l'aide de mesures de pression en soufflerie. Plus particulièrement la méthodologie utilisée pour trouver les coefficients de pression (cp) imposés sur les façades des bâtiments. L'outillage utilisé pour déterminer les coefficients de pression est constitué de capteurs de pression locaux. Les mesures obtenues grâce à ces capteurs vont être utilisées pour trouver les pressions de surface. Le problème dans le cas des essais en soufflerie, c'est qu'il est nécessaire d'avoir une infinité de capteurs pour reconstruire exactement la pression surfacique. Or, ce n'est pas réalisable dans la pratique. Par le passé, les scientifiques ont lié le caractère temporel des mesures de pression au caractère spatial afin de reconstruire les pressions sur les surfaces et de pallier le manque de capteurs. Pour relier le caractère temporel et spatial des capteurs de pression, il a été nécessaire d'utiliser un paramètre adimensionnel. La relation spatio-temporelle est reprise dans l'équation 1.1. Le paramètre K représente le paramètre adimensionnel, le paramètre V est la vitesse moyenne du vent et L est une longueur caractéristique de la structure.

$$T = KL/V \tag{1.1}$$

De nombreux chercheurs([Newberry et al. \(1973\)](#), [Cook \(1985\)](#), [Holmes \(1997\)](#), [Lawson \(1976\)](#)) se sont penchés sur ce paramètre adimensionnel et lui ont attribué une valeur de $K=4.5$. D'autres scientifiques lui ont donné des valeurs différentes : [Greenway \(1979\)](#) proposa la valeur de $K=1.2$, [Holmes \(1997\)](#) prôna la valeur $K=1$. [Amerio \(2017\)](#) a essayé dans sa thèse de doctorat d'élaborer une méthode qui permettrait d'évaluer le coefficient K dans des zones précises d'immeuble. Il a pu observer avec une concentration forte de capteurs de pression que le coefficient K n'était pas identique pour l'ensemble des zones. Des pics de pression ne respectant pas l'approche TVL, qui est utilisée pour caractériser les sous-pressions plus faibles, ont été observés. L'influence de ce paramètre adimensionnel (K) sur les coefficients de pression finaux est très importante. Le choix de ce dernier va modifier de manière considérable le coefficient de pression (cp) donné pour le dimensionnement des structures. Un autre problème, mis en avant dans la thèse d'[Amerio \(2017\)](#) au niveau des coins et des arêtes, est l'apparition de pressions fortement négatives et ayant un comportement non gaussien. Ces mesures très négatives n'ont pas toujours été observées. Elles sont apparues dans les essais en soufflerie suite à une augmentation de la fréquence de l'échantillonnage des capteurs de pression. Ces grandes pressions négatives sont étudiées depuis un certain nombre d'années par des chercheurs, comme on le constate dans l'introduction de l'article de [Rigo et al. \(2020\)](#).

Des questions complexes se posent quant à ces différentes pressions fortement négatives et non gaussiennes. Quelle méthodologie faut-il utiliser pour les traiter ? Ont-elles réellement un impact sur le dimensionnement ? Existe-t-il une corrélation spatiale entre les mesures ? Afin de répondre à ces questions, il semble nécessaire de mieux appréhender ces pressions fortement négatives.

1.1 Introduction de l'approche TVL

Afin de bien appréhender le TVL , il est nécessaire de comprendre le fondement physique se cachant derrière cette approche. L'approche TVL émet l'hypothèse que les pressions appliquées sur une surface ont une même moyenne et un même écart-type. Le seul paramètre qui va donc avoir un impact sur la reconstruction de la résultante de pression est la corrélation spatiale en fonction de la fréquence de fluctuation de la pression. Ceci peut être résumé par les équations suivantes (où μ et σ sont deux constantes) :

$$\mu_R = \frac{1}{L^2} \iint_0^L \mu_{(x,y)} dx dy \quad (1.2)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{L^4} \sigma_{(x,y)}^2 \iiint_0^L \rho_{(x,y)} dx dy dx dy \quad (1.3)$$

Afin de décrire l'approche TVL , les documents [Amerio \(2017\)](#), [Holmes \(1997\)](#), [Lawson \(1976\)](#) ont été nécessaires.

— Article de Lawson

L'approche TVL a été illustrée pour la première fois par Lawson dans l'article [Lawson \(1976\)](#). Selon lui, il était possible d'utiliser la corrélation reliant les mesures de pression en un même temps à l'aide d'une relation spatio-temporelle. Cette relation est reprise ci-dessous :

$$T = KL/V \quad (1.4)$$

Le paramètre T est le temps moyen, K est un paramètre adimensionnel, L est la plus grande longueur de la surface résultante étudiée.

Pour Lawson, le nombre de Strouhal représente la plus haute fréquence qui peut être corrélée sur un bâtiment. Il en déduit une valeur pour le paramètre K valant 4.5, sans donner de détails sur le calcul de cette valeur.

— Document de [Cook \(1985\)](#) à l'aide de la thèse d'[Amerio \(2017\)](#)

Il a fallu attendre la publication du document de Cook, selon la thèse d'[Amerio \(2017\)](#), pour avoir une description plus détaillée du travail de Lawson. L'approche utilise une fonction d'admittance unitaire pour un espace de fréquences donné. Ceci est exprimé par la relation ci-dessous :

$$\int_0^{+\infty} \chi^2(f^*) df^* = \int_0^{\bar{f}^*} 1 df^* \quad (1.5)$$

Il est possible de distinguer un espace fréquentiel entre $[0; f^*]$, où les données sont corrélées à 100%, tandis que pour des fréquences supérieures à f^* , la corrélation est nulle. Cook a pu estimer que la fréquence réduite de la surface vaut : $\frac{f^* \times L}{V} = 0.22$. Ce qui permet de déduire K :

$$t = \frac{4.5 \times L}{V} \quad (1.6)$$

Pour ce faire, il a utilisé la figure 1.1 (venant de la thèse d'[Amerio \(2017\)](#)), avec une échelle non pas logarithmique, mais linéaire.

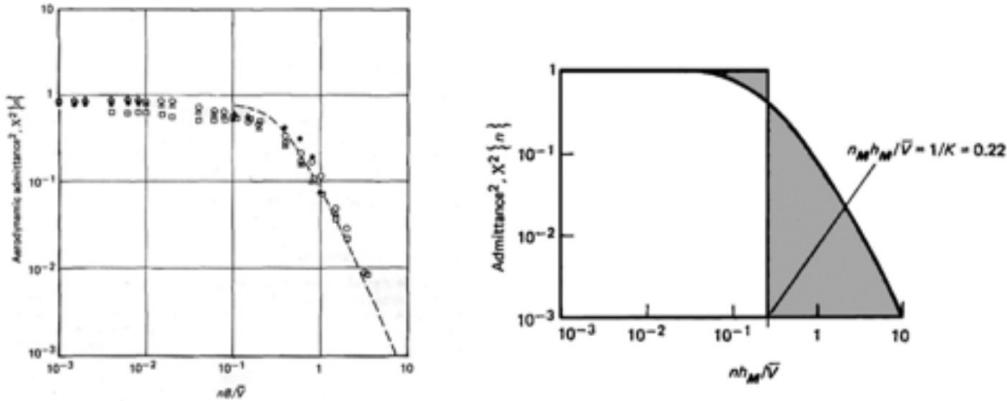


FIGURE 1.1 – La figure de gauche vient de mesures de plaques par [Bearman \(1971\)](#). La figure de droite vient de l'article de [Cook \(1985\)](#). Les deux zones grises ont la même surface.

— Document de [Holmes \(1997\)](#)

Dans ce dernier article, Holmes remet en question l'approche unitaire mise en avant dans les deux points précédents. Il préconise plutôt une fonction d'admittance variable en fonction de la fréquence des fluctuations de pression du signal et non plus une fonction d'admittance par paliers en fonction de la fréquence.

Pour l'illustrer, il exprime le co-spectrum avec l'équation suivante :

$$\gamma(n, r) = \exp(-(Knr/V)) \quad (1.7)$$

où le paramètre V représente toujours la vitesse moyenne du vent, n est la fréquence de fluctuations de pression observées, r est la distance entre les deux points corrélés observés et K est un paramètre adimensionnel.

On constate que si $r=0$, alors la corrélation observée vaut 1, ce qui a du sens. Il est possible de faire de même pour le paramètre n , qui représente les fluctuations de pression. Si $n=0$, alors, on a un signal constant sur l'ensemble de la surface observée.

Selon l'approche TVL décrite par Holmes, le co-spectrum dépend de la fréquence des fluctuations de pression. Il montre donc qu'il est possible de reconstruire la densité spectrale de puissance d'une surface en multipliant la densité spectrale de puissance d'un point avec l'admittance aérodynamique. L'admittance aérodynamique est obtenue en intégrant doublement sur une surface donnée le co-spectrum. Holmes donne la formulation suivante pour une surface $b \times h$:

$$\begin{aligned}\chi^2(n) &= (1/bh)^2 \int_0^b \int_0^b \int_0^h \int_0^h \gamma \left(n, \sqrt{[(y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2]} \right) dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 \\ &= 4 \int_0^b \int_0^h [1 - (y/b)] \times [1 - (z/h)] \exp \left\{ - \left(b \sqrt{[(1/h)^2 + (z/h)^2 (h/b)^2]} \right) \right\} d(y/b) d(z/h)\end{aligned}\quad (1.8)$$

L'objectif, dans l'article de Holmes, est d'obtenir un paramètre K qui va permettre de trouver la meilleure relation entre la fonction d'admittance aérodynamique et celle du "filtre de déplacement moyen". Il décrit le filtre de déplacement moyen avec la formule suivante :

$$\psi^2(n, \tau) = [\sin(\pi n \tau) / (\pi n \tau)]^2 \quad (1.9)$$

Holmes propose de déterminer le paramètre adimensionnel en réalisant une équivalence entre l'admittance aérodynamique calculée et le déplacement moyen pour une admittance aérodynamique de moitié. Ceci est illustré sur la figure 1.2, venant de l'article de [Holmes \(1997\)](#).

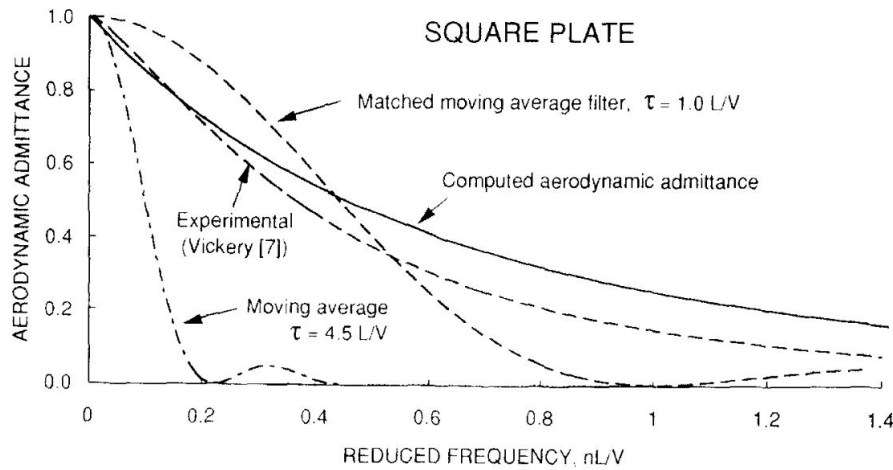


FIGURE 1.2 – Admittance aérodynamique et déplacement équivalent moyen pour une surface

On peut rapidement distinguer que le facteur adimensionnel $K=4.5$ néglige fortement l'admittance aérodynamique. Pour le filtre de déplacement moyen, Holmes a utilisé un paramètre adimensionnel K qui vaut 1.

On observe que la fonction d'admittance aérodynamique correspond bien aux résultats expérimentaux obtenus par Vickery.

1.2 Recherche réalisée à Liège et apport personnel

Cette problématique de reconstruction de signaux au niveau des coins des façades est étudiée par l'Université de Liège depuis un certain nombre d'années et ce travail s'inscrit dans cette

continuité. Une nouvelle approche a été imaginée par professeur Vincent Denoël. Cette approche n'est pas basée sur un paramètre adimensionnel, mais sur les propriétés statistiques des différents points de mesures. Il sera donc nécessaire de déterminer les statistiques unilatérales et corrélées pour l'ensemble des points de mesures.

Ce travail va être développé dans le cadre de mesures sur un coin de toit plat en soufflerie à l'Université de Liège. Les mesures sur ce toit de bâtiment ont été réalisées dans le cadre de la thèse de doctorat de [Blaise \(2016\)](#). Elles ont été aussi utilisées dans les travaux de [Rigo et al. \(2020\)](#) et [Bourcy \(2020\)](#). Un détail de ces dernières est donné dans la section 3.

Comme spécifié ci-dessus, des chercheurs de l'Université de Liège se sont penchés sur ce problème ces dernières années. Les méthodes qui ont été développées sont basées sur la décomposition des densités de probabilité des mesures de pression en deux densités composant le mélange. Les différentes méthodes de décomposition sont reprises ci-dessous.

La première méthode a été développée et publiée dans un article scientifique par [Rigo et al. \(2020\)](#). Elle est basée sur une analyse fréquentielle. En traitant le signal avec deux courbes d'autocorrélation dans le temps, il est possible de séparer le signal en deux modes. À travers cette décomposition, on constate que les variations de pression créées par la turbulence et par les tourbillons de coin opèrent à des fréquences distinctes et qu'il est donc possible de séparer les deux signaux en utilisant un filtre fréquentiel.

La deuxième méthode a été élaborée par Carole Bourcy lors de son travail de fin d'études [Bourcy \(2020\)](#). Elle a réalisé la décomposition des différentes densités de probabilité à l'aide de densités de probabilité normales. Elle a pu, de cette manière, obtenir des décompositions intéressantes pour les statistiques unilatérales et corrélées. La qualité des résultats obtenus a incité à approfondir l'étude.

Une troisième méthode est décrite dans l'article de [Xie et Huang \(2021\)](#). Ils y ont décrit un algorithme de décomposition qui utilise le comportement des queues de distribution des densités de probabilité mélangées.

Dans le cadre de ce travail, une nouvelle méthode a été étudiée. C'est une décomposition des densités de probabilité des signaux utilisant des densités de probabilité normales transformées par une fonction cubique. Cette décomposition permet d'obtenir 2 composantes et de contrôler les paramètres les définissant. Des densités de probabilité pour un signal, des densités de probabilité corrélées et des densités de probabilité tri-variées ont été étudiées à l'aide de cette décomposition. Les points importants qui ont été abordés et développés personnellement dans ce travail sont :

- Le développement, l'application et la limitation d'une méthode (algorithme) de décomposition de signaux ayant une densité de probabilité mélangée par deux densités de probabilité normales transformées par une cubique. Cette méthode est développée en fonction des statistiques unilatérales, des statistiques corrélées et de la tri-corrélation des densités de probabilité.
- Application de l'algorithme aux mesures de soufflerie et interprétation des résultats.
- Étude d'intégrales de corrélation pour des dispositions spatiales différentes des capteurs.
- Étude d'intégrales de covariance et reconstruction de coefficients de pression sur des surfaces.

2 Motivation pour développer un algorithme de dé-mixage

Afin d'illustrer l'utilité d'un algorithme de dé-mixage, il est nécessaire de comprendre les problématiques qui apparaissent lorsqu'aucun algorithme de dé-mixage n'est disponible et l'impact que cela engendre sur le dimensionnement au vent.

2.1 Facteur de pointe pour un capteur

Selon l'article de [Kareem et Zhao \(1994\)](#), il est possible de trouver une charge statique équivalente à l'aide du paramètre g_{nl} et de la moyenne et de l'écart-type des mesures de pression. Le paramètre g_{nl} sera déterminé à l'aide de l'équation :

$$g_{NL} = \alpha \left\{ \left(\beta + \frac{\gamma}{\beta} \right) + h_3 (\beta^2 + 2\gamma - 1) + h_4 \times \left[\beta^3 + 3\beta(\gamma - 1) + \frac{3}{\beta} \left(\frac{\pi^2}{12} - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (1.10)$$

où $\beta = \sqrt{2 \ln(\nu_o T)}$. Les paramètres (α, h_3, h_4) sont des paramètres de la transformation cubique. Les paramètres ν_o et T dépendent directement des valeurs des Eurocodes. Le paramètre γ est pris équivalent à 0.6 dans les Eurocodes ([NBN EN 1991-1-4 (2004)]) et équivalent à 0.5772 dans l'article de [Kareem et Zhao \(1994\)](#).

Le problème avec cette méthodologie, c'est que, pour certaines mesures en soufflerie, un comportement de densités de probabilité mélangées est observé. Utiliser une approche avec des densités de probabilité non mélangées engendrera des erreurs dans les résultats. La figure 1.3 illustre cette problématique avec une densité de probabilité composée d'un mélange nettement visible.

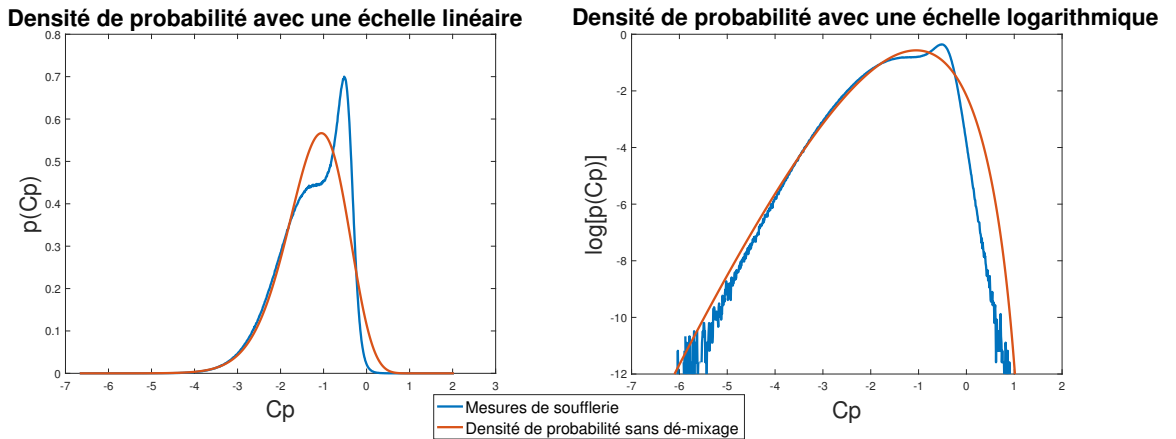


FIGURE 1.3 – Approche de signaux de soufflerie avec une densité de probabilité normale transformée avec une cubique

Il a été possible d'observer pour certains capteurs des moments d'ordre 3 et 4 ne permettant pas d'utiliser une transformation cubique (problématique avec le critère de Winterstein). Cette problématique a été aussi observée dans les travaux de [Rigo et al. \(2020\)](#). Il est donc nécessaire d'utiliser un dé-mixage de la densité de probabilité.

2.2 Calcul de résultantes de pression

Afin de calculer les résultantes de pression pour une surface, il est nécessaire de connaître les propriétés statistiques unilatérales de chacun des signaux. Mais, il est surtout important de connaître les statistiques croisées, représentant les corrélations entre les capteurs. La connaissance des statistiques croisées de manière spatiale est le fondement de l'approche TVL. Si aucun code de dé-mixage n'est utilisé, il est possible de montrer à l'aide de la figure 1.4 que les propriétés statistiques ne permettent pas de réaliser une reconstruction fiable de l'histogramme croisé entre les deux capteurs, mais uniquement d'approcher le comportement moyen.

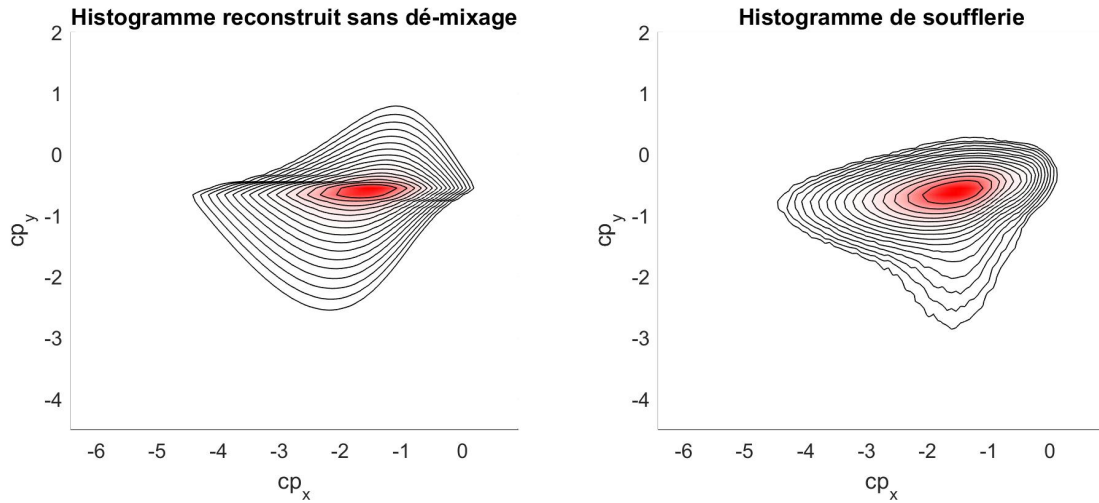


FIGURE 1.4 – Histogramme croisé sans l'utilisation d'un algorithme de dé-mixage

Il sera donc utile d'utiliser un dé-mixage de manière à pouvoir séparer des comportements différents dans une densité de probabilité conjointe. Il serait possible d'avoir par exemple une forte corrélation pour des sous-pressions faibles et au contraire, une corrélation faible pour les grandes sous-pressions. La corrélation sans dé-mixage serait donc fortement surévaluée pour les grandes sous-pressions. Dans le cas contraire, une mauvaise estimation de la corrélation pourrait sous-évaluer les pressions résultantes.

3 Mesures en soufflerie utilisées pour ce travail

Les données en soufflerie qui ont été utilisées pour ce travail ont été réalisées par [Blaise *et al.* \(2017\)](#). Le document utilisé afin de décrire ces essais en soufflerie est l'article de [Rigo *et al.* \(2020\)](#). À travers cette courte section, un rapide résumé va traiter de la façon dont les mesures ont été réalisées, afin de faciliter la compréhension du travail. Dans un deuxième temps, les résultats obtenus en soufflerie vont être présentés.

3.1 Protocole des essais en soufflerie

Les mesures ont été réalisées sur un modèle réduit en soufflerie. Il représente dans la réalité un bâtiment carré de 45 m de côté et d'une hauteur de 25 m. Il a été disposé en soufflerie comme

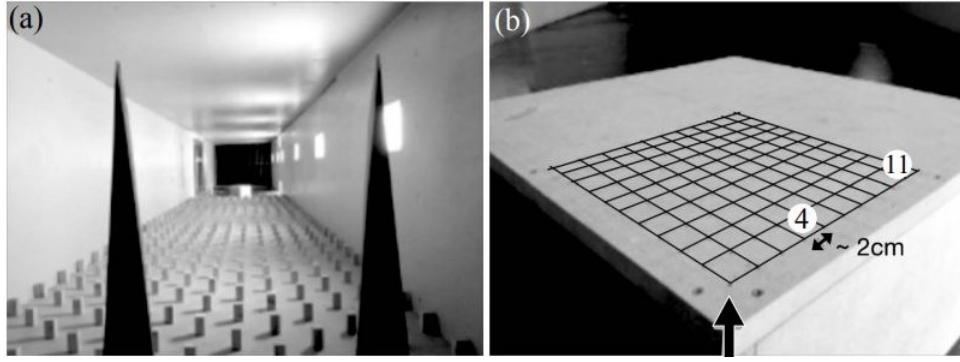


FIGURE 1.5 – Images des essais en soufflerie, venant de l'article [Rigo et al. \(2020\)](#)

sur la figure 1.5. Le coin du bâtiment sera orienté directement dans le sens de l'écoulement du vent. Des capteurs de pression ont été disposés sur le toit afin de mesurer les pressions de vent. Il y en a 121, en 11 lignes et 11 colonnes. L'espacement entre les capteurs est homogène dans les deux directions des arêtes du toit du bâtiment. L'espacement des capteurs est de 2 cm et ils ont une fréquence d'échantillonnage de 500Hz.

Un traitement des données de soufflerie a dû être réalisé afin de trouver les pressions statiques des capteurs. Pour trouver ces pressions statiques, les résultats ont été corrigés dynamiquement par la formulation théorique de [Bergh et Tjrdeman \(1965\)](#) ainsi que par le travail expérimental de [Rigo \(2017\)](#).

Le vent qui a été généré par la soufflerie est de catégorie 3 selon l'Eurocode ([NBN EN 1991-1-4 (2004)]). Sa vitesse moyenne est donnée par la formule suivante de l'Eurocode (avec $z_0 = 0.3m$ et $z_{min} = 0.5m$) :

$$U_{\infty}(z) = U_{ref} 0.19 (20z_0)^{0.07} \log \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (1.11)$$

Il a été nécessaire de disposer des petits blocs en amont du bâtiment afin de générer un vent turbulent et non laminaire. Dans le cadre de ce travail, l'impact de bâtiments connexes ne sera pas étudié. On a donc émis une première hypothèse d'un bâtiment unique et isolé.

Les résultats obtenus sont donnés dans la suite de l'étude non pas en termes de pressions mesurées par les capteurs mais en coefficients de pression (cp). Le passage des mesures de pression aux coefficients de pression est réalisé à l'aide de l'équation :

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} \quad (1.12)$$

L'ensemble des paramètres permettant de passer au coefficient de pression est connu. La vitesse du vent, selon l'échelle réelle, pour la catégorie 3 est de 26m/s (vitesse à la hauteur du toit). Pour réaliser le modèle, un facteur de mise à l'échelle de 3.5 a été utilisé. Le paramètre U_{∞} vaut donc : $24/3.5 = 6.86$ m/s. La masse volumique de l'air vaut : $\rho = 1.225 kg/m^3$. Enfin, $p - p_{\infty}$ est la pression mesurée par les capteurs. Le cp est paramètre adimensionnel et est utilisé dans l'Eurocode [NBN EN 1991-1-4 (2004)] afin de réaliser le dimensionnement au vent.

3.2 Données de soufflerie

Une fois que les traitements du protocole de laboratoire ont été réalisés sur les mesures des capteurs de pression, il est possible de générer les densités de probabilité relatives à chacun des 121 capteurs de pression. Dans le cadre de ce travail, les mesures qui nous intéressent sont

surtout celles situées en queue de distribution. Pour cette raison, les différentes densités de probabilité seront présentées selon l'échelle linéaire, mais aussi selon l'échelle logarithmique. Les densités de probabilité selon les deux échelles sont reprises dans les figures 1.6 et 1.7. Les densités de probabilité représentées avec une échelle linéaire ont été normalisées afin de mieux observer les résultats, même pour des distributions fortement dispersées. Pour les densités de probabilité avec une échelle logarithmique, ce traitement n'a pas été nécessaire. Sur les deux figures, le coin directement opposé au vent se situe au capteur ligne 1 et colonne 1.

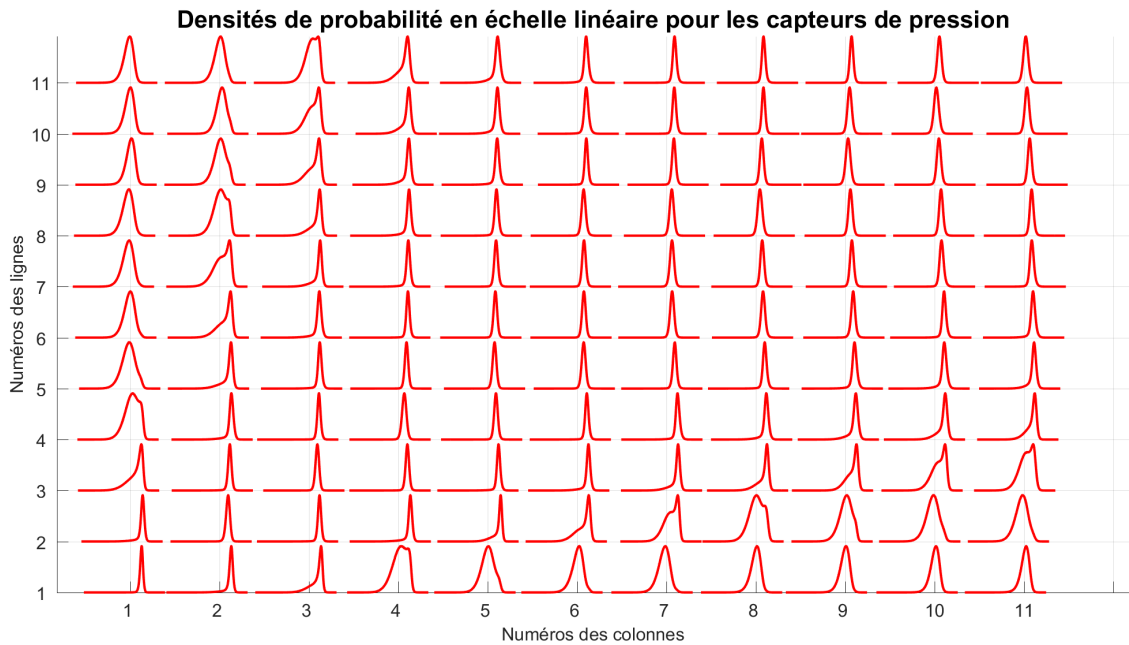


FIGURE 1.6 – Densités de probabilité des 121 capteurs pour une échelle linéaire

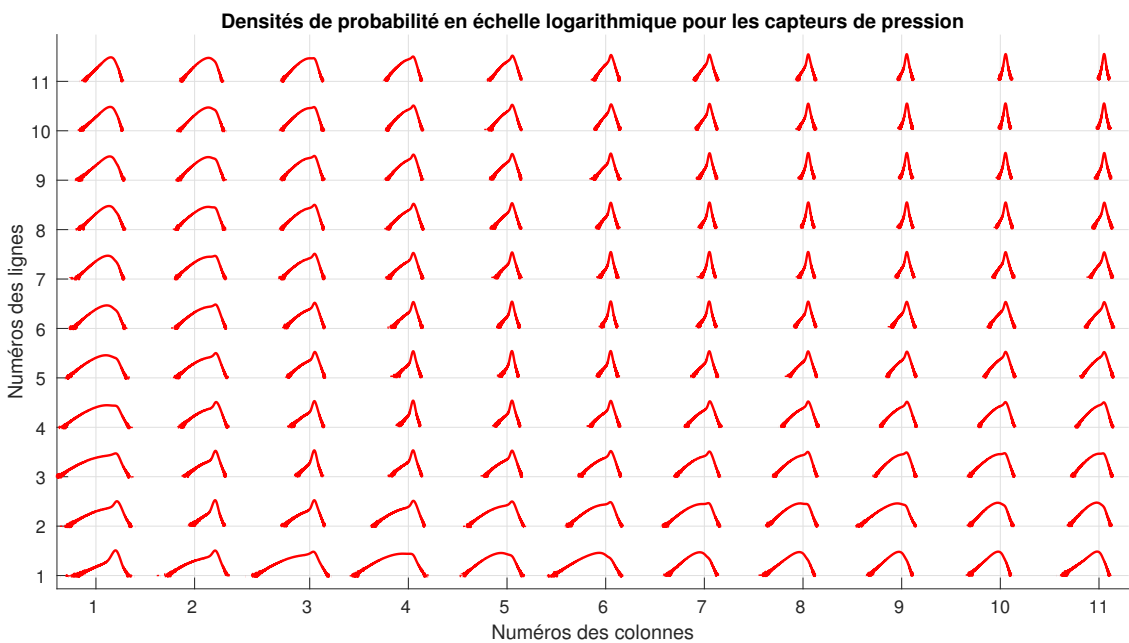


FIGURE 1.7 – Densités de probabilité des 121 capteurs pour une échelle logarithmique

On peut observer que les capteurs de pression respectent une symétrie par rapport à la diagonale. Cette observation a du sens au vu du choix de l'orientation du bâtiment. On peut voir

sur la figure 1.6 que les densités de probabilité ne sont pas unimodales dans l'ensemble des cas. On observe que certaines densités de probabilité sont composées de 2 pics et que certaines densités de probabilité sont fortement décentrées. Au vu des observations réalisées sur les divers moments statistiques dans le chapitre 2, on peut se douter que les densités de probabilité qui serviront à recomposer le signal n'auront pas un skewness nul.

Il est aussi intéressant d'observer les évolutions spatiales des statistiques unilatérales des différents capteurs de pression. Elles ont été reportées sur la figure 1.8. Le caractère de symétrie est observable pour les différents moments statistiques unilatéraux. Cependant, ce qui nous intéresse ici, ce sont les pics de pression observés dans certaines zones. Ils sont créés par des tourbillons de coin. Ces derniers se développent avec un angle de 30° par rapport aux 2 arêtes soumises directement au vent. Ce phénomène est bien illustré par la figure 1.9, obtenue dans le document Banks *et al.* (2000).

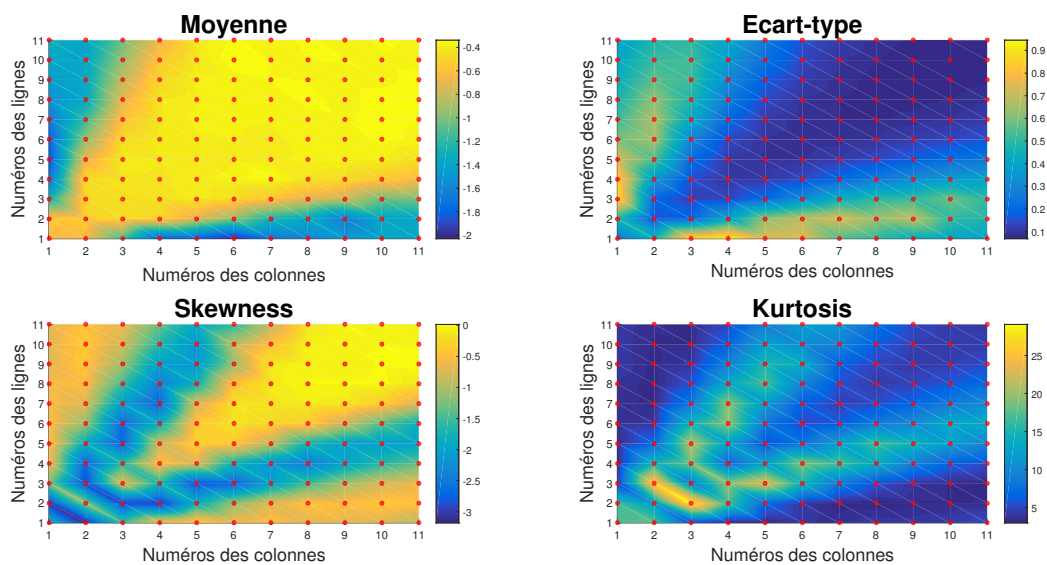


FIGURE 1.8 – Moments statistiques sur la surface du toit

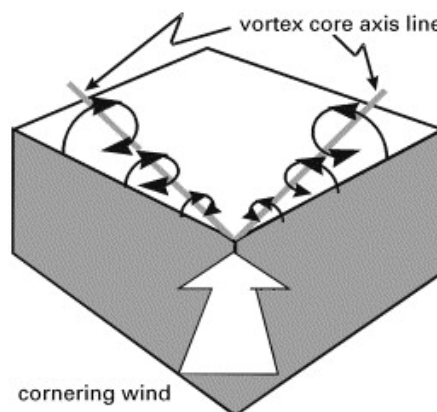


FIGURE 1.9 – Développement de tourbillons de coin, figure de l'article Banks *et al.* (2000)

Chapitre 2

NOTIONS MATHÉMATIQUES

À travers ce travail de fin d'études, un grand nombre de notions mathématiques sont abordées. Dans ce chapitre, l'ensemble de ces notions mathématiques va être introduit. Il s'agit des moments statistiques, de mélange de densités de probabilité et des densités de probabilité transformées par une fonction cubique. Une contribution personnelle sera apportée au modèle cubique, en donnant le raisonnement pour la tri-cubique. Pour finir, la méthode utilisée pour la génération d'un histogramme à partir d'un signal discrétisé sera illustrée ainsi que la méthode pour déterminer la position des pics des densités de probabilité.

1 Moments statistiques

Un algorithme a été développé afin d'approcher des densités de probabilité en utilisant comme paramètres les différents moments statistiques. L'étude des moments statistiques a été réalisée sans aucune variation temporelle entre les mesures de pression des capteurs. L'algorithme développé est stratifié en plusieurs étapes. Les différents paramètres trouvés dans les étapes seront utilisés pour les étapes successives :

- La première étape concerne le calcul des statistiques unilatérales, dépendant d'un signal unique. Il est possible de déterminer les paramètres suivants : moyenne, écart-type, skewness et kurtosis.
- Une deuxième étape consiste à calculer les statistiques croisées, dépendant de 2 signaux. Il est possible de déterminer les différentes corrélations reliant les signaux entre eux, deux par deux.
- Une troisième étape visera à calculer les coefficients de pondération pour la triple corrélation, dépendant de 3 signaux. La triple corrélation n'utilise que les moments statistiques obtenus par les statistiques unilatérales et croisées. Elle n'introduira qu'un nouveau facteur de pondération.

Le choix des paramètres à déterminer pour l'ensemble des densités de probabilité a été opéré à l'aide de la formulation analytique pour l'ensemble des étapes. Il a pu être confirmé par les travaux de [Blaise \(2016\)](#) et [Blaise *et al.* \(2017\)](#). Les différents moments à déterminer sont repris ci-dessous :

- 1 signal : moyenne, écart-type, skewness, kurtosis
- 2 signaux : covariance (nécessite les statistiques unilatérales pour chacun des deux signaux)

Un rappel relatif aux moments statistiques a été réalisé ci-dessous à l'aide du cours de Stochastique, du professeur [Denoël \(2013\)](#). L'ensemble des notions illustrées sera utilisé pour une grande partie de la suite du document.

1.1 Statistiques unilatérales

1.1.1 Moment d'ordre 1

Le moment de premier ordre est la moyenne. La moyenne temporelle est analytiquement calculée à l'aide d'une intégrale. Dans la pratique, les mesures obtenues par les différents capteurs de pression sont des mesures discrétisées dans le temps. Il convient de ne pas utiliser une intégrale temporelle mais plutôt une somme de l'ensemble des mesures discrétisées en un point donné. Voir équation [2.1](#).

$$\mu_{x_i} = E[x_i] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i(k) \quad (2.1)$$

Une modification du paramètre de la moyenne pour une densité de probabilité agit comme une translation de la densité de probabilité. La figure [2.1](#) montre cet effet avec une densité de probabilité normale ayant un écart-type unitaire.

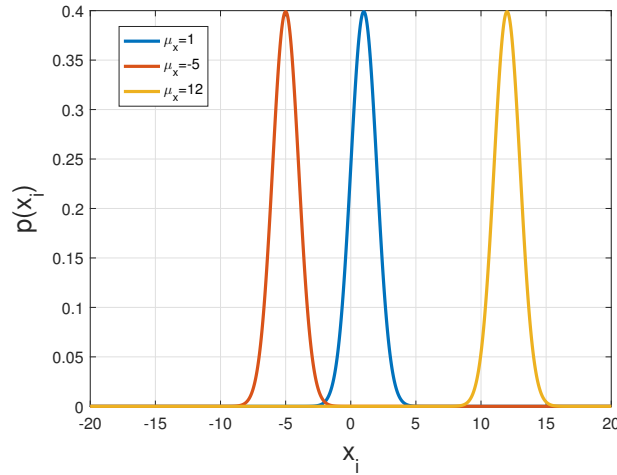


FIGURE 2.1 – Influence de la moyenne sur les densités de probabilité

1.1.2 Moment d'ordre 2

Le moment centré d'ordre 2 représente la variance. Celle-ci est équivalente à l'écart-type pris au carré et est déterminée analytiquement à l'aide d'une intégrale. Cependant, les résultats mesurés sont des valeurs discrétisées. Il est donc nécessaire d'utiliser la définition de l'équation [2.2](#).

$$Var_{x_i} = \sigma_{x_i}^2 = E[(x_i - \mu_{x_i})^2] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_i(k) - \mu_{x_i})^2 \quad (2.2)$$

La modification de l'écart-type, et donc de la variance, va avoir un effet d'échelle sur les densités de probabilité. Un écart-type important signifie une dispersion importante des résultats. Cet effet est mis en avant par la figure [2.2](#) pour des densités de probabilité normales avec une moyenne nulle.

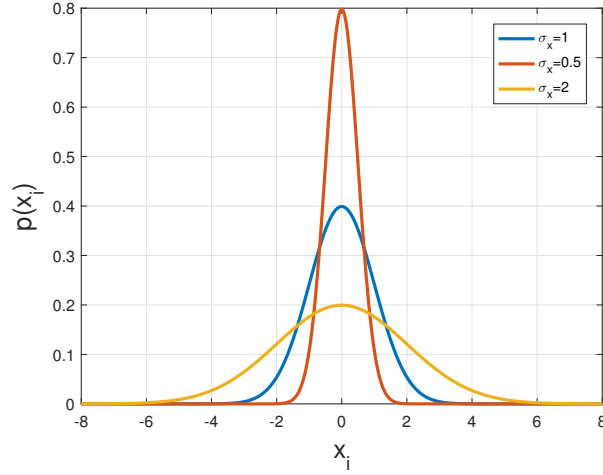


FIGURE 2.2 – Influence de l'écart-type (de la variance) sur les densités de probabilité

1.1.3 Moment d'ordre 3

Le moment centré d'ordre 3 permet de calculer le skewness, qui est un paramètre adimensionnel. Pour le trouver, il suffit de diviser le moment d'ordre 3 par l'écart-type au cube. La formulation discrétisée est reprise à l'équation 2.3. Elle est nécessaire vu le type de mesures obtenues par les capteurs.

$$\gamma_{3,x_i} = \frac{E[(x_i - \mu_{x_i})^3]}{\sigma_{x_i}^3} = \frac{1}{N \times \sigma_{x_i}^3} \sum_{k=1}^N (x_i(k) - \mu_{x_i})^3 \quad (2.3)$$

Le skewness représente l'asymétrie d'une densité de probabilité. Le décentrement peut être appliqué aussi bien à droite qu'à gauche. Le skewness pourra donc logiquement prendre une valeur négative ou positive. La figure 2.3 représente l'effet d'une modification du skewness.

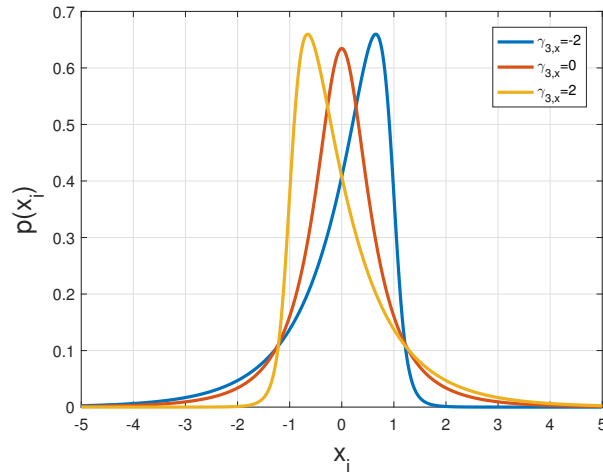


FIGURE 2.3 – Influence du skewness sur les densités de probabilité

1.1.4 Moment d'ordre 4

Le moment centré d'ordre 4 permet de trouver le kurtosis. Comme le skewness, il s'agit d'un paramètre adimensionnel. Il est trouvé en divisant le moment d'ordre 4 par l'écart-type exposé en 4. Dans la littérature, on fait appel à deux types de kurtosis : le kurtosis normalisé et le

non normalisé. Le kurtosis non normalisé est celui qui est retenu pour ce travail. Le kurtosis normalisé est obtenu en retirant 3 au kurtosis non normalisé.

L'écriture de l'équation discrétisée permettant d'obtenir le kurtosis est reprise à l'équation 2.4.

$$\gamma_{4,x_i} = \frac{E[(x_i - \mu_{x_i})^4]}{\sigma_{x_i}^4} = \frac{1}{N \times \sigma_{x_i}^4} \sum_{k=1}^N (x_i(k) - \mu_{x_i})^4 \quad (2.4)$$

Le kurtosis est le paramètre qui va influencer l'aplatissement du signal. De cette manière, il est possible de modifier la distribution en queue de distribution. La figure 2.4 représente ce comportement. On modifie le kurtosis d'un signal ayant une moyenne nulle, un écart-type unitaire et un skewness nul.

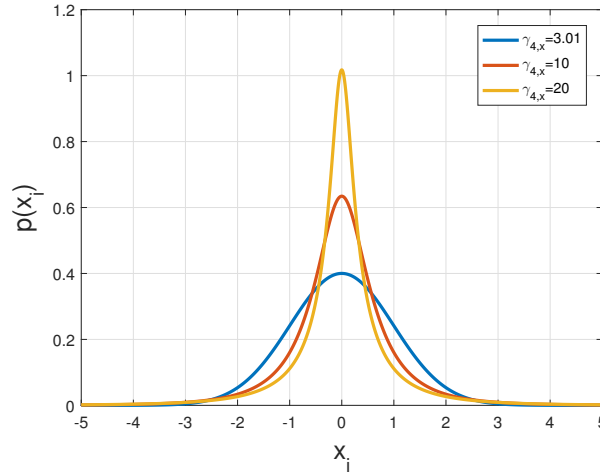


FIGURE 2.4 – Influence du kurtosis sur les densités de probabilité

1.2 Statistiques croisées

1.2.1 Covariance et corrélation

La covariance est une valeur qui représente la relation entre deux signaux mesurés. C'est un moment statistique non normalisé. La covariance normalisée est appelée la corrélation. La corrélation est comprise entre -1 et 1 (la covariance n'est pas bornée). La covariance est calculée avec une notation discrétisée comme dans l'équation 2.5.

$$Var_{x_i,x_j} = E[(x_i - \mu_{x_i})(x_j - \mu_{x_j})] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_i(k) - \mu_{x_i})(x_j(k) - \mu_{x_j}) \quad (2.5)$$

Afin de normaliser la covariance et de trouver la corrélation (ρ), il a été nécessaire de réaliser l'opération reprise ci-dessous :

$$\rho_{x_i,x_j} = \frac{Var_{x_i,x_j}}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}} \quad (2.6)$$

La figure 2.5 montre l'effet de la corrélation sur les données. De manière à pouvoir représenter différentes corrélations sur une même figure, les moyennes pour une combinaison de 2 signaux ayant une corrélation différente varient pour obtenir des champs de points distincts. Les densités de probabilité utilisées dans la figure 2.5 sont des densités de probabilité normales standard (écart-type unitaire, skewness nul et kurtosis non normalisé valant 3).

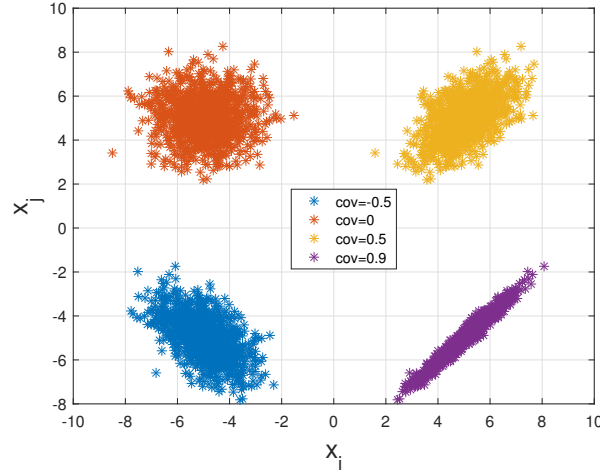


FIGURE 2.5 – Influence de la corrélation sur les densités de probabilité conjointes

La corrélation va influencer la dispersion des résultats, comme on peut le voir sur la figure 2.5. La modification du signe de la corrélation va fortement impacter la densité de probabilité conjointe. Il sera possible d'observer que pour une corrélation positive, les valeurs importantes seront fortement corrélées pour les deux signaux, tandis que pour une corrélation négative, les faibles valeurs d'un signal seront fortement corrélées avec les valeurs plus importantes de l'autre signal. Plus la corrélation est importante, plus la dispersion des résultats est faible. Les résultats seront donc fortement corrélés. On peut observer que pour une corrélation nulle, on a un nuage de points, tandis qu'avec une corrélation qui approche de l'unité, on tend vers une ligne.

2 Mixing process

Dans cette section, il sera discuté des propriétés statistiques d'un mélange de deux densités de probabilité non mélangées. Pour analyser au mieux un signal avec une densité de probabilité mélangée, il est important de pouvoir reconstruire les deux densités de probabilité qui composent le mélange. Il existe un certain nombre de relations qui font le lien entre les propriétés de la densité de probabilité du mélange et les deux densités de probabilité qui le composent. La première relation est celle qui relie la probabilité d'observer un événement donné pour la densité de probabilité de mélange (p) et la probabilité d'observer ce même événement pour les deux densités de probabilité (p_1 et p_2) qui le constituent. Cette relation est reprise dans l'équation 2.7. On a un facteur π permettant de contrôler la pondération entre les deux densités de probabilité reconstruisant le mélange.

$$p = \pi \times p_1 + (1 - \pi) \times p_2 \quad (2.7)$$

On respecte toujours bien l'intégrale unitaire sous la densité de probabilité car la somme des deux facteurs de pondération (π et $(1 - \pi)$) vaut 1.

En utilisant ce type de mélange pour les moments statistiques, on peut trouver une relation entre les moments du signal de mélange et les deux densités de probabilité qui le composent. Les relations ont été trouvées dans le livre d'Everitt et Hand (1981) et sont reprises dans le

système d'équations 2.8. Les paramètres δ_i sont donnés par la relation suivante : $\delta_i = \mu_i - \mu$.

$$\begin{cases} \mu = \pi\mu_1 + (1 - \pi)\mu_2 \\ \sigma^2 = \pi(\sigma_1^2 + \delta_1^2) + (1 - \pi)(\sigma_2^2 + \delta_2^2) \\ \gamma_3\sigma^3 = \pi(\gamma_{3,1}\sigma_1^3 + 3\delta_1\sigma_1^2 + \delta_1^3) + (1 - \pi)(\gamma_{3,2}\sigma_2^3 + 3\delta_2\sigma_2^2 + \delta_2^3) \\ \gamma_4\sigma^4 = \pi(\gamma_{4,1}\sigma_1^4 + 4\delta_1\gamma_{3,1}\sigma_1^3 + 6\delta_1^2\sigma_1^2 + \delta_1^4) + (1 - \pi)(\gamma_{4,2}\sigma_2^4 + 4\delta_2\gamma_{3,2}\sigma_2^3 + 6\delta_2^2\sigma_2^2 + \delta_2^4) \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans ces 4 équations, on fait appel à différents moments statistiques qui sont détaillés dans la section 1.1. Le paramètre μ est l'annotation utilisée pour la moyenne ; le paramètre σ pour l'écart-type ; le paramètre γ_3 pour le skewness et le paramètre γ_4 pour le kurtosis non normalisé.

N'ayant pas trouvé de démonstration de ces différentes relations, je les ai développées dans l'annexe A.

3 La transformation cubique

3.1 Introduction

Dans ce travail, les densités de probabilité étudiées vont être approchées par des densités de probabilité normales transformées par une fonction cubique monotétement croissante. Ces densités de probabilité ont été décrites et développées dans la thèse de Blaise (2016).

Une densité de probabilité transformée par une fonction cubique monotétement croissante est, comme son nom l'indique, une densité de probabilité normale qui a été multipliée par une fonction de transformation monotonique cubique. En fonctionnant de cette manière, il est possible de trouver une densité de probabilité pour laquelle on peut contrôler et modifier les moments d'ordre 3 et 4 (le skewness et le kurtosis). La figure 2.6 représente une fonction de transformation monotonique et cubique. Cette fonction a été appliquée sur une densité de probabilité normale de moyenne nulle et d'écart-type unitaire. On trouve après transformation la nouvelle densité de probabilité.

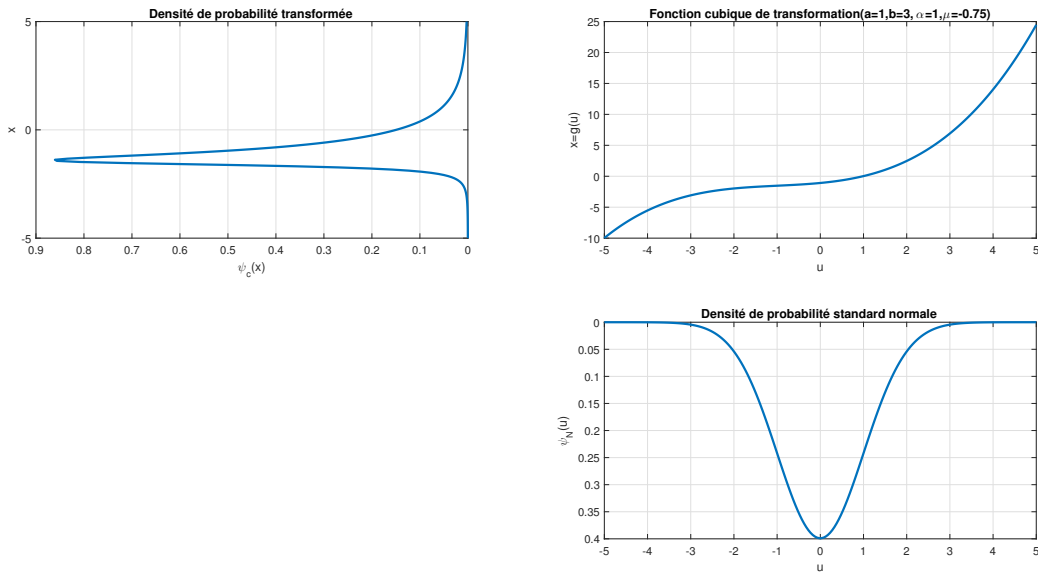


FIGURE 2.6 – Représentation de la fonction de transformation monotonique et cubique

La fonction de transformation peut être écrite mathématiquement comme la fonction g telle que $x = g(u)$. La fonction complète est reprise dans l'équation 2.9. Cette fonction va changer la concentration et la localisation des réalisations u d'une loi normale standard.

$$x = \frac{\alpha}{b} \times \left(\frac{u^3}{3} + a \times u^2 + (b-1) \times u - a \right) + \mu \quad (2.9)$$

La fonction 2.9 dépend de 4 paramètres : α, a, b, μ . Cette fonction est cubique car l'exposant supérieur de la fonction vaut 3 (u^3).

3.2 Condition de monoticité

Pour que la fonction soit monotétement croissante, il est nécessaire d'imposer la condition donnée à l'équation 2.10.

$$b - 1 - a^2 \geq 0 \quad (2.10)$$

La condition de monoticité de l'équation 2.10 peut facilement être prouvée. Elle vient du fait que pour chaque $x=g(u)$, il n'existe qu'un seul u correspondant. Ceci ne peut être le cas que si la pente de la fonction cubique (2.9) n'est jamais nulle. On doit trouver les paramètres (α, a, b, μ) pour lesquels la dérivée de la fonction $g(u)$ ne vaut jamais 0. La dérivée $g'(u)$ est donnée dans l'équation 2.11. Pour ne pas avoir de racine réelle, signifiant une pente nulle, on doit respecter la condition que l'équation 2.12 soit négative. Ce qui revient au critère de l'équation 2.10.

$$g'(u) = \frac{\alpha}{b} \times (u^2 + 2 \times a \times u + (b-1)) \quad (2.11)$$

$$\rho = \left(\frac{\alpha}{b} \right)^2 \times (4 \times a^2 - 4 \times (b-1)) \quad (2.12)$$

3.3 Fonction inverse cubique

Si la condition de monoticité est respectée, il est possible de retrouver la fonction inverse qui permettra de calculer $u(x) = g^{-1}(x)$. Sachant que $g(\cdot)$ est monotone, il en résulte que pour chaque x , il existe une seule racine réelle qui donne un u correspondant. Pour trouver cette racine, la formule de Cardan (trouvée dans le document ZUCKER (2008)) va être utilisée. Selon Cardan, on peut trouver la solution analytique u pour un x donné grâce à l'équation 2.13, où le paramètre q dépend de x .

$$u(x) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - a \quad (2.13)$$

Le paramètre p est donné dans l'équation 2.14 et le paramètre q est donné dans l'équation 2.15.

$$p = \frac{(b-1) - a^2}{1/3} \quad (2.14)$$

$$q = 2a^3 - 3a(b-1) + 3(-a + \frac{b}{\alpha}(m-x)) \quad (2.15)$$

3.4 Transformation cubique

Pour une densité de probabilité normale standard (moyenne nulle et écart-type unitaire), il est possible de calculer la probabilité relative d'avoir un événement dans le voisinage de u à l'aide de la formule de l'équation 2.16.

$$\psi_N(u) = \frac{e^{-0.5 \times u^2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.16)$$

Pour une densité de probabilité obtenue à l'aide de la fonction de transformation cubique, la probabilité d'observer un événement x est donnée par la formule de l'équation 2.17. Pour calculer cette probabilité, il est donc nécessaire d'avoir l'équation 2.13 ainsi que sa dérivée par rapport à x . La dérivée de la réalisation $u(x)$ est donnée dans l'équation 2.18.

$$\psi_C(x) = \psi_N(u(x)) \times u'(x) \quad (2.17)$$

$$u' = \frac{\frac{1.5b}{\alpha} - \frac{0.75b \times q}{\alpha \times \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{3(\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}})^{2/3}} + \frac{\frac{1.5b}{\alpha} + \frac{0.75b \times q}{\alpha \times \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{3(\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}})^{2/3}} \quad (2.18)$$

Dans l'équation 2.17, il est nécessaire d'utiliser la dérivée de la réalisation $u(x)$. Ceci vient du théorème sur la transformation d'une variable aléatoire continue. La formulation est reprise dans la thèse de Blaise (2016) et dans l'article de Kareem et Zhao (1994).

3.5 Transformation bi-cubique

La probabilité d'observer un événement (u,v) dans une densité de probabilité conjointe dont les deux signaux sont normaux standard est donnée par l'équation 2.19.

$$\psi_N(u, v) = \frac{e^{\frac{-0.5}{(1-\rho_{u,v}^2)} \times (u^2 - 2\rho_{u,v} \times u \times v + v^2)}}{2\pi \times \sqrt{1 - \rho_{u,v}^2}} \quad (2.19)$$

Pour trouver la probabilité obtenue pour un événement (x,y) dans une densité de probabilité de dimension 2 créée par deux signaux ayant une densité de probabilité normale et modifiée par une fonction de transformation cubique, il faut utiliser la formule de l'équation 2.20.

$$\psi_C(x, y) = \psi_N(u(x), v(y)) \times u'(x) \times v'(y) \quad (2.20)$$

La corrélation entre les deux signaux normaux standard est traduite par le paramètre ρ_{uv} pour les signaux non transformés. Cependant, la corrélation (ρ_{xy}) mesurée pour la densité de probabilité transformée par une fonction cubique est différente de la corrélation appliquée sur les deux signaux normaux (ρ_{uv}). La relation permettant de faire le lien entre ρ_{uv} et ρ_{xy} est donnée dans l'équation 2.21.

$$\rho_{xy} = \frac{\alpha_u \alpha_v}{\sigma_x \sigma_y} \rho_{uv} \left(1 + \frac{2a_u a_v}{b_u b_v} \rho_{uv} + \frac{2}{3b_u b_v} \rho_{uv}^2 \right) \quad (2.21)$$

Dans le cadre de ce travail, il sera plus intéressant de pouvoir trouver le ρ_{uv} correspondant à un ρ_{xy} donné. Pour y arriver, il est nécessaire de trouver la racine réelle, ρ_{uv} de l'équation 2.21. Pour l'obtenir, il est nécessaire d'utiliser la fonction de Cardan (trouvée dans le document ZUCKER (2008)).

On applique le changement de variables :

$$\rho_{uv} = t - 3a_u a_v \quad (2.22)$$

Et on obtient l'équation du troisième degré :

$$t^3 + p \times t + q = 0 \quad (2.23)$$

où les paramètres p et q sont donnés par :

$$p = 1.5b_u b_v - 3a_u^2 a_v^2 \quad (2.24)$$

$$q = 2a_u^3 a_v^3 - 1.5a_u a_v b_u b_v - 1.5 \frac{\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y b_u b_v}{\alpha_u \alpha_v} \quad (2.25)$$

Afin d'assurer qu'il n'existe qu'une racine réelle, il est nécessaire de vérifier que le discriminant est positif : $\Delta = 4p^3 + 27q^2 \geq 0$. Dans la thèse de [Blaise \(2016\)](#), la simplification est utilisée avec comme condition $p > 0$. Le discriminant est alors positif. Ceci impose donc une condition sur les deux signaux. Cette condition est reprise dans l'équation [2.26](#).

$$\frac{b_u b_v}{2} - a_u^2 a_v^2 \geq 0 \quad (2.26)$$

Cette condition va directement influencer les limites d'application du skewness et du kurtosis des deux signaux. Une étude serait intéressante pour déterminer si cette hypothèse simplificatrice n'est pas trop réductrice.

Si la condition [2.26](#) est respectée, alors la racine où le ρ_{uv} est donnée par l'équation [2.27](#)

$$\rho_{uv}(\rho_{xy}) = \left(r + \sqrt{q + r^2}\right)^{1/3} + \left(r - \sqrt{q + r^2}\right)^{1/3} - a_u a_v \quad (2.27)$$

avec $r = \frac{3}{4}a_u a_v b_u b_v - a_u^3 a_v^3 + \frac{3b_u b_v \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{4\alpha_u \alpha_v}$ et $q = \left(\frac{b_u b_v}{2} - a_u^2 a_v^2\right)^3$.

3.6 Transformation tri-cubique (apport personnel)

La probabilité qu'un événement (u,v,w) se réalise, en supposant que les densités de probabilité des 3 signaux générés soient normales, est donnée par l'équation [2.28](#). Cette équation a été obtenue dans le livre [Rose et Smith \(2002\)](#) donnant la loi de distribution d'une densité de probabilité normale tri-variée avec des moyennes nulles et des écarts-types unitaires.

$$\psi_N(u, v, w) = \frac{e^{-W/[2(\rho_{uv}^2 + \rho_{uw}^2 + \rho_{vw}^2 - 2\rho_{uv}\rho_{uw}\rho_{vw} - 1)]}}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\sqrt{1 - (\rho_{uv}^2 + \rho_{uw}^2 + \rho_{vw}^2) + 2\rho_{uv}\rho_{uw}\rho_{vw}}} \quad (2.28)$$

où le paramètre W est donné par l'équation :

$$W = u^2(\rho_{vw}^2 - 1) + v^2(\rho_{uw}^2 - 1) + w^2(\rho_{uv}^2 - 1) + 2[uv(\rho_{uv} - \rho_{uw}\rho_{vw}) + uw(\rho_{uw} - \rho_{uv}\rho_{vw}) + vw(\rho_{vw} - \rho_{uv}\rho_{uw})] \quad (2.29)$$

Pour trouver la densité de probabilité tri-variée pour des densités de probabilité normales transformées par une fonction tri-cubique, il a été nécessaire de multiplier la densité de probabilité par ces dérivées :

$$\psi_C(x, y, z) = \psi_N(u(x), v(y), w(z)) \times u'(x) \times v'(y) \times w'(z) \quad (2.30)$$

On observe que la tri-corrélation ne fait pas intervenir de nouveau paramètre. Cette nouvelle densité de probabilité est générée à l'aide des statistiques unilatérales et croisées des signaux qui la composent. On doit toujours respecter l'hypothèse que la corrélation entre les différents signaux ne fait pas intervenir une différence temporelle entre les mesures des 3 capteurs.

Une condition nécessaire afin d'utiliser la densité de probabilité ci-dessus est que la matrice de corrélation soit définie positive. Cette matrice est décrite comme ci-dessous :

$$cor = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{uv} & \rho_{uw} \\ \rho_{uv} & 1 & \rho_{vw} \\ \rho_{uw} & \rho_{vw} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

La matrice cor est définie positive si son déterminant est positif.

$$det(cor) = 1 - (\rho_{uv}^2 + \rho_{uw}^2 + \rho_{vw}^2) + 2\rho_{uv}\rho_{uw}\rho_{vw} > 0 \quad (2.32)$$

On remarque que ce nouveau critère est plus fort que celui imposé sur les corrélations des statistiques croisées. Il existe une relation entre les 3 corrélations. Elle a été reprise sous la forme de la figure ci-dessous (figure 2.7) avec une isosurface.

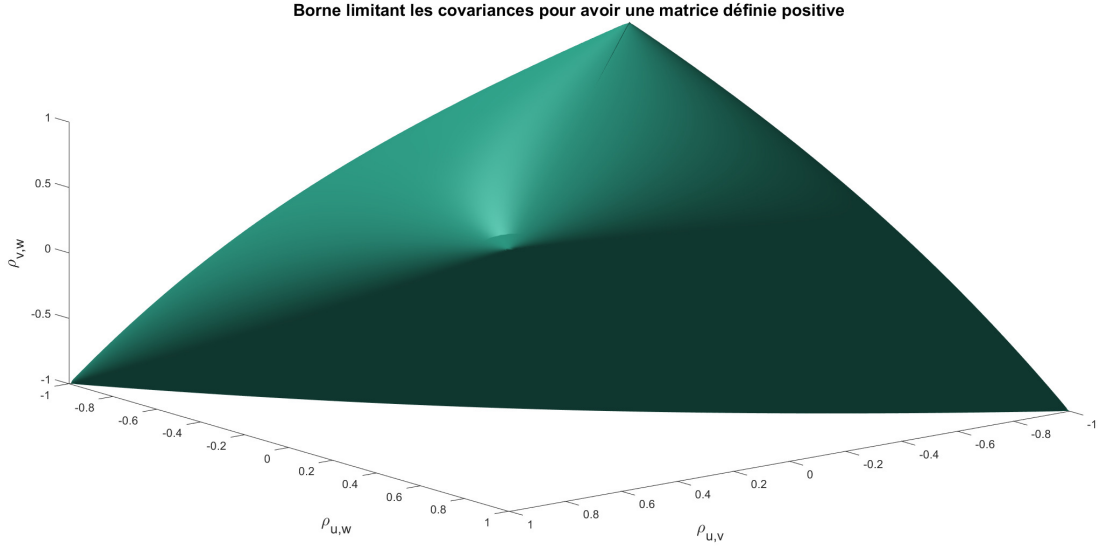


FIGURE 2.7 – Isosurface limitant l'application de la densité de probabilité de 3 signaux

Selon le théorème de Cauchy-Schwartz, la matrice de corrélation de trois signaux doit donner une matrice de corrélation définie positive dans tous les cas.

3.7 Relations entre les moments statistiques et les paramètres de la fonction de transformation cubique

Pour exprimer les relations entre les moments statistiques et les paramètres de la fonction cubique, il est nécessaire d'introduire les paramètres h_3 et h_4 . Les relations du système d'équations 2.33 permettent de faire le lien entre les moments statistiques et les paramètres de la fonction de transformation.

$$\begin{cases} a = h_3/(3h_4) \\ b = 1/(3h_4) \\ \alpha = \sigma/\sqrt{1 + 2h_3^2 + 6h_4^2} \\ \gamma_3 = \frac{(2h_3(3+4h_3^2+18h_4+54h_4^2))}{(\sqrt{1+2h_3^2+6h_4^2})^3} \\ \gamma_4 = \frac{3(1+20h_3^4+8h_4+84h_4^2+432h_4^3+1116h_4^4+4h_3^2(5+48h_4+186h_4^2))}{(1+2h_3^2+6h_4^2)} \end{cases} \quad (2.33)$$

3.8 Champ d'application de la transformation cubique

Une étude a été réalisée pour distinguer le champ d'application de la densité de probabilité normale modifiée par une fonction de transformation cubique pour l'ensemble de ces moments : $\mu, \sigma, \gamma_3, \gamma_4$.

La densité de probabilité modifiée par une fonction cubique peut être générée pour n'importe quel μ , car la moyenne est uniquement une translation de la densité de probabilité (ceci a été prouvé dans la section 1.1.1). Il est possible d'avoir une densité de probabilité cubique pour

des σ compris entre 0 et l'infini. L'écart-type est juste un paramètre de mise à l'échelle, comme prouvé dans la section 1.1.2. Il doit être positif.

Pour les paramètres γ_3 et γ_4 , il existe des limitations venant de la condition de monoticité de la fonction de transformation (équation 2.10). Le champ d'application est déduit du système des 3 équations repris dans l'équation 2.34.

$$\begin{cases} b - 1 - a^2 \geq 0 \\ a = h_3/(3h_4) \\ b = 1/(3h_4) \\ \gamma_3 = \frac{(2h_3(3+4h_3^2+18h_4+54h_4^2))}{(\sqrt{1+2h_3^2+6h_4^2})^3} \\ \gamma_4 = \frac{3(1+20h_3^4+8h_4+84h_4^2+432h_3^3+1116h_4^4+4h_3^2(5+48h_4+186h_4^2))}{(1+2h_3^2+6h_4^2)} \end{cases} \quad (2.34)$$

En réécrivant l'équation 1 du système d'équations 2.34 tout en remplaçant les paramètres a et b par les paramètres h_3 et h_4 , et en se mettant à la limite de l'inégalité, à 0, on peut trouver une relation entre h_3 et h_4 . Cette égalité est reprise dans l'équation 2.35.

$$h_3 = \pm \sqrt{3h_4 - 9h_4^2} \quad (2.35)$$

En utilisant l'équation 2.35 et les deux dernières équations du système d'équations 2.34, il est possible de représenter les bornes extérieures limitant le champ d'application de la densité de probabilité transformée par une fonction cubique. Le champ d'application est représenté à l'intérieur de la courbe rouge de la figure 2.8.

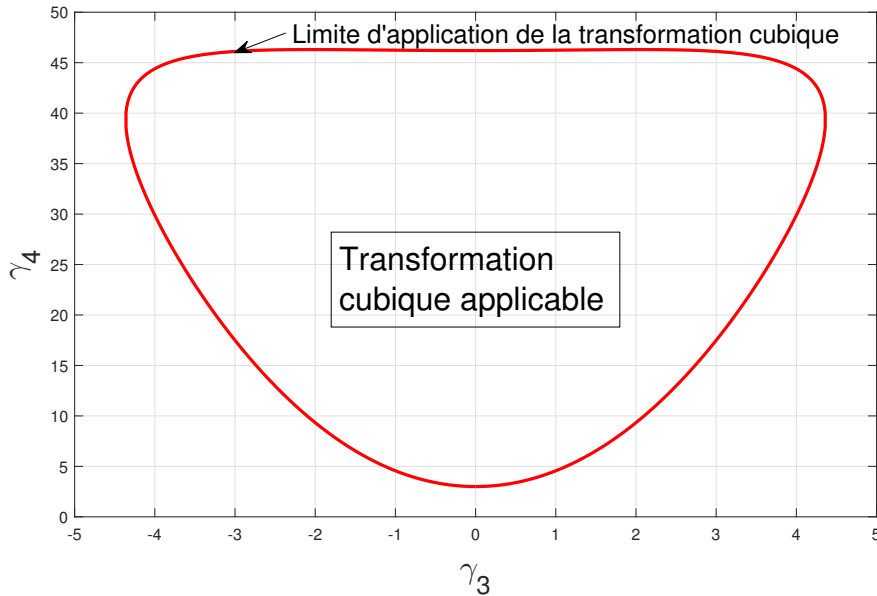


FIGURE 2.8 – Borne limite et champ d'application du skewness et kurtosis pour une fonction de transformation cubique

Un critère d'application qui dépend de γ_3 et γ_4 va devoir être développé pour vérifier s'il est possible de calculer une densité de probabilité modifiée par une fonction de transformation cubique. Le système d'équations 2.34 ne permet pas de générer un critère qui dépend directement des paramètres : γ_3 et γ_4 . Une solution d'approche donnée dans la littérature scientifique est le critère de Winterstein et MacKenzi qui est repris à l'équation 2.36, voir article Peng *et al.* (2014).

$$3 - \gamma_4 + (1.25\gamma_3)^2 \leq 0 \quad (2.36)$$

Il est aussi possible d'observer une limitation supérieure du kurtosis, qui équivaut à 46.2. Dans la majorité des cas, le kurtosis ne dépassera pas cette valeur. Les différentes limitations créées (Winterstein et limite supérieure) sont illustrées en vert sur la figure 2.9 :

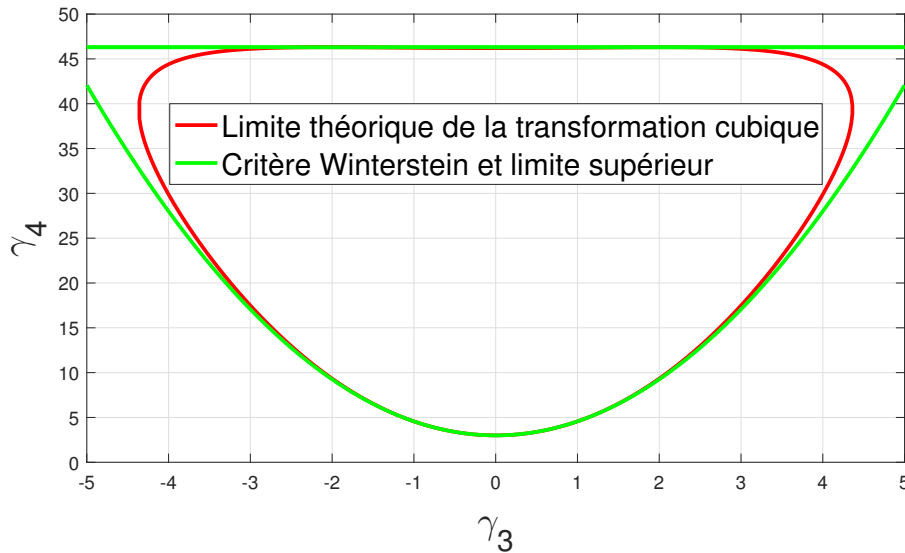


FIGURE 2.9 – Comparaison des critères de limitation avec la solution exacte

On remarque que le critère de Winterstein approche par l'extérieur le critère de monotonité, ce qui signifie que certaines solutions non monotones pourraient être acceptées par le critère. Cependant, pour un kurtosis inférieur à 15, ce qui est souvent le cas, la fonction de Winterstein est très proche du critère analytique, ce qui en justifie l'utilisation.

4 Génération d'une densité de probabilité à partir d'un signal donné, cfr cours [Denoël \(2013\)](#)

On peut générer la densité de probabilité du signal X , ceci est transcrit comme la probabilité $p_X(x)$. $p_X(x)$ illustre la probabilité d'observer une valeur comprise entre les bornes $[x - dx/2; x + dx/2]$ pour le signal X . La valeur de dx va fortement influencer la qualité de la densité de probabilité. Il est nécessaire de limiter dx à une valeur qui n'est pas trop faible afin d'avoir un résultat précis sans faire apparaître des discontinuités dues à un nombre de mesures trop faible. Un nombre de discrétisations réduit va en revanche ne pas faire apparaître le comportement voulu de la densité de probabilité. Il est complexe de déterminer un nombre de discrétisations en fonction de la taille du vecteur. En effet, la queue de distribution est très étendue, il sera nécessaire d'avoir un dx qui n'est pas trop faible afin de ne pas faire apparaître des discontinuités dans la densité de probabilité.

Dans le cadre de ce travail, il a été choisi d'utiliser les discrétisations suivantes afin de reconstruire les densités de probabilité :

- Discrétisation pour les densités de probabilité pour un signal : 1000
- Discrétisation pour les densités de probabilité conjointes : 100x100
- Discrétisation pour les densités de probabilité tri-variées : 100x100x100

5 Évaluation de la position du pic d'une densité de probabilité unimodale

À travers un des codes de résolution, il a été nécessaire d'évaluer la position du pic d'une densité de probabilité. La propriété qui caractérise le pic d'une densité de probabilité est une pente nulle. La position du pic pour une densité de probabilité normale est située au niveau de la moyenne. Ceci peut être démontré en dérivant l'équation :

$$\psi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.37)$$

On trouve après dérivation :

$$\psi'_N(x) = \frac{\mu - x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.38)$$

On a une pente nulle pour : $f'(x = \mu) = 0$.

Dans le cas d'une densité de probabilité normale multipliée par une fonction de transformation, on trouve le pic de la même façon. On va donc devoir dériver la densité de probabilité de l'équation 2.17 par x, dont les paramètres sont détaillés dans les équations 2.16 et 2.18 :

$$\psi_C(x) = \psi_N(u(x)) \times u'(x) \quad (2.39)$$

Lorsqu'on dérive l'équation ,on trouve :

$$\psi'_C(x) = \psi'_N(u(x)) \times u'(x) + \psi_N(u(x)) \times u''(x) \quad (2.40)$$

On peut développer la dérivée ($\psi'_N(u(x))$) comme suit :

$$\psi'_N(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}u(x)^2)} = \frac{-u(x) \times u'(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}u(x)^2)} = -\psi_N(u(x)) \times u'(x) \times u(x) \quad (2.41)$$

ce qui nous donne :

$$\psi'_C(x) = \psi_N(u(x)) \times u'^2(x) \times u(x) + \psi_N(u(x)) \times u''(x) = \psi_N(u(x)) (-u'^2(x) \times u(x) + u''(x)) \quad (2.42)$$

Cette dernière équation n'a pas été résolue. Cependant, il a été possible d'évaluer le pic en étudiant la dérivée de la densité de probabilité de manière numérique. On utilise dès lors une approche basée sur les séries de Taylor. Cette approche est très fiable car aucune discontinuité n'apparaît avec une formulation analytique. Lorsque la dérivée entre deux points change de signe, le pic se trouve entre les deux points discrétisés.

Chapitre 3

Algorithme d'identification des moments statistiques de densité de probabilité

Ce chapitre va être divisé en 5 sections. La première servira à introduire un algorithme permettant de trouver les paramètres de la fonction de transformation cubique en fonction des moments statistiques mesurés. Les trois suivantes vont expliquer le développement de l'algorithme de dé-mixage en fonction des statistiques unilatérales, des statistiques corrélées et de la tri-corrélation. Chacune des parties de l'algorithme sera accompagnée d'un point mettant en avant l'identification des paramètres du problème et d'un second point expliquant comment trouver ces derniers. Une conclusion sera tirée pour l'ensemble des algorithmes.

1 Calcul des paramètres de la fonction de transformation grâce aux moments statistiques

Afin d'assurer qu'il est possible de trouver les paramètres de la fonction de transformation, il est nécessaire de respecter le critère de Winterstein (équation : [2.36](#)). Dans ce cas, il est possible de trouver les paramètres de la fonction de transformation.

La figure [3.1](#) montre que la densité de probabilité est bien approchée avec une densité de probabilité transformée par une fonction cubique lorsqu'on respecte le critère de Winterstein (courbe verte sur la figure [3.1](#) et équation [2.36](#)). Cependant, l'erreur augmente pour les points situés aux extrémités, entre la courbe verte et la courbe rouge. Ils respectent le critère de Winterstein, mais pas la monotonie de la cubique, ce qui est problématique.

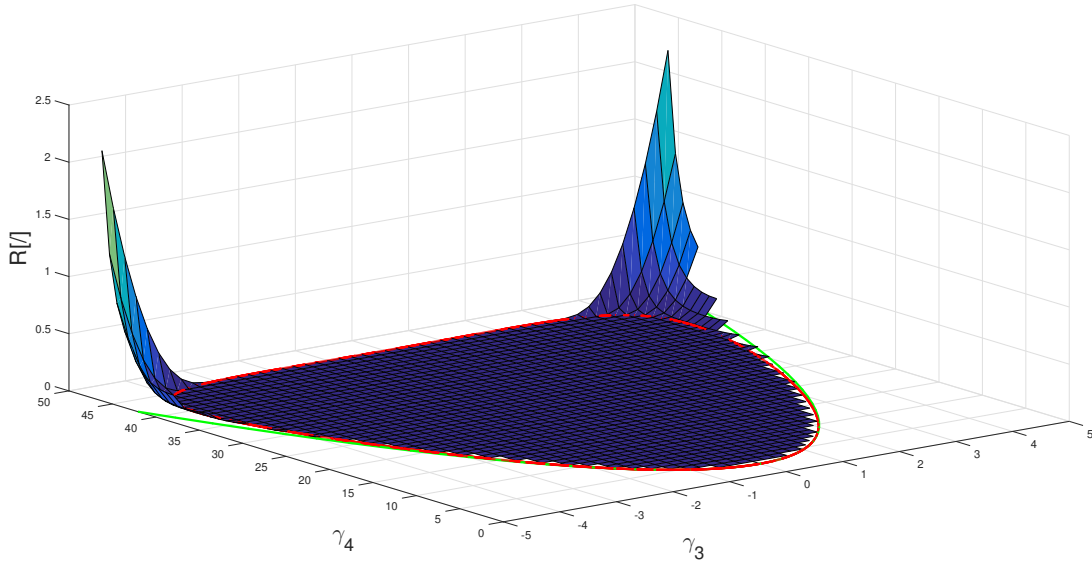


FIGURE 3.1 – Valeur de la fonction erreur minimisée pour transformer les moments statistiques en paramètres de la fonction cubique

La fonction erreur utilisée pour déterminer s'il est possible de bien reconstruire un signal pour des paramètres donnés est calculée comme la valeur R . La valeur (R) à minimiser est donnée dans le système d'équations 3.1. Cette fonction est trouvée à l'aide des équations 2.33. Les paramètres cherchés et qui vont être modifiés pour trouver le minimum local (R_{min}) sont α, h_3 et h_4 . La fonction matlab ("fmincon") est utilisée afin de trouver ces paramètres minimisant la fonction erreur. Cette fonction matlab converge vers le minimum local le plus proche. Il est donc nécessaire de vérifier que la fonction erreur reste faible.

Un exposant en 4 a été utilisé dans la fonction erreur pour le terme approchant le kurtosis. Ce choix est justifié par le fait qu'une légère modification du kurtosis va moins modifier le signal qu'une modification de l'écart-type. Une fois les paramètres h_3 et h_4 trouvés, les paramètres a et b peuvent être déduits.

$$\begin{cases} F_1 = \sigma / \sqrt{1 + 2h_3^2 + 6h_4^2} - \alpha \\ F_2 = \frac{(2h_3(3+4h_3^2+18h_4+54h_4^2))}{(\sqrt{1+2h_3^2+6h_4^2})^3} - \gamma_3 \\ F_3 = \frac{3(1+20h_3^4+8h_4+84h_4^2+432h_3^3+1116h_4^4+4h_3^2(5+48h_4+186h_4^2))}{(1+2h_3^2+6h_4^2)} - \gamma_4 \\ R = F_1^2 + F_2^2 + F_3^4 \end{cases} \quad (3.1)$$

Si on vérifie la condition de monoticité de la fonction de transformation, il est possible de créer un signal respectant les moments imposés et ayant comme densité de probabilité une densité de probabilité normale transformée par une fonction cubique.

La fonction développée dans ce point permet de faire le lien en partant des moments statistiques et de trouver les paramètres de la fonction de transformation. Le lien inverse peut être réalisé directement avec les équations du système 2.33.

Ce premier algorithme sera utilisé de nombreuses fois dans les codes de ce travail. Comme il a pu être validé pour l'ensemble des cas traités dans cette étude, son utilisation dans la suite du document sera uniquement spécifiée si nécessaire.

2 Algorithme de dé-mixage pour les statistiques unilatérales (1 signal)

2.1 Algorithme pour un signal avec une densité de probabilité sans mélange

2.1.1 Paramètres nécessaires

Afin d'étudier un signal ayant une densité de probabilité normale transformée par une fonction cubique, il faut connaître les 4 premiers moments statistiques unilatéraux $(\mu, \sigma, \gamma_3, \gamma_4)$. Si le γ_3 et le γ_4 , respectent la condition de Winterstein (équation : 2.36), il est possible de trouver les paramètres de la fonction cubique (μ, α, a, b) . Ceci a été prouvé dans la section 1.

2.1.2 Détermination des paramètres

Le signal n'étant pas composé d'une densité de probabilité mélangée, on peut directement calculer analytiquement les moments statistiques unilatéraux du problème. Avec les moments statistiques, l'ensemble des propriétés nécessaires sont connues pour reconstruire la densité de probabilité. Il faut que le skewness et kurtosis soient conformes au critère de Winterstein (équation 2.36) pour respecter la monotonie de la fonction cubique de transformation et donc assurer la reconstruction de la densité de probabilité.

2.2 Algorithme pour un signal avec une densité de probabilité mélangée

2.2.1 Paramètres nécessaires

Dans ce travail, le caractère temporel du signal n'est pas pris en compte pour déterminer les statistiques unilatérales. Cette hypothèse n'a pas été émise par [Rigo et al. \(2020\)](#), qui avait utilisé une analyse fréquentielle. Cette information nous permet de représenter un signal avec une densité de probabilité mélangée comme une succession de 2 signaux ayant respectivement les statistiques unilatérales de chacune des 2 densités de probabilité formant le mélange. Pour chacun des 2 signaux composant le mélange, il sera nécessaire de définir les statistiques unilatérales $(\mu, \sigma, \gamma_3, \gamma_4)$. La longueur des deux signaux permettra de représenter le paramètre de répartition (π) comme décrit dans la section 2 du chapitre 2. Les 2 signaux ne seront donc pas forcément de la même longueur : ils dépendront du facteur de pondération π . Le signal respectant les statistiques de la première densité de probabilité du mélange aura une longueur $(\pi \times N)$, tandis que le deuxième signal aura une longueur $((1 - \pi) \times N)$. En combinant les deux, on obtiendra un signal avec une densité de probabilité mélangée d'une longueur (N) . L'ensemble de ces explications illustre la figure 3.2.

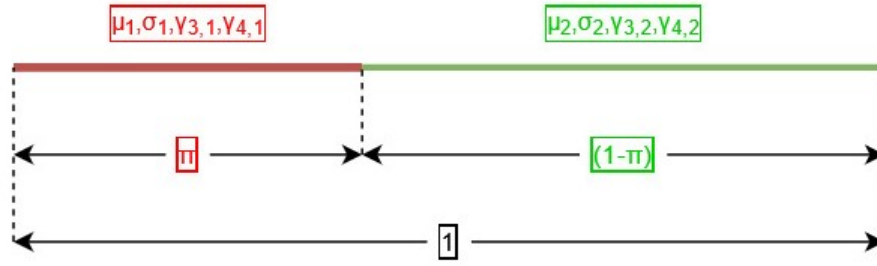


FIGURE 3.2 – Paramètres pour un signal ayant une densité de probabilité mélangée

2.2.2 Détermination des paramètres

Dans le cas d'une densité de probabilité mélangée, le signal est composé d'une somme de 2 signaux ayant des statistiques unilatérales appartenant à 2 densités de probabilité différentes. Il n'est donc pas possible de calculer de manière analytique les moments statistiques des 2 signaux. Les paramètres connus dans un premier temps sont uniquement la densité de probabilité du signal mélangé et les statistiques unilatérales de la densité de probabilité mélangée.

Différents algorithmes ont été développés afin de résoudre le problème. Des problèmes de convergence ont été observés à travers les algorithmes qui vont être présentés ci-dessous. Cependant, il a été possible de réaliser un algorithme qui permet d'approcher de manière acceptable les densités de probabilité générées par les mesures en soufflerie. Il est tout de même nécessaire de garder à l'esprit qu'il n'a été nullement prouvé que les signaux obtenus en soufflerie aient des densités de probabilité qui correspondent à un mélange de 2 densités de probabilité.

1. Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution a dû être choisi. Deux possibilités ont été envisagées : un code d'optimisation à l'aide d'une fonction erreur des moindres carrés et un code de type Exp-Max. Le choix s'est porté sur l'algorithme Exp-Max. Cet algorithme a été implémenté à l'aide du document ([Dempster et al. \(1977\)](#)).

L'algorithme Exp-Max est dans notre cas, plus efficace que l'algorithme des moindres carrés. Ceci peut être expliqué par le fait que la fonction à optimiser dépend du logarithme de la densité de probabilité. En utilisant une fonction logarithmique, on favorise la convergence des résultats en queue de distribution, les régions qui nous intéressent.

L'algorithme Exp-Max est une méthode itérative, ce qui n'est pas le cas de l'algorithme des moindres carrés. L'algorithme est séparé en deux étapes : une étape de calcul de l'expectation avec la solution du pas précédent et une deuxième étape de maximisation où on va chercher de nouveaux paramètres qui vont maximiser la fonction de vraisemblance. Ces deux étapes doivent être réalisées un certain nombre de fois pour converger vers une solution stable d'une itération à l'autre.

— Algorithme

L'expectation est calculée avec les paramètres initiaux ou de la dernière étape de maximisation. Dans le code Exp-Max présenté dans le document ([Dempster et al. \(1977\)](#)), on calcule l'expectation pour chaque valeur mesurée et pour les deux densités de probabilité du mélange. On trouve la formule de l'équation 3.2 pour la valeur

mesurée i et la densité de probabilité k .

$$r_k^i \leftarrow Pr(z = k|x^i) = \frac{Pr(z = k) * \times Pr(x^i|z = k)}{\sum_{l=1}^2 Pr(z = l) * \times Pr(x^i|z = l)} \quad (3.2)$$

Pour l'étape de maximisation, on va chercher les 9 paramètres qui vont augmenter au maximum le logarithme de vraisemblance. Le logarithme de vraisemblance est calculé comme dans la formule 3.3, où N est la longueur du signal mesuré.

$$\log = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^2 r_k^i \times (\log(Pr(z = k)) + \log(Pr(x^i|z = k))) \quad (3.3)$$

La probabilité $Pr(z = 1)$ représente le facteur de pondération π , tandis que $Pr(z = 2) = (1 - \pi)$.

— Algorithme modifié en cas de grand échantillon

Dans le cadre de ce travail, on utilise des vecteurs de données de taille très importante. Leur longueur va fortement impacter le temps de calcul de l'algorithme. Il a été nécessaire d'optimiser ce temps de calcul et donc, l'algorithme de résolution Exp-Max.

Une nouvelle version de l'algorithme a donc été créée. Elle n'utilise plus le vecteur de l'ensemble des réalisations. On va plutôt se servir du vecteur de discrétisation de la densité de probabilité ainsi que du vecteur de la probabilité mélangée associée au vecteur de discrétisation. Ces 2 vecteurs ont été déterminés dans la section 4 du chapitre 2. La probabilité associée au vecteur de discrétisation va être interprétée comme un vecteur de pondération.

On va pouvoir calculer l'expectation avec la formule 3.4. Dans ce cas, le paramètre x^i correspond à la discrétisation observée. On aura un vecteur d'expectation pour un z donné qui aura la longueur du nombre de discrétisations. On multipliera chaque expectation par son propre facteur de pondération $N_{(x^i-dx < \sum x < x^i+dx)}$.

$$r_k^i \leftarrow Pr(z^i = k|x^i) = \frac{Pr(z = k) * \times Pr(x^i|z = k)}{\sum_{l=1}^2 Pr(z = l) * \times Pr(x^i|z = l)} \times N_{(x^i-dx < \sum x < x^i+dx)} \quad (3.4)$$

Pour l'étape de maximisation, le facteur de pondération n'entre pas en jeu, sauf dans le cas du paramètre r_k^i calculé dans la partie expectation. Les paramètres x^i sont ici toujours les valeurs discrétisées.

$$\log = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^2 r_k^i \times (\log(Pr(z = k)) + \log(Pr(x^i|z = k))) \quad (3.5)$$

2. Choix du type de paramètre à optimiser avec le code Exp-Max

Une première méthode utilisée est d'utiliser une optimisation en fonction des moments statistiques. Cependant, il est nécessaire de calculer la probabilité d'occurrence d'un échantillon observé pour calculer aussi bien l'expectation que la maximisation. Il s'agit de le faire en chaque point discrétisé pour les paramètres choisis (8 moments statistiques et le facteur de pondération) (détail dans le chapitre notions mathématiques, voir équation 2.17) :

$$\psi_C(x) = \psi_N(u(x)) \times u'(x) \quad (3.6)$$

Pour trouver cette probabilité, il est nécessaire de connaître le premier moment statistique (μ) et les paramètres de la fonction de transformation (α, a, b). Pour les déterminer, il est nécessaire d'utiliser l'algorithme décrit dans le point 1.

Le problème avec cette méthode, c'est qu'il est nécessaire d'utiliser l'algorithme de la section 1 dans le code de maximisation du code Exp-Max, ce qui est fort coûteux en temps de calculs. Dès lors, un deuxième algorithme a été développé qui, lui, réalise la maximisation avec les paramètres de la fonction de transformation.

Après plusieurs essais, on a observé que le choix du paramètre de résolution n'impacte que peu la qualité du résultat final, mais davantage le temps de calcul.

3. Bornes des paramètres composant la densité de probabilité mélangée

Il a été possible de trouver des limitations des différents moments statistiques. Elles ont été utilisées comme bornes dans certaines versions du code. Cependant, elles n'aidaient pas le code à converger et elles créaient à certains moments des problèmes de robustesse. Dès lors, ces limitations n'ont pas été utilisées dans les dernières versions de l'algorithme. Ces notions ont tout de même été détaillées afin d'introduire une des méthodes d'initialisation des paramètres.

Les paramètres d'ordre 1 et 2 des densités de probabilité composant le signal mélangé comportent les limitations détaillées ci-dessous :

— Paramètre π

Le paramètre π est le facteur de pondération de l'équation 2.7. Il devra être compris entre 0 et 1.

Une étude secondaire pourra être réalisée de manière à réduire l'intervalle de π en analysant le comportement de ce dernier en fonction du nombre de modes de la densité de probabilité mélangée. Des études de ce type ont déjà été réalisées dans l'article [Ray et Lindsay \(2005\)](#). Celui-ci ne vise cependant que des cas précis et avec des signaux normaux. Dans le cadre de ce travail, une étude du même type se révèle complexe car elle est basée sur les pentes des densités de probabilité qui sont influencées dans notre cas par l'écart-type, le skewness et le kurtosis.

Pour trouver la pente en un point d'une densité de probabilité normale standard, on utilise l'équation suivante :

$$p'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5x^2} \quad (3.7)$$

Pour trouver la pente d'une densité de probabilité transformée par une fonction cubique de transformation, on résout :

$$p'(x) = (p(u(x)) \times u')' = p'(u(x)) \times u' + p(u(x)) \times u'' \quad (3.8)$$

Comme mentionné dans le chapitre 2, la résolution de ces équations est très complexe et n'a pas été réalisée dans ce travail.

— Paramètres μ_1 et μ_2

De manière à ne pas avoir un écart-type négatif pour les deux signaux reconstruisant le mélange, la condition de l'équation 3.9 doit être respectée :

$$\begin{cases} \mu - \sqrt{\frac{\sigma^2(1-\pi)}{\pi}} \leq \mu_1 \leq \mu + \sqrt{\frac{\sigma^2(1-\pi)}{\pi}} \\ \mu - \sqrt{\frac{\sigma^2\pi}{(1-\pi)}} \leq \mu_2 \leq \mu + \sqrt{\frac{\sigma^2\pi}{(1-\pi)}} \end{cases} \quad (3.9)$$

Le détail des équations développées afin d'obtenir ces deux relations est donné dans l'annexe B

— **Paramètres σ_1 et σ_2**

Les paramètres vont aussi être bornés de manière à ne pas avoir un des deux écarts-types qui est négatif. Pour que ce ne soit pas le cas, on trouve les bornes de l'équation 3.10. Ces équations ont été trouvées en développant l'équation 2.8, selon σ_1 et σ_2 .

$$\begin{cases} 0 \leq \sigma_1 \leq \sqrt{\frac{\sigma^2 - (1-\pi) \times (\mu_2 - \mu)^2}{\pi}} - (\mu_1 - \mu)^2 \\ 0 \leq \sigma_2 \leq \sqrt{\frac{\sigma^2 - \pi \times (\mu_1 - \mu)^2}{(1-\pi)}} - (\mu_2 - \mu)^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

— **Paramètres $\gamma_{3,1}, \gamma_{4,1}, \gamma_{3,2}$ et $\gamma_{4,2}$**

Il est important que ces paramètres respectent le critère de Winterstein (figure 2.9 et équation 2.36) et que le kurtosis soit faible. Si ce n'est pas le cas, il n'est pas possible de trouver les densités de probabilité composant le mélange respectant la monoticité.

4. Initialisation des paramètres pour l'algorithme de résolution

Deux méthodes ont été développées dans les différents algorithmes pour initialiser les paramètres :

— **Initialisation basée sur les bornes**

Une des méthodes développées pour l'initialisation des paramètres est basée sur les bornes des différents moments statistiques. De cette manière, il est possible de générer des paramètres d'initialisation qui sont robustes pour le code et qui ont un sens. Le paramètre π a été pris équivalent à 0.5, pour se situer au centre de l'intervalle.

Le paramètre μ_1 a été pris comme valant : $(\mu + \sqrt{\frac{\sigma^2(1-\pi)}{\pi}})/2$, ce qui équivaut à la moitié supérieure de l'intervalle donné dans l'équation 3.9. Ce choix a été opéré afin de séparer le paramètre μ_1 de μ_2 .

Le paramètre μ_2 est quant à lui déterminé avec les équations de bimodalité du système d'équations 2.8 (première relation). Le paramètre μ_2 est la seule inconnue dans l'équation du système 2.8.

Le paramètre σ_1 est pris au centre des bornes de l'équation 3.10, ce qui donne :

$$(\sqrt{\frac{\sigma^2 - (1-\pi) \times (\mu_2 - \mu)^2}{\pi}} - (\mu_1 - \mu)^2)/2.$$

Le paramètre σ_2 est trouvé comme le paramètre μ_2 à l'aide du système d'équations 2.8 (deuxième relation). Le paramètre σ_2 est à nouveau la seule inconnue.

— **Initialisation avec un mélange de signaux normaux**

Afin d'initialiser les paramètres du code Exp-Max, l'hypothèse que les 2 signaux composant le mélange aient une densité de probabilité normale est très intéressante. En l'émettant, on a plus que 5 inconnues. Il est aussi possible d'utiliser l'algorithme Exp-Max pour résoudre ce problème. La résolution est rapide et permet de trouver une initialisation optimale des paramètres pour la résolution du problème avec le skewness et le kurtosis.

La fonction matlab : `'fitgmdist'` permet de décomposer avec l'algorithme Exp-Max la densité de probabilité du signal mélangé en deux densités de probabilité normales. La fonction `'fitgmdist'` donne en résultat la distribution des densités de probabilité normales ainsi que leurs paramètres (moyenne et écart-type) respectifs.

Il a été nécessaire de modifier la taille du vecteur dans `'fitgmdist'`. Comme il s'agit d'une première approche du signal, cette réduction a peu d'influence sur les résultats finaux. La longueur du vecteur pour la fonction `'fitgmdist'` a été imposée à 1/1000 des mesures réalisées en soufflerie.

Une seconde méthode aurait été de réécrire la fonction `'fitgmdist'` avec la nouvelle méthode décrite dans la section 1. Cependant, cela n'aurait pas apporté beaucoup d'informations supplémentaires.

- **Multiplication des points d'initialisation pour l'algorithme Exp-Max**

L'initialisation des paramètres pour l'algorithme Exp-Max est excessivement importante. Elle peut influencer le minimum local vers lequel l'algorithme va converger. Pour cette raison, il a été choisi d'utiliser plus d'un point d'initialisation pour l'algorithme Exp-Max permettant d'obtenir le mélange avec 2 densités de probabilité normales. Ce choix va augmenter le temps de calcul mais assurer une certaine stabilité d'une résolution à l'autre. La fonction matlab `'fitgmdist'` permet de le réaliser automatiquement. Pour l'initialisation avec les bornes, on n'utilise pas de position finie dans l'intervalle mais des positions aléatoires entre les bornes.

5. Variantes développées

- **Utilisation des relations du système d'équations 2.8**

L'utilisation de ces équations permet de réduire fortement le nombre d'inconnues à faire varier indépendamment pour trouver la solution. On passe de 9 paramètres variables à 5. Cependant, cette méthode pose des problèmes de convergence. Ceci peut être expliqué par le fait que les 4 relations sont non linéaires. Une légère modification d'un paramètre peut avoir un grand impact sur les autres.

Cette piste a été abandonnée suite à des problèmes numériques. Il n'était pas possible de faire converger le code.

- **Utilisation de la position des pics**

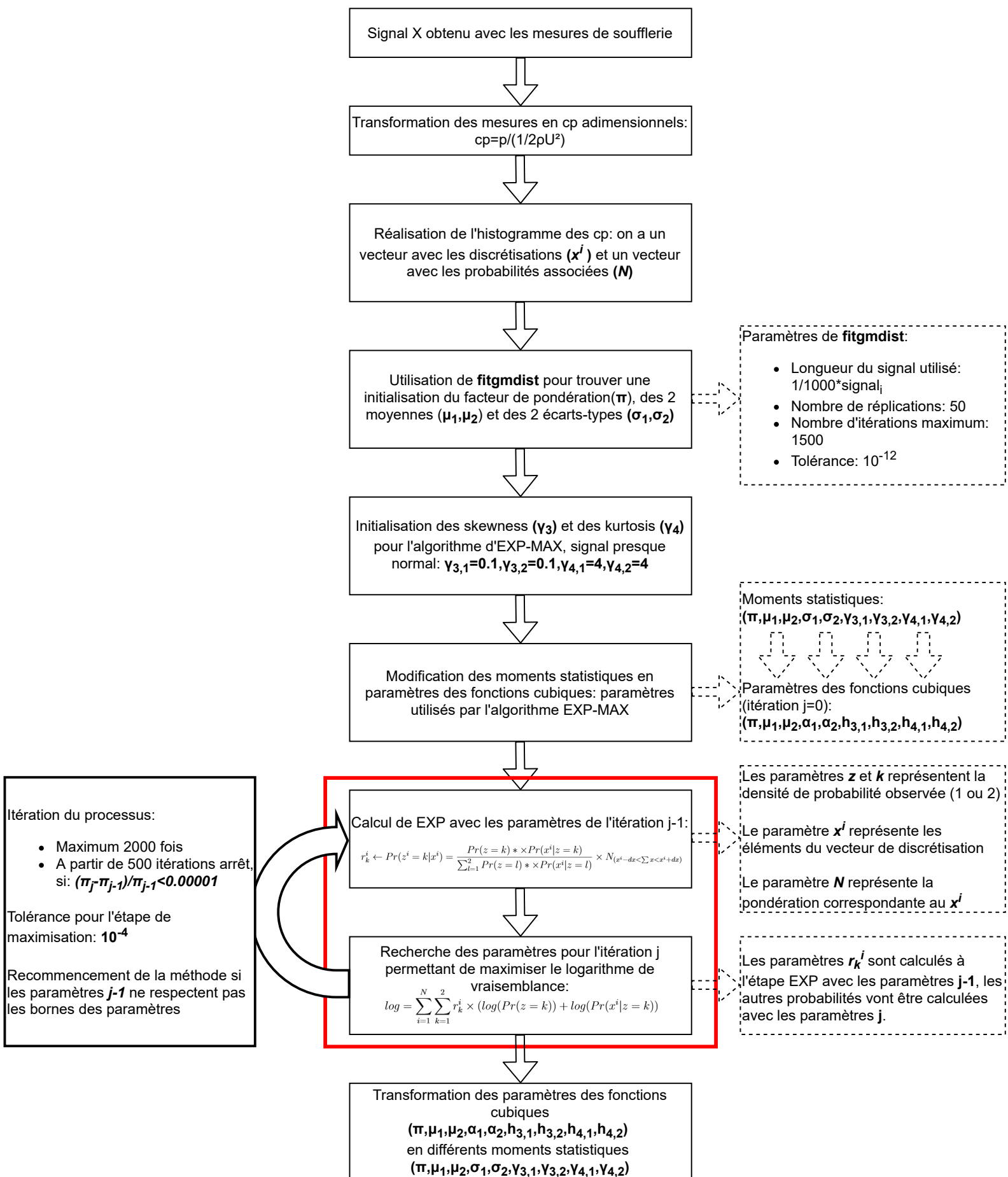
En réalisant les limitations du code, on a pu observer des problèmes où le code convergeait avec une densité de probabilité unimodale alors que le signal à approcher était bimodal. Afin de pallier ce problème, un code a été développé prenant en compte la position des pics. On parle ici de densité de probabilité bimodale pour la densité de probabilité mélangée et les deux composantes du mélange seront les densités de probabilité unimodales.

En réalisant une étude des pentes des différentes densités de probabilité (la densité de probabilité bimodale et les 2 densités de probabilité unimodales), on se rend compte que les pics des densités de probabilité unimodales doivent se situer à l'extérieur de l'intervalle des deux pics de la densité de probabilité bimodale (si les 2 pics existent). Un code a été développé en imposant la position des pics des densités de probabilité unimodales hors de l'intervalle des pics bimodaux. On a cependant pu observer que ce dernier code ne permettait pas de résoudre le problème. La reconstruction de la densité de probabilité bimodale était générée par une densité de probabilité unique et unimodale avec un pic hors de l'intervalle interdit.

L'initialisation des paramètres était complexe et l'opération n'apportait guère de résultats probants pour le code. Cette piste a dès lors été abandonnée.

6. Conclusion

En conclusion, afin de trouver les 2 signaux unimodaux composant une densité de probabilité mélangée, il a été nécessaire de décomposer le problème en 2 étapes. La première est d'approcher la densité de probabilité avec un code Exp-Max pour deux signaux avec une densité de probabilité normale. Pour ce code, on ne choisira pas un point unique d'initialisation pour l'algorithme Exp-Max. Cela permet d'augmenter la stabilité de la résolution finale. La deuxième étape est de réutiliser les résultats de la première étape (résultats du code Exp-Max pour des densités de probabilité normales) comme point de départ afin de résoudre l'algorithme Exp-Max pour deux densités de probabilité normales transformées par une fonction cubique. Pour ce deuxième code Exp-Max, la maximisation du logarithme de vraisemblance sera réalisée en optimisant les paramètres de la fonction de transformation. Dans cette deuxième partie, les équations reliant les moments statistiques des 2 signaux du mélange ne seront pas utilisées afin de réduire le nombre de paramètres variables. L'approche avec les pics ne sera pas non plus utilisée. Le diagramme dessiné ci-dessous permet de bien illustrer la méthodologie utilisée pour déterminer les statistiques unilatérales.



3 Algorithme de dé-mixage pour les statistiques croisées

Dans cette partie, on suppose qu'on connaît les statistiques unilatérales des deux signaux étudiés. Ces dernières pourront être déterminées grâce aux algorithmes développés ci-dessus pour les signaux avec des densités de probabilité non-mélangées et mélangées. Afin de connaître les statistiques croisées des signaux, il va être nécessaire de déterminer les différentes corrélations reliant les signaux entre eux ainsi que les facteurs de pondération si les signaux ont des densités de probabilité mélangées.

3.1 Algorithme pour deux signaux ayant une densité de probabilité non mélangée

3.1.1 Paramètres nécessaires

Il est tout d'abord nécessaire de connaître les statistiques unilatérales des 2 signaux. Pour un signal avec une densité de probabilité non mélangée, il est possible de les déterminer analytiquement comme dans la section 2.1. On peut ensuite déterminer la statistique croisée $\rho_{x,y}$ analytiquement pour les signaux x et y .

Si les 2 signaux sont caractérisés par une densité de probabilité normale transformée par une fonction bicubique, il est important de mettre en avant que la corrélation entre les signaux ayant une densité de probabilité normale et les signaux avec une densité de probabilité normale transformée par la cubique sera différente. La relation permettant de faire le lien entre les 2 corrélations est la suivante (elle a été déterminée dans la section 3.5, du chapitre 2) :

$$\rho_{xy} = \frac{\alpha_u \alpha_v}{\sigma_x \sigma_y} \rho_{uv} \left(1 + \frac{2a_u a_v}{b_u b_v} \rho_{uv} + \frac{2}{3b_u b_v} \rho_{uv}^2 \right) \quad (3.11)$$

où les signaux u et v sont les signaux avec une densité de probabilité normale. Les signaux x et y sont les signaux avec une densité de probabilité normale transformée par une cubique.

3.1.2 Détermination des paramètres

La corrélation aurait pu être déterminée pour deux signaux avec une densité de probabilité non mélangée à l'aide d'une formule analytique. Il aurait fallu ensuite obtenir la corrélation entre les signaux normaux afin de reconstruire l'histogramme. Pour éviter cette contrainte, et de manière à préparer l'algorithme pour un mélange, il a été décidé de ne pas utiliser la formulation analytique, mais une approche numérique. La corrélation sera approchée par un algorithme de moindre carré entre les densités de probabilité de rang 2.

On va approcher la densité de probabilité générée par les deux signaux en générant analytiquement une densité de probabilité conjointe en fonction de ρ_{uv} . Le but est de trouver la corrélation des 2 signaux qui minimise le plus la différence au carré des 2 densités de probabilité de dimension 2 (celle générée par les 2 vecteurs de données et celle générée analytiquement).

Pour la densité de probabilité analytique, il est possible de générer en chaque point discrétisé la probabilité analytique grâce à l'équation 2.20. Une fois le ρ_{uv} trouvé, le ρ_{xy} correspondant au ρ_{uv} peut facilement être trouvé à l'aide de l'équation 3.11.

3.2 Algorithme entre deux signaux ayant une densité de probabilité mélangée

3.2.1 Paramètres nécessaires

Pour définir chacun des 2 signaux ayant une densité de probabilité mélangée par 2 densités de probabilité normales transformées par une fonction cubique, on a besoin de 9 paramètres : les 4 moments des statistiques unilatérales de chacune des composantes du mélange de densité de probabilité ce qui fait 8 paramètres, et un neuvième paramètre (π) pour la répartition entre les 2 densités de probabilité composant le mélange. Les statistiques unilatérales pour les 2 signaux mélangés sont donc décrites par 18 paramètres.

Dans le cas de signaux non mélangés, une seule inconnue devait être déterminée pour les statistiques croisées : la corrélation. Dans le cas de signaux mélangés, la quantité de paramètres à déterminer est de 8 : 4 corrélations et 4 paramètres de pondération. Ces différents paramètres vont être décrits ci-dessous. Il sera possible d'observer des relations entre les 8 paramètres. Chacun des signaux mélangés peut être décrit comme une combinaison de deux signaux non mélangés :

$$\begin{cases} P_x(x) = \pi_x P_{x1}(x) + (1 - \pi_x) P_{x2}(x) \\ P_y(y) = \pi_y P_{y1}(y) + (1 - \pi_y) P_{y2}(y) \end{cases} \quad (3.12)$$

Au vu des propriétés statistiques, il est possible d'observer 4 corrélations entre les signaux composant les mélanges de l'équation 3.12 : $\rho_{x1,y1}$, $\rho_{x2,y2}$, $\rho_{x1,y2}$, $\rho_{x2,y1}$.

Il manque encore l'information relative à la répartition des réalisations corrélées. Un facteur de pondération va être implémenté pour donner la probabilité d'avoir une réalisation $Pond(x_i, y_i)$. On trouve 4 facteurs de pondération : $Pond(x_1, y_1) = \pi_{x1,y1}$, $Pond(x_2, y_2) = \pi_{x2,y2}$, $Pond(x_1, y_2) = \pi_{x1,y2}$ et $Pond(x_2, y_1) = \pi_{x2,y1}$. L'ensemble doit suivre certaines règles afin de conserver un sens. Les 4 facteurs ne peuvent être négatifs. La somme des 4 facteurs de pondération doit donner 1. Il existe une relation liant l'ensemble de ces facteurs de pondération entre eux et permettant de trouver les 4 paramètres en n'en connaissant qu'un seul.

La probabilité d'observer une réalisation ayant au même moment les valeurs données (x et y) pour les deux signaux est donnée par l'équation 3.13 :

$$P_{x,y}(x, y) = \pi_{x1,y1} P_{x1,y1}(x, y) + \pi_{x2,y2} P_{x2,y2}(x, y) + \pi_{x1,y2} P_{x1,y2}(x, y) + \pi_{x2,y1} P_{x2,y1}(x, y) \quad (3.13)$$

Avec cette équation, il est possible de calculer les deux marginales selon x et y :

$$\begin{cases} P_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(x, y) dy = (\pi_{x1,y1} + \pi_{x1,y2}) P_{x1} + (\pi_{x2,y1} + \pi_{x2,y2}) P_{x2} \\ P_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{xy}(x, y) dx = (\pi_{x1,y1} + \pi_{x2,y1}) P_{y1} + (\pi_{x1,y2} + \pi_{x2,y2}) P_{y2} \end{cases} \quad (3.14)$$

En faisant le lien entre les équations 3.14 et les équations 3.12, on peut trouver les relations de l'équation 3.15

$$\begin{cases} \pi_x = (\pi_{x1,y1} + \pi_{x1,y2}) \\ \pi_y = (\pi_{x1,y1} + \pi_{x2,y1}) \\ (1 - \pi_x) = (\pi_{x2,y1} + \pi_{x2,y2}) \\ (1 - \pi_y) = (\pi_{x1,y2} + \pi_{x2,y2}) \end{cases} \quad (3.15)$$

$\pi_{x1,y1}$ va servir comme paramètre de pondération inconnu. Les 3 autres paramètres de pondération seront déterminés directement en fonction de $\pi_{x1,y1}$.

En utilisant les équations 3.15, il a été possible d'exprimer l'ensemble des paramètres selon $\pi_{x1,y1}$:

$$\begin{cases} \pi_{x1,y2} = \pi_x - \pi_{x1,y1} \\ \pi_{x2,y1} = \pi_y - \pi_{x1,y1} \\ \pi_{x2,y2} = \pi_{x1,y1} + 1 - \pi_x - \pi_y \end{cases} \quad (3.16)$$

Avec les équations 3.16, on peut déterminer les 2 bornes limitant la valeur de $\pi_{x1,y1}$: $\max(0; \pi_x + \pi_y - 1) < \pi_{x1,y1} < \min(\pi_x; \pi_y)$. Ces deux bornes ont pu être déterminées afin d'assurer qu'aucun des paramètres de pondération ne soit négatif.

En analysant les deux premières relations du système d'équations 3.16, on peut mettre en évidence que le seul moyen que le facteur de pondération $\pi_{x2,y1}$ soit égal à $\pi_{x1,y2}$ est que π_x soit égal à π_y .

Enfin, afin de générer 2 signaux avec une densité de probabilité mélangée, il est nécessaire de connaître le paramètre $\pi_{x1,y1}$ ainsi que les 4 corrélations liant les densités de probabilité qui vont être mélangées entre les signaux : $\rho_{x1,y1}$, $\rho_{x2,y2}$, $\rho_{x1,y2}$, $\rho_{x2,y1}$.

L'ensemble du raisonnement détaillé ci-dessus est bien illustré par la figure 3.3.

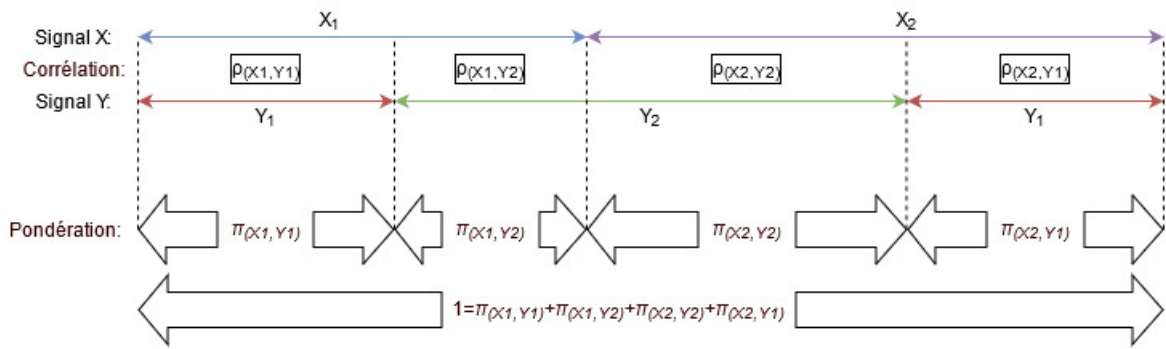


FIGURE 3.3 – Relation entre les deux signaux avec une densité de probabilité mélangée

NB : À première vue, on souhaiterait avoir une corrélation nulle entre les signaux $x1$ et $x2$ et de même pour $y1$ et $y2$. Cependant, il est nécessaire d'avoir une matrice de corrélation définie positive pour respecter le théorème de Cauchy-Schwartz. Cette condition va impacter la valeur de la corrélation de $\rho_{x1,x2}$ et $\rho_{y1,y2}$. Ces dernières corrélations ne pourront pas toujours être nulles. Il est cependant possible de déterminer une valeur permettant de respecter la condition de la matrice de corrélation en résolvant le déterminant de la matrice 4×4 de corrélation.

3.2.2 Détermination des paramètres

Les différentes statistiques unilatérales pour les deux signaux mélangés sont connues par l'algorithme de la section 2.1 et seront réutilisées pour cet algorithme. Il ne reste plus qu'à connaître le paramètre $\pi_{x1,y1}$ (il est possible de déterminer les 4 facteurs de pondération en connaissant uniquement $\pi_{x1,y1}$) et les 4 corrélations reprenant les relations entre les densités de probabilité composant les densités de probabilité mélangées.

Dans cette section, le choix s'est encore tourné vers un algorithme du type Exp-Max et non vers un algorithme de moindre carré. Comme dit précédemment, l'algorithme Exp-Max va augmenter le poids des queues de distribution, du fait qu'il fonctionne avec une fonction logarithmique de vraisemblance. Dans ce cas-ci, la variante développée avec des valeurs discrétisées et leurs facteurs de pondération a aussi été utilisée. Les deux étapes de calcul sont donc légèrement modifiées. Ceci est dû au fait que la discrétisation dépend de la discrétisation des deux signaux (x^i, y^j) . Les deux étapes sont reprises ci-dessous :

$$r_{k,l}^{i,j} \leftarrow Pr(z_1 = k, z_2 = l | x^i, y^j) = \frac{Pr(z_1=k, z_2=l) * Pr(x^i, y^j | z_1=k, z_2=l)}{\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 Pr(z_1=m, z_2=n) * Pr(x^i, y^j | z_1=m, z_2=n)} \times N_{(x^i-dx < \sum x < x^i+dx) \& (y^j-dy < \sum y < y^j+dy)} \quad (3.17)$$

$$\log = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 r_{k,l}^{i,j} \times (\log(Pr(z_1 = k, z_2 = l)) + \log(Pr(x^i, y^j | z_1 = k, z_2 = l))) \quad (3.18)$$

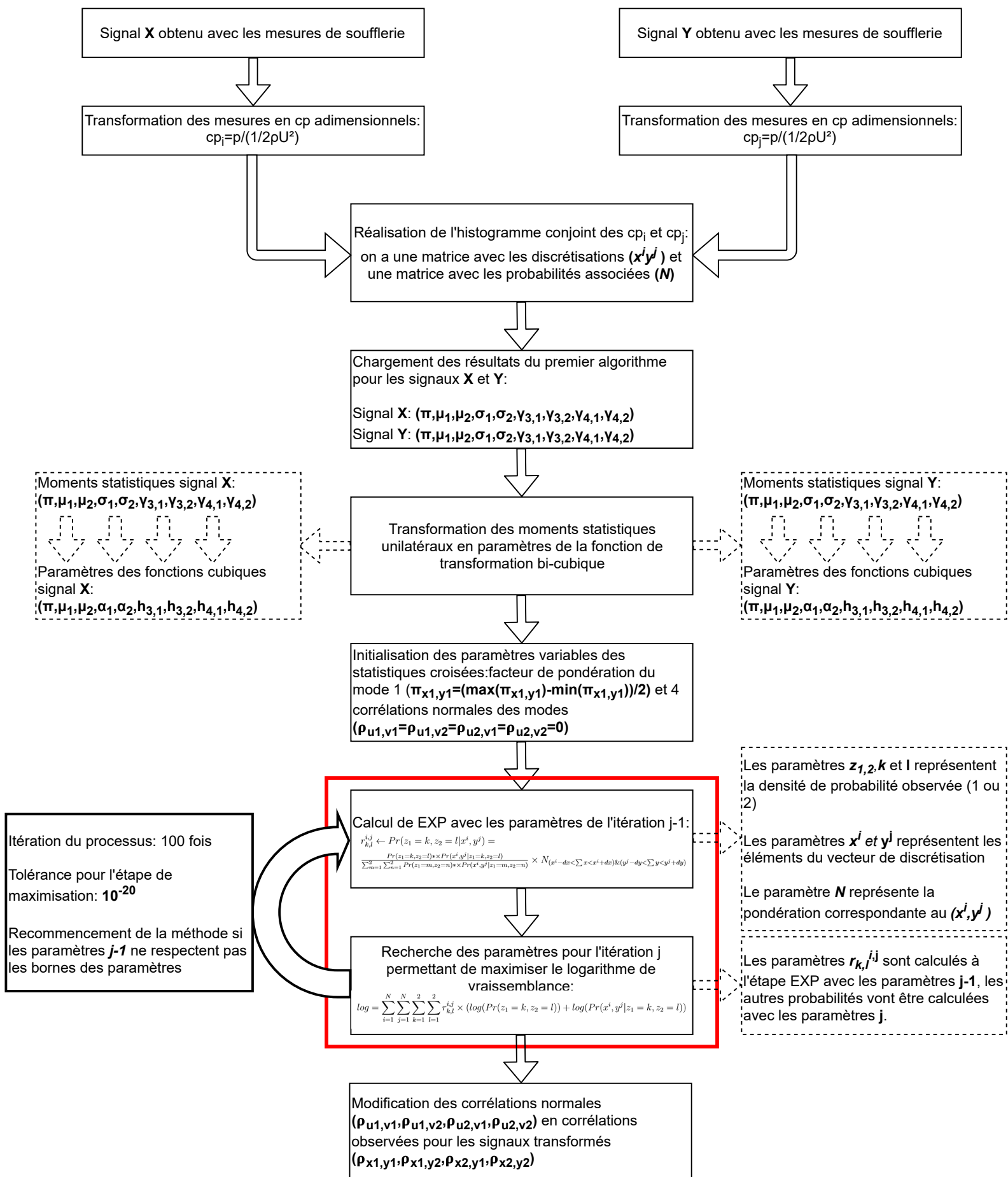
Dans ces deux étapes, les paramètres $:Pr(z_1 = k, z_2 = l)$ représentent les facteurs de pondération cherchés pour les 4 corrélations liant les composantes de la densité de probabilité mélangée ($\pi_{x1,y1}$, $\pi_{x1,y2}$, $\pi_{x2,y1}$ et $\pi_{x2,y2}$). Ces 4 corrélations vont, elles, avoir un impact pour les probabilités : $Pr(x^i, y^j | z_1 = k, z_2 = l)$. Il est donc nécessaire, pour cet algorithme, de générer la probabilité en chaque point discrétisé. Pour y arriver, la méthode utilisée est celle de l'équation 2.20.

Il a aussi été important d'initialiser les paramètres d'optimisation. L'initialisation du paramètre de pondération ($\pi_{x1,y1}$) a été prise au milieu de son intervalle de validité. Cet intervalle a été décrit dans la section 3.2.1 et il vaut : $\max(0; \pi_x + \pi_y - 1) < \pi_{x1,y1} < \min(\pi_x; \pi_y)$. Il dépend directement des 2 fonctions de pondération obtenues pour les mélanges des 2 signaux.

L'initialisation des corrélations a été considérée comme équivalente pour les 4 corrélations. Les corrélations ont aussi été prises au centre de leur intervalle, soit avec une valeur nulle. Une autre solution aurait été de les initialiser comme équivalentes à la corrélation de la densité de probabilité conjointe sans dé-mixage. Cependant, ceci augmenterait le temps de résolution et n'accroîtrait pas la qualité de la résolution.

Pour finir, les 4 corrélations utilisées par l'algorithme Exp-Max lient les signaux normaux entre eux. Il sera donc nécessaire de réaliser la transformation si on veut obtenir la corrélation réelle de la densité de probabilité transformée par une bicubique. La transformation entre les deux corrélations est réalisée à l'aide de la section 3.5 du chapitre 2.

Pour montrer la méthodologie utilisée, le diagramme de la page suivante a été réalisé :



4 Algorithme de dé-mixage pour la tri-corrélation

4.1 Algorithme entre trois signaux non mélangés

4.1.1 Paramètres nécessaires

Les différentes propriétés qui lient les 3 signaux sont les statistiques unilatérales qui sont propres à chacun des 3 signaux ainsi que les 3 corrélations qui représentent les statistiques corrélées entre ces 3 signaux.

Pour des signaux non mélangés, il n'existe pas de nouveau moment statistique pour la tri-corrélation. Ceci rejoint les travaux de [Blaise \(2016\)](#) et [Blaise et al. \(2017\)](#).

Ce qui est important pour les 3 signaux, c'est que les 3 corrélations respectent une certaine logique entre elles. Les 3 corrélations ne peuvent pas être prises aléatoirement entre -1 et 1. Cet aspect a été mis en avant dans la section 3.6 du chapitre 2. On y a montré que la matrice de corrélation d'une taille 3×3 doit être semi-définie positive. Pour que ce soit possible, il faut respecter le critère repris ci-dessous :

$$1 - (\rho_{uv}^2 + \rho_{uw}^2 + \rho_{vw}^2) + 2\rho_{uv}\rho_{uw}\rho_{vw} \geq 0 \quad (3.19)$$

Cet aspect de relation entre les 3 corrélations a un sens physique. Un exemple simple l'illustre bien. Si on émet l'hypothèse qu'on a une corrélation parfaite entre les signaux u et v (mathématiquement, on a $\rho_{u,v} = 1$) et les signaux u et w (mathématiquement, on a $\rho_{u,w} = 1$), alors la corrélation entre le signal v et w doit aussi être parfaite. Ce qui donne mathématiquement un $\rho_{v,w} = 1$. En analysant le critère de l'équation 3.19 en remplaçant $\rho_{u,v}$ et $\rho_{u,w}$ par 1, on trouve l'inégalité suivante :

$$-1 - \rho_{vw}^2 + 2\rho_{vw} \geq 0 \quad (3.20)$$

Cette inégalité peut-être uniquement vérifiée si ρ_{vw} vaut 1, comme attendu.

4.1.2 Détermination des paramètres

Aucun nouveau paramètre ne va apparaître. Il n'est donc pas nécessaire d'étudier la tri-corrélation pour des signaux non-mélangés.

4.2 Algorithme entre trois signaux avec une densité de probabilité mélangée

4.2.1 Paramètres nécessaires

Il est tout d'abord nécessaire de définir les 9 paramètres des statistiques unilatérales pour chacun des 3 signaux mélangés. Pour engendrer la tri-corrélation, il a été montré dans le chapitre 2 qu'il n'y avait pas de moment supplémentaire. Il est uniquement nécessaire de connaître, en plus des statistiques unilatérales, les corrélations qui lient 2 signaux. Pour des signaux non mélangés, il était nécessaire de connaître les 3 corrélations : $\rho_{u,v}, \rho_{u,w}, \rho_{v,w}$. Pour 3 signaux mélangés, le nombre de corrélations à déterminer à l'aide des statistiques corrélées sera de 12. Les paramètres qu'il sera nécessaire de trouver pour la tri-corrélation sont 8 facteurs de pondération. Les trois densités de probabilité mélangées peuvent être réécrites comme ci-dessous :

$$\begin{cases} P_x(x) = \pi_x P_{x1}(x) + (1 - \pi_x) P_{x2}(x) \\ P_y(y) = \pi_y P_{y1}(y) + (1 - \pi_y) P_{y2}(y) \\ P_z(z) = \pi_z P_{z1}(z) + (1 - \pi_z) P_{z2}(z) \end{cases} \quad (3.21)$$

Les 12 corrélations qui vont pouvoir être déterminées à l'aide de l'algorithme pour les statistiques croisées sont :

- **Entre les signaux x et y** : $\rho_{x1,y1}$, $\rho_{x1,y2}$, $\rho_{x2,y1}$ et $\rho_{x2,y2}$
- **Entre les signaux x et z** : $\rho_{x1,z1}$, $\rho_{x1,z2}$, $\rho_{x2,z1}$ et $\rho_{x2,z2}$
- **Entre les signaux y et z** : $\rho_{y1,z1}$, $\rho_{y1,z2}$, $\rho_{y2,z1}$ et $\rho_{y2,z2}$

Ces 12 corrélations permettent d'avoir l'ensemble des relations qui lient les densités de probabilité servant aux mélanges entre eux.

Il manque maintenant l'information sur la répartition des combinaisons. Huit combinaisons de signaux servant au mélange ont pu être identifiées. Il est possible d'attribuer à chacune un facteur de pondération :

$$\begin{aligned} P_{ond_{x1,y1,z1}} &= \pi_{x1,y1,z1}, P_{ond_{x1,y1,z2}} = \pi_{x1,y1,z2}, \\ P_{ond_{x1,y2,z1}} &= \pi_{x1,y2,z1}, P_{ond_{x1,y2,z2}} = \pi_{x1,y2,z2}, \\ P_{ond_{x2,y1,z1}} &= \pi_{x2,y1,z1}, P_{ond_{x2,y1,z2}} = \pi_{x2,y1,z2}, \\ P_{ond_{x2,y2,z1}} &= \pi_{x2,y2,z1} \text{ et } P_{ond_{x2,y2,z2}} = \pi_{x2,y2,z2}. \end{aligned}$$

Si on reprend l'ensemble de ces combinaisons, il est possible de trouver la densité de probabilité tri-variée pour 3 signaux mélangés :

$$\begin{aligned} P_{x,y,z}(x, y, z) &= \pi_{x1,y1,z1} P_{x1,y1,z1}(x, y, z) + \pi_{x1,y1,z2} P_{x1,y1,z2}(x, y, z) \\ &+ \pi_{x1,y2,z1} P_{x1,y2,z1}(x, y, z) + \pi_{x1,y2,z2} P_{x1,y2,z2}(x, y, z) + \pi_{x2,y1,z1} P_{x2,y1,z1}(x, y, z) \\ &+ \pi_{x2,y1,z2} P_{x2,y1,z2}(x, y, z) + \pi_{x2,y2,z1} P_{x2,y2,z1}(x, y, z) + \pi_{x2,y2,z2} P_{x2,y2,z2}(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.22)$$

En réduisant d'une dimension la densité de probabilité, en la projetant dans une direction (comme dans le système d'équations 3.23), il est possible de faire apparaître des combinaisons qui pourront être mises en relation avec les pondérations obtenues pour les densités de probabilité conjointes.

$$\begin{cases} P_{x,y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{x,y,z}(x, y, z) dz \\ P_{x,z}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{x,y,z}(x, y, z) dy \\ P_{y,z}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{x,y,z}(x, y, z) dx \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} P_{x,y}(x, y) = (\pi_{x1,y1,z1} + \pi_{x1,y1,z2}) P_{x1,y1} + (\pi_{x1,y2,z1} + \pi_{x1,y2,z2}) P_{x1,y2} \\ \quad + (\pi_{x2,y1,z1} + \pi_{x2,y1,z2}) P_{x2,y1} + (\pi_{x2,y2,z1} + \pi_{x2,y2,z2}) P_{x2,y2} \\ P_{x,z}(x, z) = (\pi_{x1,y1,z1} + \pi_{x1,y2,z1}) P_{x1,z1} + (\pi_{x1,y1,z2} + \pi_{x1,y2,z2}) P_{x1,z2} \\ \quad + (\pi_{x2,y1,z1} + \pi_{x2,y2,z1}) P_{x2,z1} + (\pi_{x2,y1,z2} + \pi_{x2,y2,z2}) P_{x2,z2} \\ P_{y,z}(y, z) = (\pi_{x1,y1,z1} + \pi_{x2,y1,z1}) P_{y1,z1} + (\pi_{x1,y1,z2} + \pi_{x2,y1,z2}) P_{y1,z2} \\ \quad + (\pi_{x1,y2,z1} + \pi_{x2,y2,z1}) P_{y2,z1} + (\pi_{x1,y2,z2} + \pi_{x2,y2,z2}) P_{y2,z2} \end{cases} \quad (3.24)$$

Les facteurs de pondération qui ont été obtenus pour les statistiques croisées et qui vont être réutilisés pour cette partie sont repris dans les équations suivantes :

- **Entre le signal x et y** : $\pi_{x1,y1}$, $\pi_{x1,y2}$, $\pi_{x2,y1}$ et $\pi_{x2,y2}$
- **Entre le signal x et z** : $\pi_{x1,z1}$, $\pi_{x1,z2}$, $\pi_{x2,z1}$ et $\pi_{x2,z2}$
- **Entre le signal y et z** : $\pi_{y1,z1}$, $\pi_{y1,z2}$, $\pi_{y2,z1}$ et $\pi_{y2,z2}$

Les densités de probabilité qui ont été obtenues avec ces paramètres pour les statistiques croisées sont reprises ci-dessous :

$$\begin{cases} P_{x,y}(x, y) = \pi_{x1,y1} P_{x1,y1} + \pi_{x1,y2} P_{x1,y2} + \pi_{x2,y1} P_{x2,y1} + \pi_{x2,y2} P_{x2,y2} \\ P_{x,z}(x, z) = \pi_{x1,z1} P_{x1,z1} + \pi_{x1,z2} P_{x1,z2} + \pi_{x2,z1} P_{x2,z1} + \pi_{x2,z2} P_{x2,z2} \\ P_{y,z}(y, z) = \pi_{y1,z1} P_{y1,z1} + \pi_{y1,z2} P_{y1,z2} + \pi_{y2,z1} P_{y2,z1} + \pi_{y2,z2} P_{y2,z2} \end{cases} \quad (3.25)$$

Il est donc possible de générer les relations suivantes entre les systèmes d'équations 3.24 et 3.25 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{x1,y1} = \pi_{x1,y1,z1} + \pi_{x1,y1,z2} \\ \pi_{x1,y2} = \pi_{x1,y2,z1} + \pi_{x1,y2,z2} \\ \pi_{x2,y1} = \pi_{x2,y1,z1} + \pi_{x2,y1,z2} \\ \pi_{x2,y2} = \pi_{x2,y2,z1} + \pi_{x2,y2,z2} \\ \pi_{x1,z1} = \pi_{x1,y1,z1} + \pi_{x1,y2,z1} \\ \pi_{x1,z2} = \pi_{x1,y1,z2} + \pi_{x1,y2,z2} \\ \pi_{x2,z1} = \pi_{x2,y1,z1} + \pi_{x2,y2,z1} \\ \pi_{x2,z2} = \pi_{x2,y2,z1} + \pi_{x2,y2,z2} \\ \pi_{y1,z1} = \pi_{x1,y1,z1} + \pi_{x2,y1,z1} \\ \pi_{y1,z2} = \pi_{x1,y1,z2} + \pi_{x2,y1,z2} \\ \pi_{y2,z1} = \pi_{x1,y2,z1} + \pi_{x2,y2,z1} \\ \pi_{y2,z2} = \pi_{x1,y2,z2} + \pi_{x2,y2,z2} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Après un certain nombre de développements, on s'est rendu compte qu'il était possible de déterminer l'ensemble des paramètres en fonction d'un seul paramètre variable. Le choix s'est tourné ici vers le paramètre $\pi_{x1,y1,z1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{x1,y1,z2} = \pi_{x1,y1} - \pi_{x1,y1,z1} \\ \pi_{x1,y2,z1} = \pi_{x1,z1} - \pi_{x1,y1,z1} \\ \pi_{x1,y2,z2} = \pi_{x1,y2} - \pi_{x1,z1} + \pi_{x1,y1,z1} \\ \pi_{x2,y1,z1} = \pi_{y1,z1} - \pi_{x1,y1,z1} \\ \pi_{x2,y1,z2} = \pi_{y1,z2} - \pi_{x1,y1} + \pi_{x1,y1,z1} \\ \pi_{x2,y2,z1} = \pi_{y2,z1} - \pi_{x1,z1} + \pi_{x1,y1,z1} \\ \pi_{x2,y2,z2} = \pi_{y2,z2} - \pi_{x1,y2} + \pi_{x1,z1} - \pi_{x1,y1,z1} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Il est nécessaire qu'une fois sommés l'ensemble des 8 facteurs de pondération soit équivalent à l'unité. Ce résultat est vérifié lorsqu'on additionne les 8 facteurs de pondération du système d'équations 3.27. Une deuxième propriété importante est que l'ensemble des facteurs de pondération ne peuvent être négatifs. Il est donc possible de trouver les bornes supérieures et inférieures du paramètre variable $\pi_{x1,y1,z1}$. Les deux bornes sont reprises dans le système d'équations 3.28.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{x1,y1,z1} \leq \min(1, \pi_{x1,y1}, \pi_{x1,z1}, \pi_{y1,z1}, \pi_{y2,z2} - \pi_{x1,y2} + \pi_{x1,z1}, 1 - (\pi_{x1,y2} - \pi_{x1,z1}), \dots \\ \quad 1 - (\pi_{y1,z2} - \pi_{x1,y1}), 1 - (\pi_{y2,z1} - \pi_{x1,z1}), 1 - (\pi_{y2,z1} - \pi_{x1,z1})) \\ \pi_{x1,y1,z1} \geq \max(0, -\pi_{x1,y2} + \pi_{x1,z1}, -\pi_{y1,z2} + \pi_{x1,y1}, -\pi_{y2,z1} + \pi_{x1,z1}, 1 - \pi_{y2,z2} + \pi_{x1,y2} - \pi_{x1,z1}) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Il est aussi intéressant d'observer qu'il n'est pas possible de choisir les 12 corrélations décrites plus haut dans cette section de manière indépendante. Il faut respecter, pour les 8 densités de probabilité de 3 dimensions, une matrice de corrélation semi-définie positive. Pour que ce soit le cas, il est nécessaire de respecter les 8 conditions du système d'équations 3.29. Selon le théorème de Cauchy Schwartz, 3 signaux générés auront dans tous les cas une matrice de corrélation définie positive.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Pour } x1,y1,z1 : 1 - \rho_{x1,y1}^2 - \rho_{x1,z1}^2 - \rho_{y1,z1}^2 + 2\rho_{x1,y1}\rho_{x1,z1}\rho_{y1,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x1,y1,z2 : 1 - \rho_{x1,y1}^2 - \rho_{x1,z2}^2 - \rho_{y1,z2}^2 + 2\rho_{x1,y1}\rho_{x1,z2}\rho_{y1,z2} \geq 0 \\
\text{Pour } x1,y2,z1 : 1 - \rho_{x1,y2}^2 - \rho_{x1,z1}^2 - \rho_{y2,z1}^2 + 2\rho_{x1,y2}\rho_{x1,z1}\rho_{y2,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x1,y2,z2 : 1 - \rho_{x1,y2}^2 - \rho_{x1,z2}^2 - \rho_{y2,z2}^2 + 2\rho_{x1,y2}\rho_{x1,z2}\rho_{y2,z2} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y1,z1 : 1 - \rho_{x2,y1}^2 - \rho_{x2,z1}^2 - \rho_{y1,z1}^2 + 2\rho_{x2,y1}\rho_{x2,z1}\rho_{y1,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y1,z2 : 1 - \rho_{x2,y1}^2 - \rho_{x2,z2}^2 - \rho_{y1,z2}^2 + 2\rho_{x2,y1}\rho_{x2,z2}\rho_{y1,z2} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y2,z1 : 1 - \rho_{x2,y2}^2 - \rho_{x2,z1}^2 - \rho_{y2,z1}^2 + 2\rho_{x2,y2}\rho_{x2,z1}\rho_{y2,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y2,z2 : 1 - \rho_{x2,y2}^2 - \rho_{x2,z2}^2 - \rho_{y2,z2}^2 + 2\rho_{x2,y2}\rho_{x2,z2}\rho_{y2,z2} \geq 0
\end{array} \right. \quad (3.29)$$

La figure 3.4 a été réalisée pour résumer la définition de la tri-corrélation développée ci-dessus.

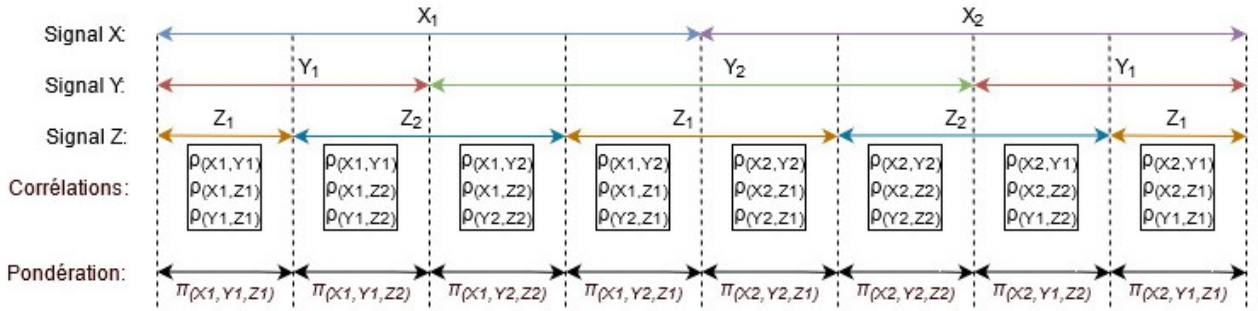


FIGURE 3.4 – Tri-corrélation entre 3 signaux

4.2.2 Détermination des paramètres

Dans la section 4.2.1, l'ensemble des conditions qu'il faut respecter pour représenter une densité de probabilité dépendant de 3 signaux a été mis en avant. Dans cette section, il a aussi été souligné que pour générer une densité de probabilité dépendant de 3 signaux mélangés, une seule inconnue doit être déterminée. Cette inconnue est le premier facteur de pondération $\pi_{x1,y1,z1}$. On utilise les statistiques unilatérales et corrélées déterminées par les deux algorithmes développés précédemment, afin de calculer la tri-corrélation.

Les conditions nécessaires pour la matrice de corrélation sont en théorie toujours respectées selon le théorème de Cauchy Schwartz. Cependant, pour certaines combinaisons de 3 capteurs, cette condition n'a pas toujours été respectée. Une vérification sera donc toujours opérée avant de réaliser le calcul de la tri-corrélation. Elle est reprise ci-dessous et est équivalente au système d'équations 3.29 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Pour } x1,y1,z1 : 1 - \rho_{x1,y1}^2 - \rho_{x1,z1}^2 - \rho_{y1,z1}^2 + 2\rho_{x1,y1}\rho_{x1,z1}\rho_{y1,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x1,y1,z2 : 1 - \rho_{x1,y1}^2 - \rho_{x1,z2}^2 - \rho_{y1,z2}^2 + 2\rho_{x1,y1}\rho_{x1,z2}\rho_{y1,z2} \geq 0 \\
\text{Pour } x1,y2,z1 : 1 - \rho_{x1,y2}^2 - \rho_{x1,z1}^2 - \rho_{y2,z1}^2 + 2\rho_{x1,y2}\rho_{x1,z1}\rho_{y2,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x1,y2,z2 : 1 - \rho_{x1,y2}^2 - \rho_{x1,z2}^2 - \rho_{y2,z2}^2 + 2\rho_{x1,y2}\rho_{x1,z2}\rho_{y2,z2} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y1,z1 : 1 - \rho_{x2,y1}^2 - \rho_{x2,z1}^2 - \rho_{y1,z1}^2 + 2\rho_{x2,y1}\rho_{x2,z1}\rho_{y1,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y1,z2 : 1 - \rho_{x2,y1}^2 - \rho_{x2,z2}^2 - \rho_{y1,z2}^2 + 2\rho_{x2,y1}\rho_{x2,z2}\rho_{y1,z2} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y2,z1 : 1 - \rho_{x2,y2}^2 - \rho_{x2,z1}^2 - \rho_{y2,z1}^2 + 2\rho_{x2,y2}\rho_{x2,z1}\rho_{y2,z1} \geq 0 \\
\text{Pour } x2,y2,z2 : 1 - \rho_{x2,y2}^2 - \rho_{x2,z2}^2 - \rho_{y2,z2}^2 + 2\rho_{x2,y2}\rho_{x2,z2}\rho_{y2,z2} \geq 0
\end{array} \right. \quad (3.30)$$

Le seul paramètre à obtenir est le paramètre $\pi_{x1,y1,z1}$. Il doit être compris entre les bornes déterminées dans le système d'équations 3.28, repris ci-dessous :

$$\begin{cases} \pi_{x1,y1,z1} \leq \min(1, \pi_{x1,y1}, \pi_{x1,z1}, \pi_{y1,z1}, \pi_{y2,z2} - \pi_{x1,y2} + \pi_{x1,z1}, 1 - (\pi_{x1,y2} - \pi_{x1,z1}), \dots \\ \quad 1 - (\pi_{y1,z2} - \pi_{x1,y1}), 1 - (\pi_{y2,z1} - \pi_{x1,z1}), 1 - (\pi_{y2,z1} - \pi_{x1,z1})) \\ \pi_{x1,y1,z1} \geq \max(0, -\pi_{x1,y2} + \pi_{x1,z1}, -\pi_{y1,z2} + \pi_{x1,y1}, -\pi_{y2,z1} + \pi_{x1,z1}, 1 - \pi_{y2,z2} + \pi_{x1,y2} - \pi_{x1,z1}) \end{cases} \quad (3.31)$$

Pour déterminer le paramètre $\pi_{x1,y1,z1}$ tel que la densité de probabilité analytique respecte au mieux la densité de probabilité générée par les 3 signaux de pression, il a été choisi de travailler avec un algorithme Exp-Max. Ce choix a été réalisé dans la continuité des choix opérés pour les statistiques unilatérales et corrélées. Ce choix va aussi permettre de bien respecter les distributions de pressions en queue de distribution.

Comme décrit dans les algorithmes pour les statistiques unilatérales et corrélées, l'algorithme Exp-Max utilisé n'est pas exactement celui trouvé dans l'article [Dempster et al. \(1977\)](#). C'est celui qui a été modifié et qui travaille avec des facteurs de pondération.

Les deux fonctions utilisées par le code Exp-Max (estimation et maximisation) sont reprises ci-dessous :

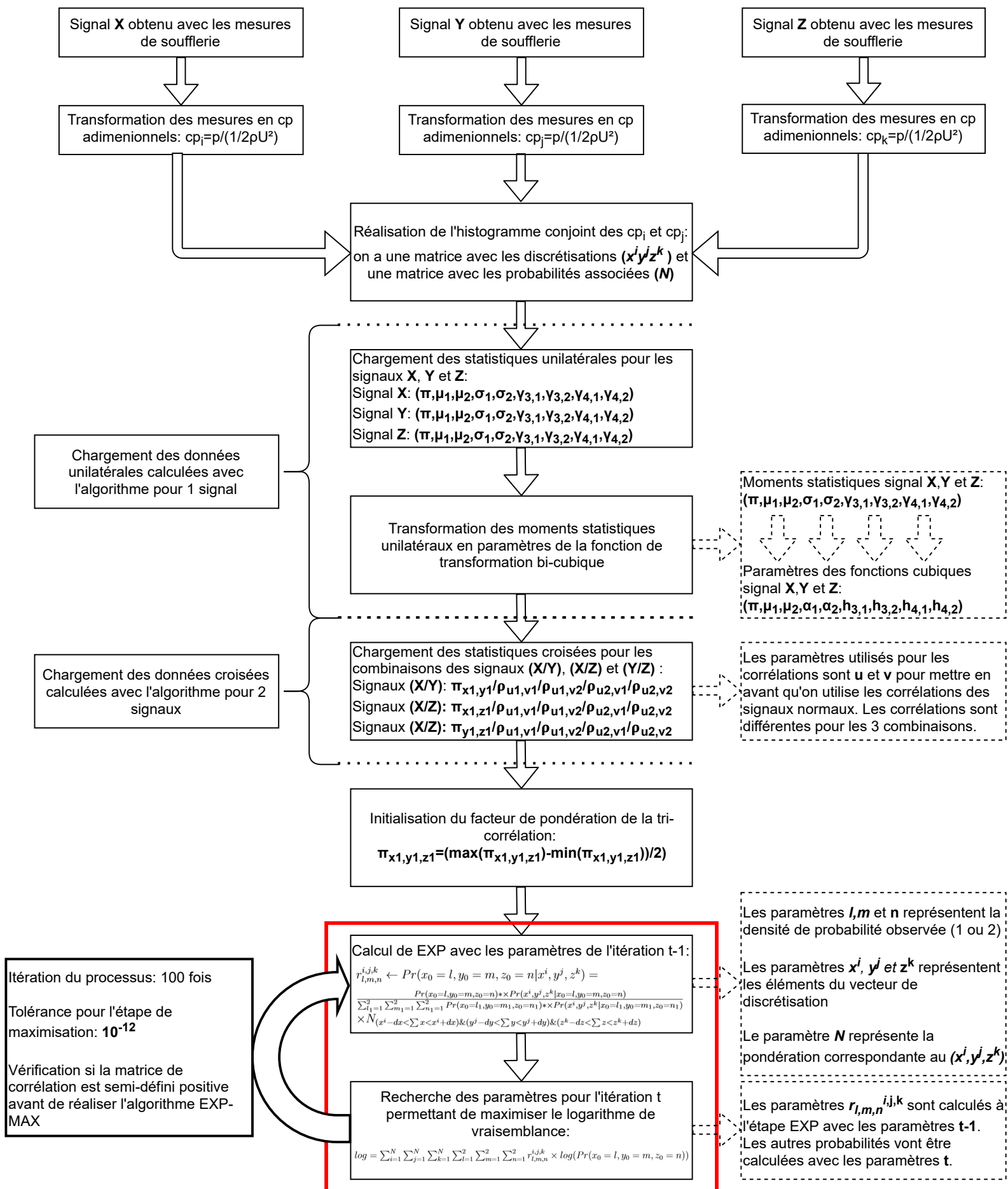
$$\begin{aligned} r_{l,m,n}^{i,j,k} &\leftarrow Pr(x_0 = l, y_0 = m, z_0 = n | x^i, y^j, z^k) = \\ &\frac{Pr(x_0=l, y_0=m, z_0=n) * Pr(x^i, y^j, z^k | x_0=l, y_0=m, z_0=n)}{\sum_{l_1=1}^2 \sum_{m_1=1}^2 \sum_{n_1=1}^2 Pr(x_0=l_1, y_0=m_1, z_0=n_1) * Pr(x^i, y^j, z^k | x_0=l_1, y_0=m_1, z_0=n_1)} \\ &\times N_{(x^i-dx < \sum x < x^i+dx) \& (y^j-dy < \sum y < y^j+dy) \& (z^k-dz < \sum z < z^k+dz)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\log = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 r_{l,m,n}^{i,j,k} \times (\log(Pr(x_0 = l, y_0 = m, z_0 = n)) + \log(Pr(x^i, y^j, z^k | (x_0 = l, y_0 = m, z_0 = n)))) \quad (3.33)$$

Les paramètres $Pr(x_0 = l, y_0 = m, z_0 = n)$ représentent les 8 facteurs de pondération qui permettent de mettre en relation les densités de probabilité des 8 modes. Les densités de probabilité pour chacune des combinaisons sont illustrées comme $Pr(x^i, y^j, z^k | x_0 = l, y_0 = m, z_0 = n)$. Il est nécessaire de connaître les 3 paramètres $(x_0 = l, y_0 = m, z_0 = n)$ qui caractérisent chacune des 8 densités de probabilité composant le mélange de la tri-corrélation. Dans ce cas d'étude, on cherche uniquement à déterminer un des facteurs de pondération : $\pi_{x1,y1,z1}$. Comme c'est l'unique paramètre variable, il est possible de simplifier la fonction de maximisation et d'utiliser :

$$\log = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 r_{l,m,n}^{i,j,k} \times \log(Pr(x_0 = l, y_0 = m, z_0 = n)) \quad (3.34)$$

L'algorithme utilisé pour la tri-corrélation fonctionne de la même manière que le diagramme se trouvant ci-dessous :



5 Conclusion

À travers ce chapitre, une méthodologie a été développée afin d'obtenir les statistiques unilatérales, les statistiques croisées et la tri-corrélation pour des signaux mélangés par 2 densités de probabilité transformées par une fonction cubique. Il est intéressant d'observer les avancées qui ont été faites pour l'analyse de signaux mélangés par rapport à la théorie de [Blaise \(2016\)](#) et [Blaise et al. \(2017\)](#). Afin de mettre en lumière ces avancées, les diagrammes 3.5, 3.6 et 3.7 ont été réalisés.

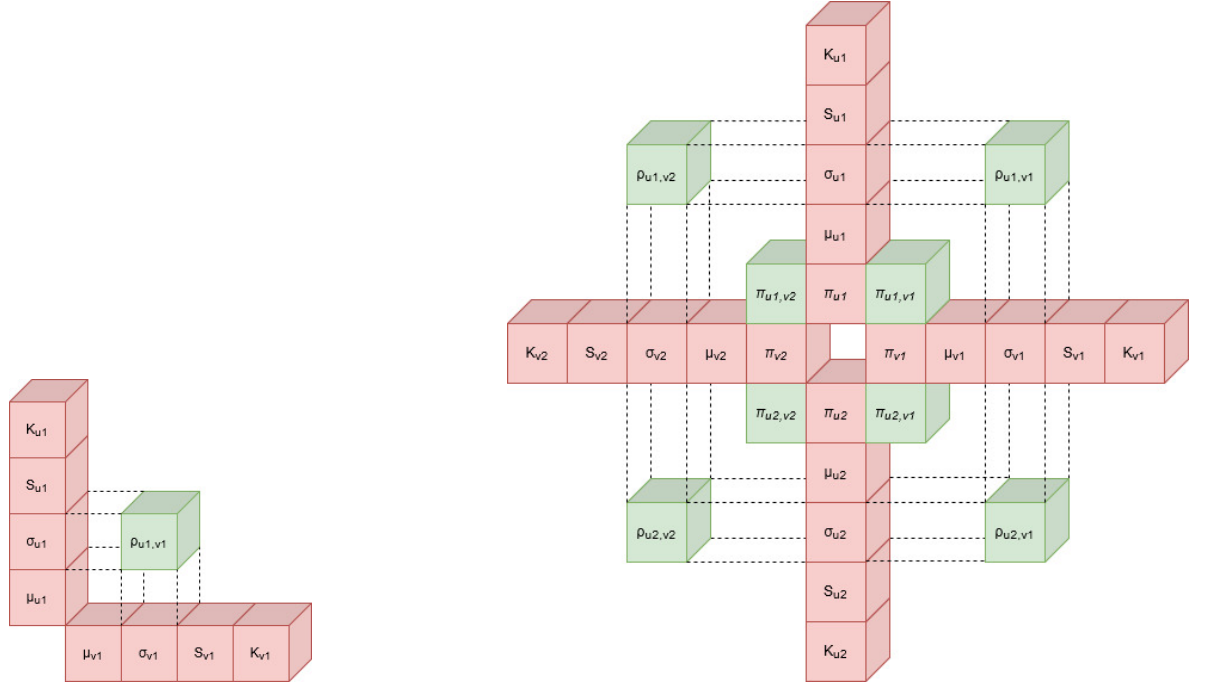


FIGURE 3.5 – Modèle initial [Blaise \(2016\)](#) et [Blaise et al. \(2017\)](#) FIGURE 3.6 – Modèle pour le rang 2 avec des signaux mélangés

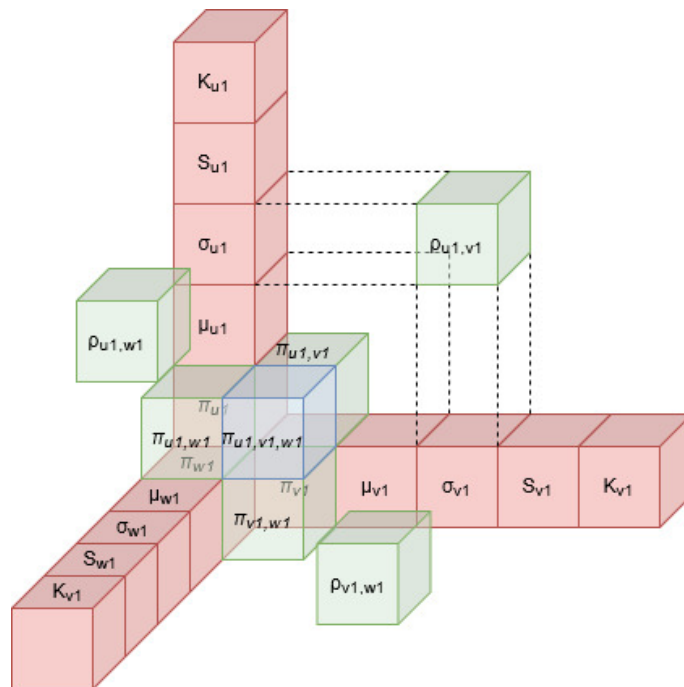


FIGURE 3.7 – Modèle pour une composante du signal mélangé au troisième rang

On peut observer sur la figure 3.5 le modèle initial développé dans la littérature par Blaise (2016) et Blaise *et al.* (2017). Ce diagramme représente les statistiques unilatérales et corrélées mises en avant par Blaise (2016) et Blaise *et al.* (2017) pour pouvoir reconstruire un signal non mélangé.

La figure 3.6 reprend les statistiques unilatérales et corrélées, qu'il est nécessaire de connaître pour réaliser la reconstruction des 2 signaux ayant une densité de probabilité mélangée. De nouveaux paramètres font leur apparition dans le diagramme. On voit apparaître les paramètres de pondération $\pi_{v1}, \pi_{v2}, \pi_{u1}, \pi_{u2}$, qui illustrent la répartition des 2 composantes des mélanges pour les statistiques unilatérales. Pour les statistiques croisées, des facteurs de pondération ($\pi_{u1,v1}, \pi_{u1,v2}, \pi_{u2,v1}, \pi_{u2,v2}$) apparaissent aussi.

L'algorithme développé dans la section 2 permet de résoudre les cases rouges de cette figure, soit les moments et coefficients de répartition des statistiques unilatérales. L'algorithme développé dans la section 3 permet quant à lui d'identifier les cases vertes. Celles-ci représentent les coefficients de répartition des statistiques croisées ainsi que les corrélations des modes.

La figure 3.7 représente une des 8 combinaisons possibles pour la tri-corrélation de 3 signaux mélangés par 2 densités de probabilité chacun. On représente sur cette figure les moments et les coefficients de répartition pour les statistiques unilatérales et croisées comme sur la figure 3.6. Cependant, un nouveau paramètre fait son apparition pour la tri-corrélation : un coefficient de répartition. Ce coefficient est représenté par une case bleue sur le diagramme.

Pour le modèle de signaux non mélangés développé par Blaise (2016) et Blaise *et al.* (2017), aucune nouvelle information n'était donnée pour une étude de plus de deux signaux mélangés en même temps.

Le même raisonnement peut être suivi pour les combinaisons de plus de 3 signaux. Il est cependant compliqué de représenter les différents paramètres.

Chapitre 4

Résultats obtenus avec l'algorithme pour les mesures de soufflerie et analyse de la qualité des algorithmes

Les différents algorithmes du chapitre 3 vont être utilisés avec les données décrites dans la section 3 du chapitre 1. Des analyses de stabilité vont être réalisées sur les différentes décompositions obtenues afin de montrer les possibilités et les limites de l'algorithme.

Dans la même logique que pour le chapitre de l'algorithme développé, le travail va être scindé en différentes parties en fonction du fait qu'on étudie les statistiques unilatérales ou bien les statistiques corrélées ou encore la tri-corrélation.

Il est nécessaire de se souvenir que les mesures obtenues en soufflerie sont générées par des phénomènes complexes de turbulence et de tourbillons de coin. Aucun modèle physique n'existe de nos jours afin de reproduire l'ensemble de ces phénomènes. C'est pour cette raison que des études en soufflerie sont nécessaires. Il est donc illusoire de trouver une décomposition parfaite des mesures obtenues en soufflerie. L'objectif est de trouver une méthode qui approche au mieux les données mesurées.

1 Résultats pour l'algorithme traitant les statistiques unilatérales

1.1 Résultats du signal étudié

Afin d'étudier l'algorithme pour les signaux étudiés séparément, les propriétés de l'algorithme pour le capteur de pression 36 seront analysées. Ce capteur de pression est localisé sur la figure 4.1 par un carré noir. La densité de probabilité obtenue (échelle linéaire et logarithmique) par l'algorithme est reprise à la figure 4.2.

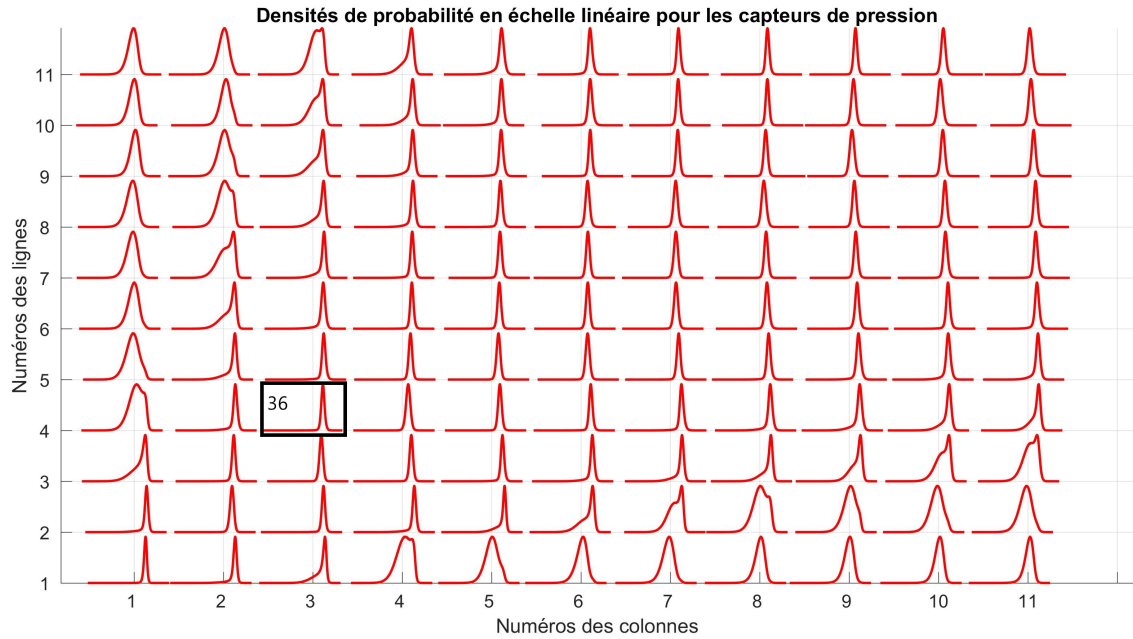


FIGURE 4.1 – Localisation du capteur 36 de pression

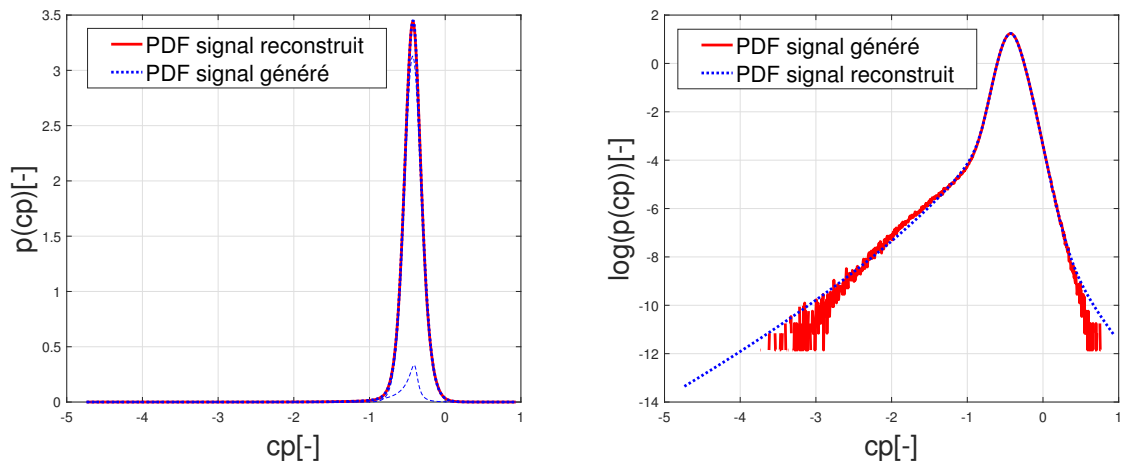


FIGURE 4.2 – Application de l'algorithme pour le capteur 36 de pression

1.2 Convergence de l'algorithme

L'algorithme de dé-mixage utilisé est un algorithme Exp-Max. Ce type d'algorithme est itératif et devra donc être itéré un certain nombre de fois. Le principe de cet algorithme est de trouver le maximum de vraisemblance pour chaque étape de calcul. Pour trouver ce maximum de vraisemblance, il a été nécessaire d'utiliser la fonction '*fmincon*', qui cherche le puits de convergence le plus proche du point d'initialisation qu'on lui donne. Il va être nécessaire de montrer que le code a convergé vers un minimum qui est unique pour chaque itération de la maximisation. Si une vérification générale avait été faite, il aurait fallu vérifier les puits dans un espace de 9 dimensions pour l'ensemble des capteurs de pression et pour l'ensemble des itérations.

Ce type de vérification générale n'est pas possible à cause de la quantité de données et à cause de la problématique de représentation de toutes les solutions. On a donc vérifié uniquement la dernière itération. Comme le code a convergé pour la dernière itération, il est possible d'observer si

la modification des paramètres pour l'itération $n+1$ améliorerait l'algorithme de vraisemblance. Deux types de modifications ont été appliqués :

— **Modification des paramètres pour 1 des 9 paramètres uniquement**

Une première vérification a été réalisée en traçant 9 coupes du puits de convergence. Chacune fait varier un des paramètres à la fois.

Les résultats sont repris sur la figure 4.3. On y observe que le code a bien convergé vers un puits unique selon les 9 coupes et qu'une même modification pour les différents moments statistiques n'aura pas la même influence sur le maximum de vraisemblance (exemple entre les paramètres μ_1 et μ_2).

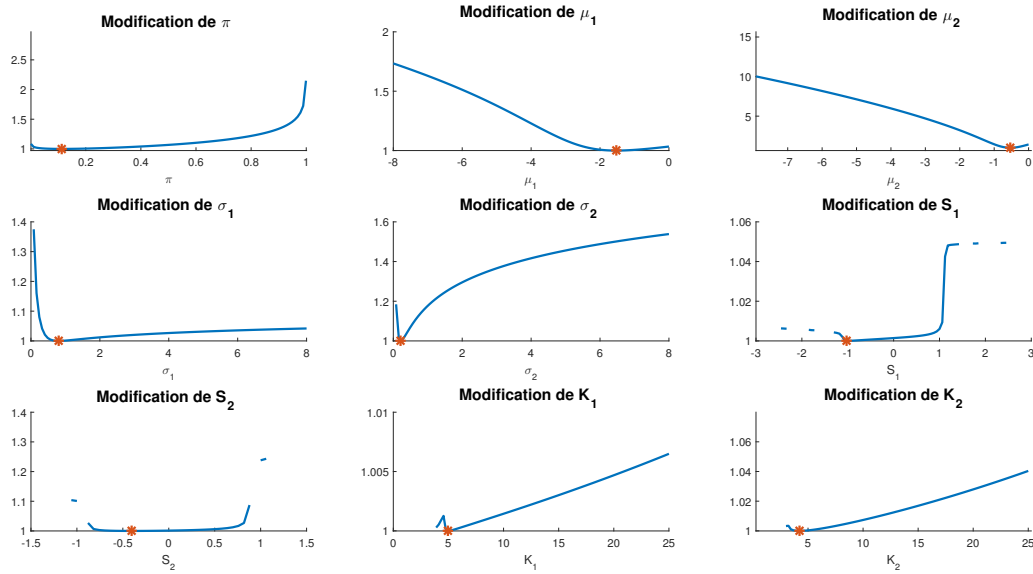


FIGURE 4.3 – Convergence des coupes vers le résultat obtenu

— **Modification des 9 paramètres aléatoirement**

Utiliser uniquement des coupes est fortement restrictif comme méthode. Pour cette raison, une seconde vérification a été développée. Cette seconde vérification fait varier les 9 paramètres à la fois dans le voisinage de la solution proposée par le code. On mesure la modification des paramètres avec une différence au carré entre la nouvelle solution et celle proposée par le code. Pour mesurer si la nouvelle solution est plus efficace, on en calcule le logarithme de vraisemblance avec la fonction de maximisation de l'algorithme Exp-Max. Sur cette figure, le logarithme de vraisemblance a été normalisé à l'unité pour l'axe des ordonnées.

Il a été possible d'obtenir les résultats de la figure 4.4. On constate que les logarithmes de vraisemblance générés par les nouveaux paramètres (cercles bleus) de la fonction de maximisation ne peuvent être inférieurs à la solution donnée par l'algorithme (croix rouge).

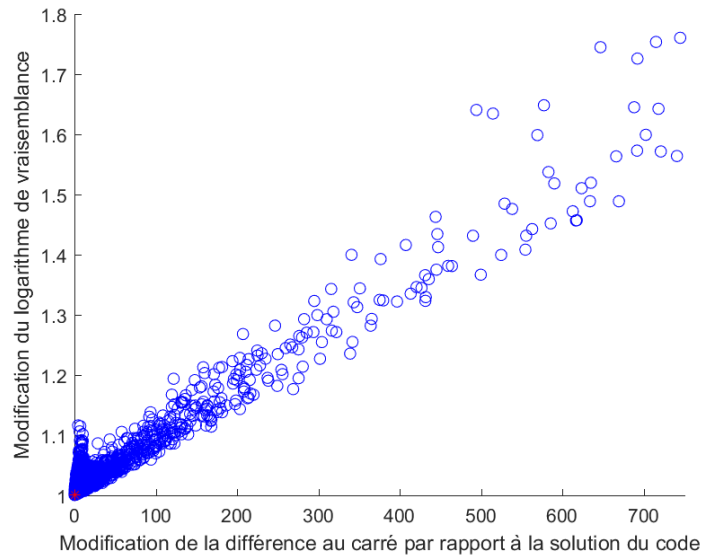


FIGURE 4.4 – Validation de la convergence du code

Une tendance linéaire semble apparaître sur la figure 4.4. Elle illustre le fait que lorsqu'on a une solution fortement différente de la solution de l'algorithme, les deux axes auront des valeurs qui augmenteront avec une certaine relation. Une deuxième droite apparaît aussi au niveau de l'origine de l'axe. Celle-ci montre qu'une faible modification en queue de distribution aura un grand impact sur le logarithme de vraisemblance, mais pas sur les moindres carrés.

1.3 Convergence du code vers la solution optimale

Une des problématiques d'un code Exp-Max est que ce dernier peut converger vers un minimum local. La convergence vers un minimum local dépend directement du point de départ de l'algorithme. Pour cette raison, 50 points de départ ont été utilisés par le code Exp-Max pour trouver une solution avec deux densités de probabilité normales.

Une vérification a été réalisée en modifiant les paramètres de la PDF aléatoirement et en vérifiant si la solution trouvée n'était pas un minimum local.

La difficulté de cette vérification est identique à celle de la vérification de la convergence de l'algorithme Exp-Max à chaque itération : 9 paramètres sont variables. Le minimum local se situe donc dans un puits à 9 dimensions. Deux approches ont été développées, comme pour la convergence des itérations, pour prouver que notre solution se situe bien au niveau d'un minimum global et non local.

Comme précédemment, le nombre de points de pression vérifié a été limité pour ne pas augmenter le volume de ce document.

— Modification des paramètres pour 1 des 9 paramètres uniquement

Une première vérification a été réalisée afin de déterminer si la solution donnée par le code se situait bien dans un puits de convergence selon les 9 coupes dans l'espace à 9 dimensions. Chacune des coupes représente l'effet de la modification d'un paramètre unique. Les autres paramètres sont conservés comme identiques.

Pour la vérification du minimum, l'abscisse représente la valeur du paramètre modifié et l'ordonnée donne la différence au carré entre la densité de probabilité des mesures de soufflerie et la densité de probabilité modifiée par les nouveaux paramètres.

La figure 4.5 représente les 9 coupes observées pour le point de pression 36.

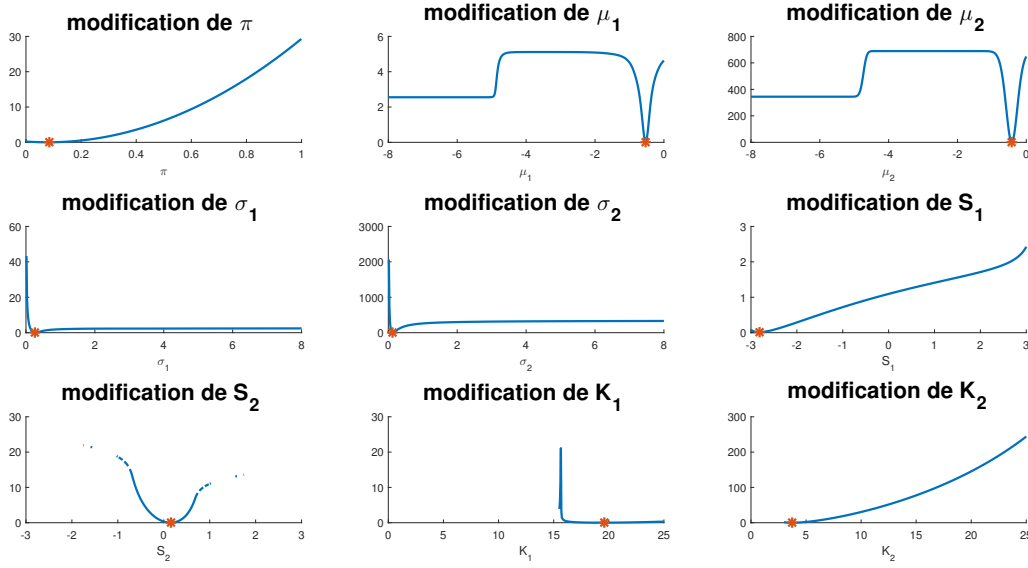


FIGURE 4.5 – Convergence du code vers un minimum pour les 9 coupes

— Modification des 9 paramètres aléatoirement

Pour la modification des 9 paramètres, on utilise cette fois une génération aléatoire. Les 9 paramètres (le facteur de pondération, la moyenne, l'écart-type et le kurtosis) sont générés aléatoirement entre les bornes observées sur la figure 5.3 multipliées par 2. Le skewness a été généré aléatoirement entre les bornes du critère de Winterstein obtenu en fonction du kurtosis choisi.

On va observer s'il existe des solutions qui ont une différence au carré inférieure entre le signal généré et celui mesuré avec les capteurs de pression. La figure 4.6 illustre les résultats obtenus pour l'ensemble des solutions générées aléatoirement. En abscisse, on peut observer la différence au carré entre le nouveau signal généré et le signal obtenu avec l'algorithme. En ordonnée, on note la différence au carré mesurée entre le signal des nouveaux paramètres et le signal obtenu avec les mesures de pression.

Au vu de la qualité de la reconstruction, il existe une forte corrélation entre l'abscisse et l'ordonnée. Il sera donc intéressant d'observer les résultats pour une abscisse faible.

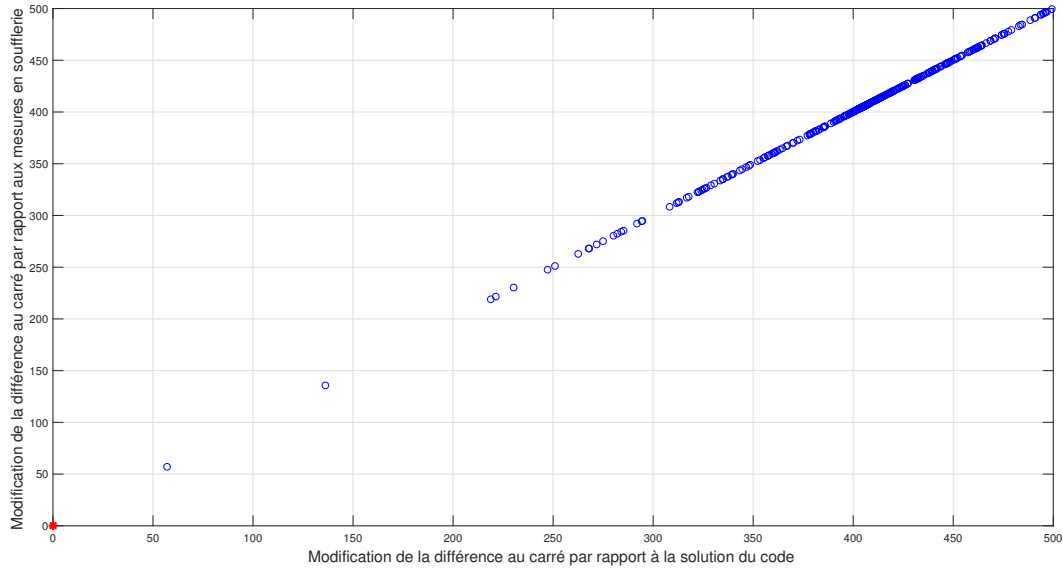


FIGURE 4.6 – Évolution de l'erreur en fonction des nouveaux paramètres

L'approche de la figure 4.6 est équivalente à chercher une aiguille dans une botte de foin. Il aurait fallu avoir une infinité de réalisations afin d'espérer trouver une solution qui convergerait mieux que le code. En analysant les résultats obtenus dans la section 1.4, on peut conclure qu'il est intéressant de vérifier, dans le voisinage de la solution du code, s'il n'existe pas un point qui approche mieux le signal. Cette vérification a été réalisée dans la figure 4.7. On peut y constater qu'aucune représentation dans le voisinage de la solution n'est plus proche de la bonne solution.

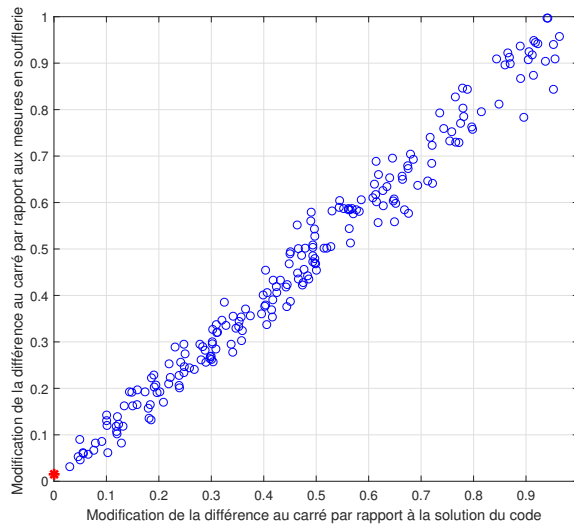


FIGURE 4.7 – Modification de la solution dans le voisinage de la solution obtenue avec l'algorithme

La qualité de reconstruction est telle qu'avec différentes méthodes de mesure de l'erreur, on tombe sur le même point de convergence (code Exp-Max et moindre carré avec l'échelle linéaire). On peut donc conclure que les reconstructions sont très fidèles aux mesures obtenues en soufflerie.

1.4 Convergence des marginales pour n générations

Une étude a été réalisée afin d'observer si l'algorithme donnait des résultats différents d'une implémentation à l'autre. Des différences ont pu être observées pour chacun des 9 paramètres. Il a donc été nécessaire de déterminer d'où cette différence pouvait provenir.

Une première observation a mis en avant que la tolérance de calcul de la fonction '*fmincon*', utilisée pour la maximisation du logarithme de vraisemblance, impactait directement les différences observées entre 2 générations. Une première conclusion aurait été de réduire la tolérance de calcul de la fonction '*fmincon*'. Cependant, cela augmenterait fortement le temps de calcul, ce qui est déjà problématique pour le moment avec une tolérance supérieure.

Une seconde observation met en avant le fait que pour certaines densités de probabilité, il n'existe pas une solution unique permettant d'approcher le signal par une combinaison de deux densités de probabilité.

Sur la figure 4.8, on représente l'implémentation de 10 densités de probabilité qui approchent la densité de probabilité mesurée en soufflerie au capteur 36. On remarque directement des différences entre les implémentations. Mais la somme des deux modes donne un résultat presque identique pour l'échelle linéaire et logarithmique. Pour l'échelle logarithmique, on remarque des différences entre les différentes implémentations en queue de distribution.

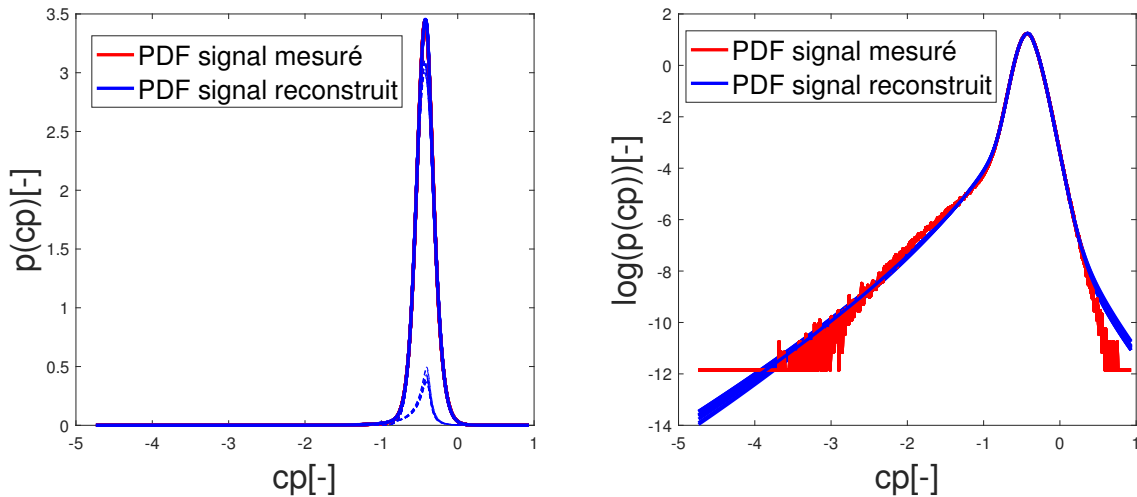


FIGURE 4.8 – Résultats obtenus pour la réalisation de 10 fois l'algorithme

Les résultats des 10 approches sont repris dans le tableau 4.1.

Géné : \ Param :	π	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	S_1	S_2	K_1	K_2
Génération 1	0.1227	-0.5021	-0.4211	0.2294	0.1257	-2.5706	0.1838	18.7233	3.6023
Génération 2	0.0988	-0.5186	-0.4215	0.2469	0.1261	-2.7267	0.1658	18.3971	3.6920
Génération 3	0.0960	-0.5212	-0.4215	0.2492	0.1261	-2.7485	0.1634	19.4772	3.7019
Génération 4	0.1119	-0.5080	-0.4213	0.2370	0.1259	-2.6395	0.1757	19.0920	3.6534
Génération 5	0.0893	-0.5281	-0.4216	0.2553	0.1262	-2.7799	0.1589	19.4810	3.7206
Génération 6	0.0902	-0.5263	-0.4216	0.2546	0.1262	-2.7791	0.1588	19.5767	3.7328
Génération 7	0.1056	-0.5128	-0.4214	0.2414	0.1260	-2.6922	0.1732	19.2280	3.6778
Génération 8	0.0875	-0.5293	-0.4217	0.2579	0.1263	-2.7935	0.1564	19.6211	3.7407
Génération 9	0.0978	-0.5189	-0.4215	0.2481	0.1261	-2.7321	0.1649	19.4509	3.7040
Génération 10	0.1288	-0.4983	-0.4211	0.2255	0.1257	-2.5286	0.1859	18.5828	3.5959

TABLE 4.1 – Paramètres des n générations représentés sur la figure 4.8

En conclusion, il existe des différences d'une implémentation à l'autre. Cependant, ces modifications donnent des densités de probabilité mélangées très semblables. Cet effet semble à première vue négligeable pour le calcul des statistiques unilatérales. Une attention sera tout de même portée à la corrélation, car une modification de la distribution entre les 2 densités de probabilité pourrait avoir un impact.

Il a été nécessaire de développer une mesure de la qualité de représentation. Celle-ci sera nécessaire pour la section 1.5. Différentes possibilités existent afin de mesurer de l'erreur :

- **Logarithme de vraisemblance de la fonction de maximisation**

Il n'est pas possible d'utiliser le maximum de vraisemblance du code Exp-Max, car ce dernier doit être utilisé avec des paramètres identiques pour l'expectation, ce qui n'est pas le cas d'une génération à l'autre.

- **Approche des moindres carrés avec une échelle linéaire**

Cette approche est applicable à nos résultats. Le seul désavantage est que le poids donné aux faibles probabilités en queue de distribution de la densité de probabilité sera négligeable. Une approche logarithmique sera donc plus avantageuse pour considérer les queues de distribution.

- **Approche des moindres carrés avec une échelle logarithmique**

Cette approche est la plus proche de l'algorithme Exp-Max. Cependant, il existe certaines discrétisations qui ont une probabilité nulle. Et le logarithme de 0 vaut l'infini négatif.

Il a donc été nécessaire d'imposer la probabilité minimum pour l'ensemble des discrétisations nulles. De cette manière, il a été possible de mesurer l'erreur avec une fonction moindre carré avec une échelle logarithmique.

Cette modification peut avoir un impact important sur la résolution. Dans le code EM, les points avec une probabilité nulle ne sont pas considérés.

1.5 Longueur du signal et effet sur les résultats

Lors des simulations réalisées avec les données de soufflerie, l'ensemble des données ont été utilisées. Un échantillon de mesure de cette taille est exceptionnel et n'est pas accessible pour la majorité des tests réalisés en soufflerie. Une question importante, qui doit être posée, est donc : est-il possible d'obtenir les mêmes résultats pour les marginales avec un échantillon de mesures plus faible ?

Dans la section 1.4, il a été possible d'observer que l'algorithme développé ne converge pas de manière univoque vers une même solution quand on utilise l'ensemble des données de soufflerie. Il sera donc intéressant d'observer l'erreur moyenne mesurée ainsi que l'écart-type qui illustrera si la dispersion est importante ou pas.

Pour mesurer l'erreur, le choix s'est porté sur la méthode des moindres carrés pour le logarithme de la densité de probabilité. Comme décrit ci-dessus, il a été nécessaire de modifier légèrement la densité de probabilité afin d'éviter une probabilité nulle, ce qui engendrait une erreur infinie. La différence au carré a été réalisée entre la solution donnée par l'algorithme et la densité de probabilité obtenue avec les 37 vecteurs de mesure. Si l'algorithme reçoit un vecteur plus court, cela ne modifiera pas la densité de probabilité de 37 vecteurs pour l'évaluation de l'erreur. Ce choix a été réalisé de manière à comparer des choses identiques.

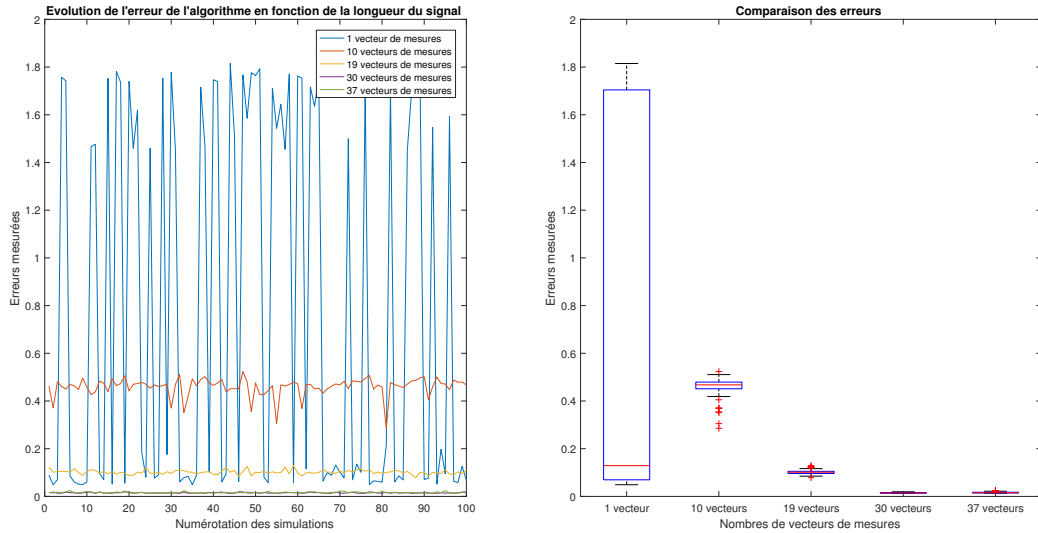


FIGURE 4.9 – Évolution de l'erreur en fonction de la longueur du signal

On observe sur la figure 4.9 que la variance de l'erreur augmente fortement lorsqu'on réduit le nombre de mesures utilisées par l'algorithme. La moyenne des erreurs semble aussi être réduite lorsqu'on augmente le nombre de vecteurs de mesures. Une exception existe quand on prend uniquement un vecteur de mesures.

La longueur du signal va donc influencer la stabilité obtenue par l'algorithme développé. Plus le nombre de mesures est important, plus le signal sera stable d'une simulation à l'autre. Il est difficile de déterminer un critère fixe pour ce type de mesure car la variance dépend directement de la non gaussianité du signal. Plus un signal sera non gaussien, plus le nombre nécessaire de mesures sera important.

La longueur du signal influence peu le temps de calcul de l'algorithme de résolution. La longueur du signal influera surtout sur le coût du test réalisé en soufflerie. Il sera donc nécessaire de déterminer l'optimum en fonction de la précision des résultats et du coût du test.

1.6 Limitations de l'algorithme (résultats obtenus avec génération de signaux aléatoires pour des moments imposés)

1.6.1 Réduction et illustration des paramètres variables

Afin de réaliser une validation de l'algorithme de manière plus générale, des signaux aléatoires ayant une densité de probabilité mélangée ont été générés. Pour réduire le nombre de simulations, une réduction a été réalisée dans le but de passer de 9 à 7 paramètres variables.

— Contrôle du coefficient de pondération

Un premier paramètre variable est le facteur de pondération des deux signaux composant le mélange (π). Comme vu dans le chapitre 2, le paramètre de distribution π varie entre 0 et 1.

— Contrôle des écarts-types

Un deuxième paramètre (n) sera le facteur qui illustre le ratio entre les écarts-types des deux signaux unimodaux :

$$\sigma_1 = n \times \sigma_2 \quad (4.1)$$

— Contrôle des moyennes

Un troisième paramètre est le facteur (*ech*), qui illustre l'espacement entre les deux composantes de la densité de probabilité mélangée. Ce facteur dépend des 2 premiers moments statistiques des densités de probabilité du mélange : la moyenne et la variance.

Lorsqu'on a 2 densités de probabilité normales, on obtient une construction de la densité de probabilité mélangée, comme sur la figure 4.10.

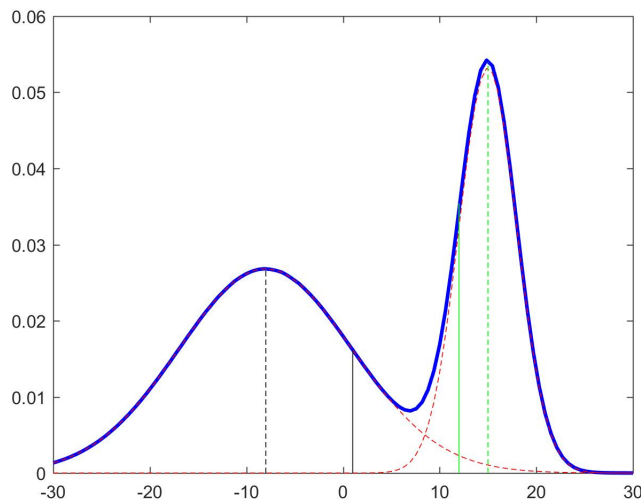


FIGURE 4.10 – Densité de probabilité mélangée composée de 2 densités de probabilité normales

Le facteur (*ech*) sera conservé si le rapport de distance entre les deux lignes pleines (représentant la moyenne) et entre les deux lignes en pointillé (représentant deux points distants de l'écart-type de leur moyenne propre) est conservé. L'équation 4.2 reprend cette relation :

$$ech = \frac{\mu_1 + \sigma_1 - \mu_2 + \sigma_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (4.2)$$

En utilisant le deuxième paramètre, on a $\sigma_1 = n \times \sigma_2$ et on trouve :

$$ech = \frac{\sigma_2(1 + n)}{\mu_1 - \mu_2} - 1 \quad (4.3)$$

Lorsqu'on ne modifie pas le skewness et le kurtosis et qu'on choisit les paramètres n , ech et π constants, on peut modifier les paramètres $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ sans modifier l'aspect de la densité de probabilité. La figure 4.11 en est la preuve :

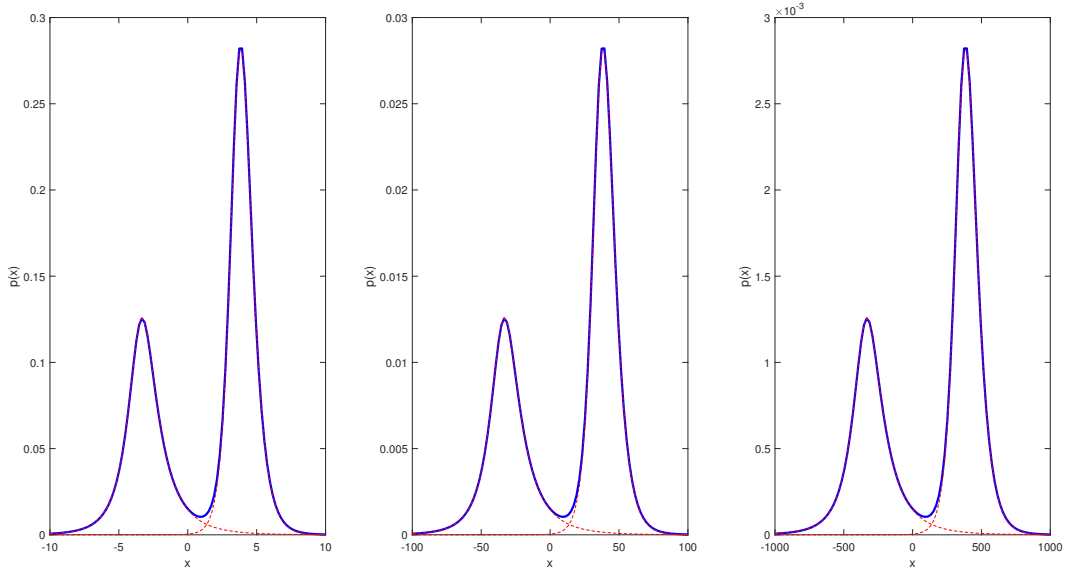


FIGURE 4.11 – Signal 1 : $\mu_1 = -3, \mu_2 = 4, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1$ / Signal 2 : $\mu_1 = -30, \mu_2 = 40, \sigma_1 = 20, \sigma_2 = 10$ / Signal 3 : $\mu_1 = -300, \mu_2 = 400, \sigma_1 = 200, \sigma_2 = 100$

— Contrôle des troisième et quatrième moments statistiques

Il n'existe pas de relation permettant de réduire le nombre de paramètres variables pour les moments d'ordre 3 et 4. Dès lors, un nombre fini de réalisations possibles a été choisi. Il est nécessaire que ces réalisations respectent la monotonie de la fonction de transformation. La figure 4.12 reprend les différentes réalisations choisies et montre bien qu'elles respectent le critère de monotonie.

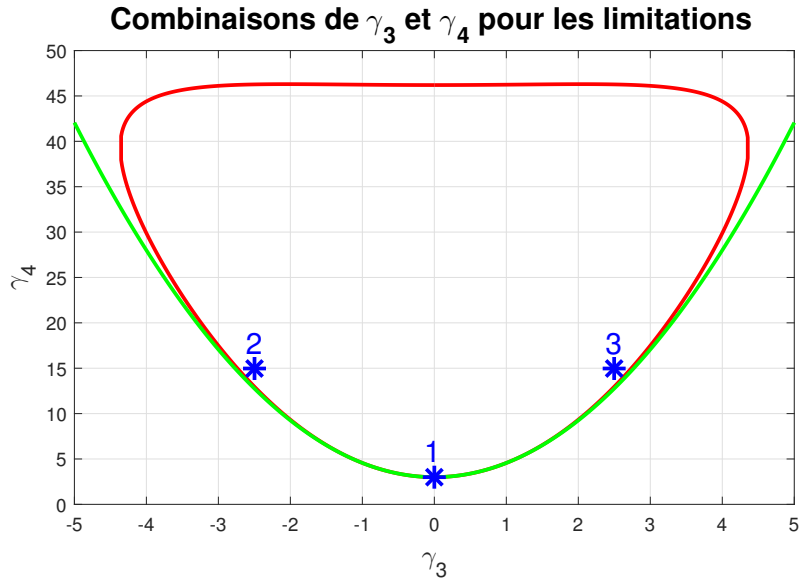


FIGURE 4.12 – Réalisation respectant la monotonie (γ_3, γ_4)

— Paramètres choisis pour vérifier les limitations

Les paramètres $\pi, n, ech, \gamma_{3,1}, \gamma_{4,1}, \gamma_{3,2}, \gamma_{4,2}$ sont suffisants pour présenter l'entière des réalisations possibles. Avant de les poser, il a été nécessaire de déterminer μ_1 et σ_1 qui n'ont pas d'impact sur les paramètres variables. Ils sont la localisation de la PDF et l'échelle

qui sera utilisée. Le choix opéré pour les deux paramètres a été :

$$\mu_1 = 1 \quad \sigma_1 = 1 \quad (4.4)$$

Avec les équations de la section 1.6.1, il est possible de retrouver les autres moments statistiques avec les 7 paramètres. Pour le skewness et le kurtosis, l'option a été de prendre des combinaisons de manière à toujours respecter le critère de Winterstein, tout en ayant des skewness importants.

Les paramètres qui ont été choisis pour les vérifications sont donnés dans le tableau 4.2.

Paramètres	Valeur 1	Valeur 2	Valeur 3	Valeur 4
π	0.2	0.4	0.6	0.8
n	0.3	1	3	/
ech	0.1	0.5	1	/
$\gamma_{3,1}; \gamma_{4,1}$	0 ; 3.01	-2.5 ; 15	2.5 ; 15	/
$\gamma_{3,2}; \gamma_{4,2}$	0 ; 3.01	-2.5 ; 15	2.5 ; 15	/

TABLE 4.2 – Paramètres utilisés pour générer les différentes réalisations

Il est possible de retrouver les paramètres μ_2, σ_2 en connaissant les paramètres n et ech .

1.6.2 Limitations identifiées

— La solution du dé-mixage n'est pas toujours unique

Après un certain nombre de vérifications, il a été rapidement mis en avant que l'algorithme créé dans certains cas ne pouvait pas converger en une décomposition unique pour un signal avec une densité de probabilité mélangée. Il existe donc une multitude de combinaisons de 2 densités de probabilité vers lesquelles l'algorithme peut converger. L'ensemble de ces solutions donne des représentations très fiables du signal mélangé généré par le signal. La figure 4.13 met en avant cette problématique.

Une étude avancée, qui n'a pas été réalisée dans le cadre de ce travail, pourrait être utile afin d'évaluer la qualité de la représentation et la probabilité que les deux modes obtenus soient ceux qui sont générés. Cette modification des deux densités de probabilité de mélange peut fortement impacter les statistiques croisées.

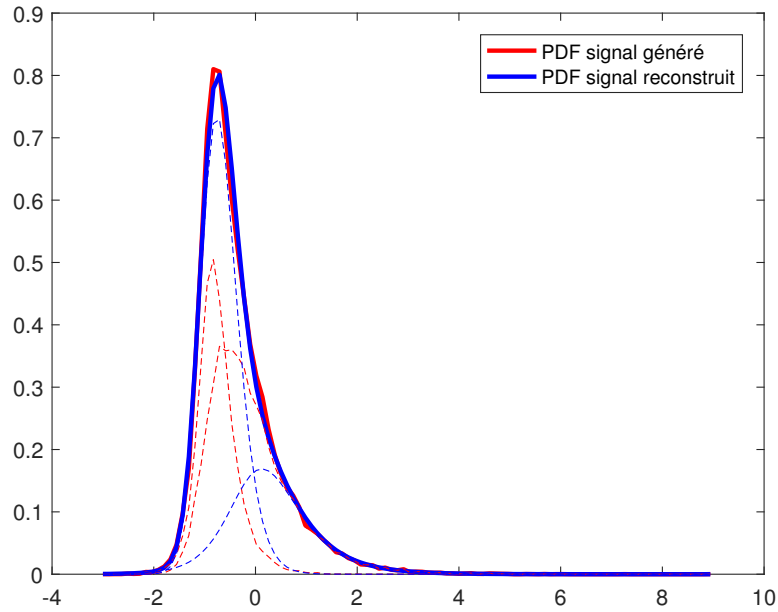


FIGURE 4.13 – Décompositions de la densité de probabilité mélangée

— Problématique d’une solution unimodale pour un signal mélangé bimodal

La densité de probabilité recomposée par l’algorithme approchant le moins bien la densité de probabilité mélangée du signal initial est celle correspondant au signal avec les paramètres :

- | | |
|--------------------|-------------------------|
| — $\pi = 0.6$ | — $\gamma_{3,1} = 2.5$ |
| — $\mu_1 = 1$ | — $\gamma_{4,1} = 15$ |
| — $\mu_2 = 1.6$ | — $\gamma_{3,2} = -2.5$ |
| — $\sigma_1 = 1$ | — $\gamma_{4,2} = 15$ |
| — $\sigma_2 = 0.3$ | |

Si on fait varier le skewness et le kurtosis en conservant les autres paramètres, on trouve les densités de probabilité de la figure 4.14. On y constate que le problème apparaît si on a les deux composantes de la densité de probabilité mélangée avec un skewness important et de signes opposés. Le problème est celui d’un minimum local dans la fonction d’erreur. Afin d’éviter ce souci, on avait envisagé d’utiliser l’information des pics. Cependant, le problème persiste pour deux pics très proches l’un de l’autre.

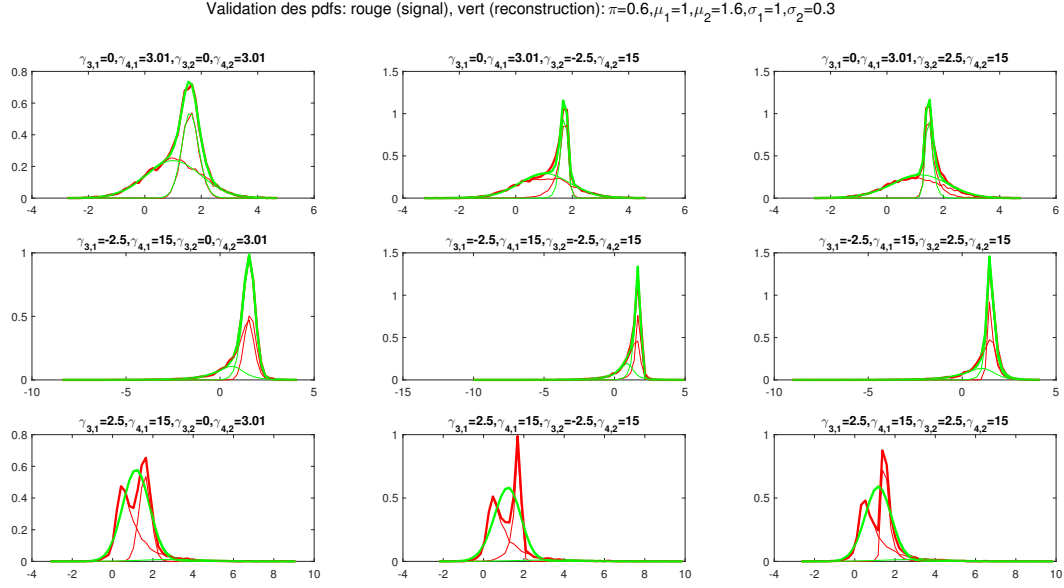


FIGURE 4.14 – Modification des moments statistiques pour le cas le plus critique (la solution approchée par l’algorithme est en vert et la densité de probabilité générée avec les moments donnés)

2 Résultats pour l’algorithme traitant les statistiques corrélées

2.1 Résultats des signaux étudiés

Il existe un grand nombre de relations qui relient les différents capteurs entre eux. En additionnant toutes les relations, on trouve un ensemble de relations valant $C_{121}^2 = \frac{121!}{119!2!} = 121 \times 60 = 7260$. Le nombre est important. Il ne sera donc pas possible de représenter l’ensemble dans ce rapport. Il a été décidé de se concentrer sur la relation entre les capteurs 35 et 36 dans le cadre de l’étude des résultats de l’algorithme.

Ces capteurs de pression sont localisés sur la figure 4.15 par deux carrés noirs. La densité de probabilité conjointe obtenue par l’algorithme, les mesures en soufflerie et l’erreur sont reprises à la figure 4.16. Il est possible d’observer les 4 modes composant le mélange de dimension 2 sur la figure 4.17.

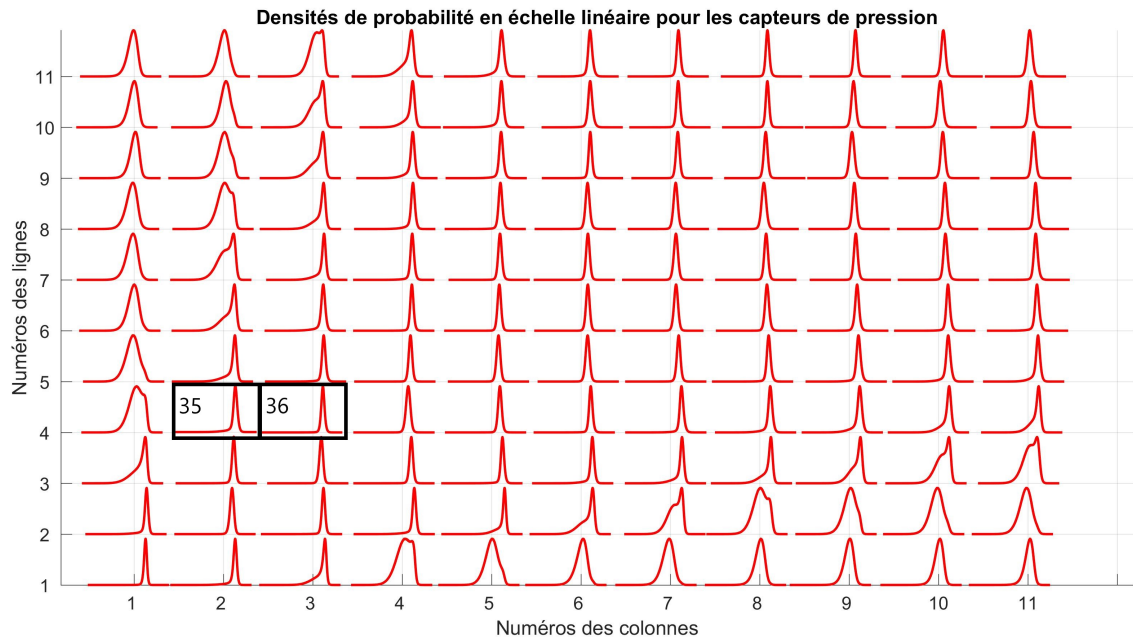


FIGURE 4.15 – Localisation des capteurs 35 et 36

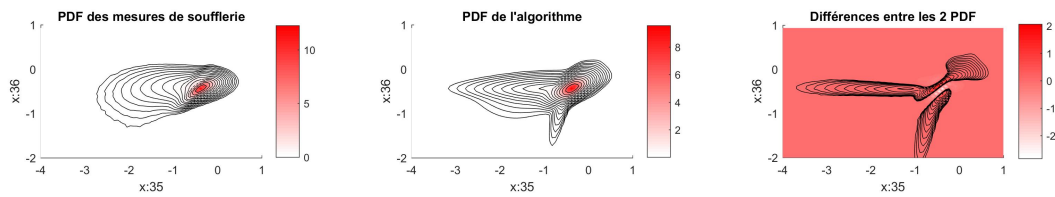


FIGURE 4.16 – Comparaison entre l'algorithme et les mesures de soufflerie

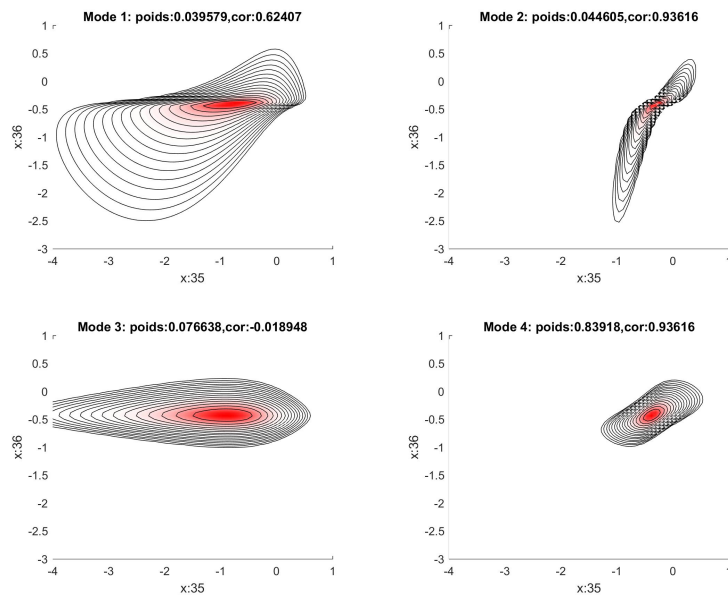


FIGURE 4.17 – 4 modes composant la densité de probabilité de l'algorithme

Le cas présenté ici est loin d'être le meilleur de ceux qui ont été observés. Il reflète bien le fait qu'on utilise un modèle qui approche le problème et qu'on n'a pas une solution exacte. L'échelle utilisée pour représenter les isosurfaces (ici, se sont des lignes pour une figure 2D) est une échelle logarithmique. Il est possible de cette manière de représenter le comportement en queue de distribution. Pour le dégradé des couleurs, celui-ci est donné en échelle linéaire et est très rouge uniquement si les probabilités sont importantes.

2.2 Convergence des résultats avec l'algorithme Exp-Max

Pour évaluer les statistiques corrélées, le choix s'est porté sur un algorithme de résolution de type Exp-Max (voir la section 3, du chapitre 3). Ce type d'algorithme est itératif et est composé d'une fonction de maximisation qui a comme paramètre variable les paramètres corrélés : les 4 corrélations et le facteur de pondération.

Dans cette section, on va étudier la convergence de l'algorithme Exp-Max pour chaque itération. Cette étude a été simplifiée. Afin d'être complet, il aurait fallu étudier chaque itération pour chaque étude de covariance entre les différents capteurs (7260 corrélations). L'étude de convergence sera réalisée uniquement sur la dernière itération pour les signaux 35 et 36.

Pour étudier la convergence, deux approches ont été utilisées (comme dans la section 1.3) : une première basée sur des coupes selon les différents paramètres variables et une deuxième dans l'espace.

— Modifications pour 1 des 5 paramètres

Sur la figure 4.18, on peut observer 5 sous-figures. Elles ont comme abscisse la variation du paramètre étudié dans la coupe et en ordonnée, le logarithme de vraisemblance normalisé obtenu par la fonction de maximisation. La normalisation a été réalisée avec le logarithme de vraisemblance donné avec les paramètres retenus à la fin de l'algorithme pour les points de pression 35 et 36.

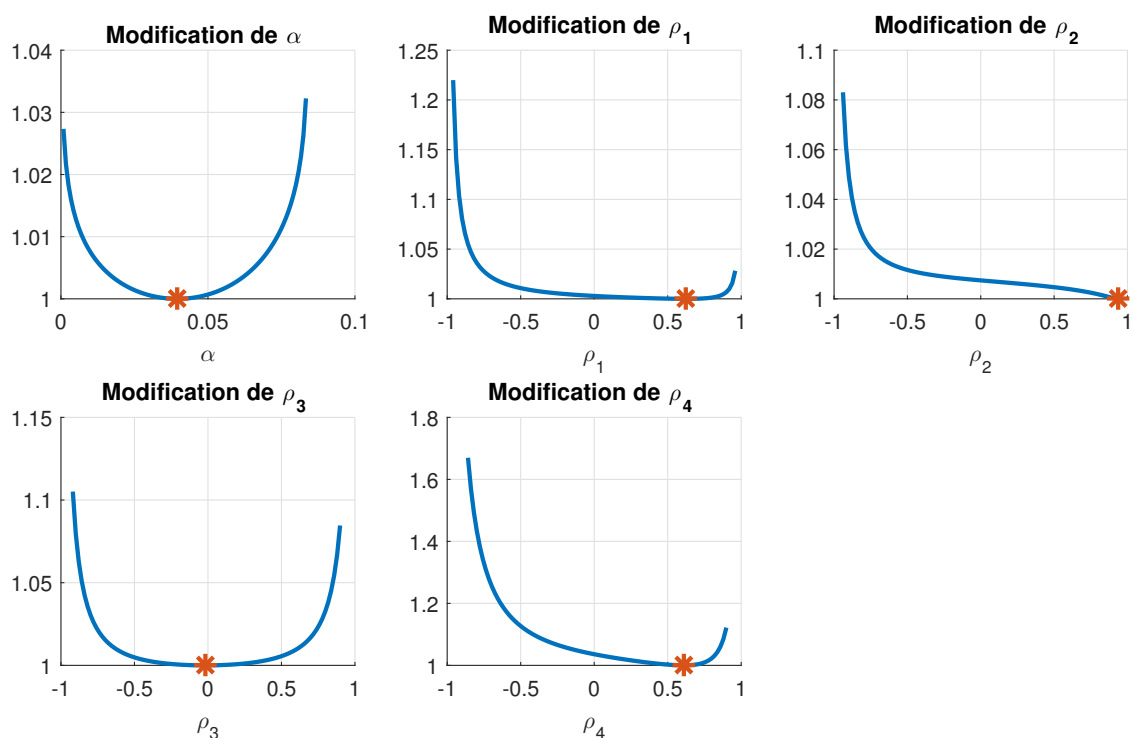


FIGURE 4.18 – Convergence de l'algorithme Exp-Max pour 5 coupes

Pour chacune des 5 coupes, on observe que la résolution de l'algorithme Exp-Max a bien convergé vers un puits de convergence. Quant au paramètre de pondération $\pi(x1, y1) = \alpha_1$, relatif au mode 1, on remarque qu'il a été modifié entre les bornes obtenues par les paramètres de pondération des statistiques unilatérales des signaux 35 et 36. Pour finir, on observe que la modification des paramètres n'a pas la même influence sur le logarithme de vraisemblance.

— Modifications pour les 5 paramètres aléatoirement

La modification de paramètres de manière unique est une solution très restrictive. En modifiant les 5 paramètres de manière aléatoire, il est possible d'étudier la convergence dans l'ensemble de l'espace à 5 dimensions. Il est complexe d'afficher les résultats obtenus. La solution utilisée pour pallier ce problème est de ne plus afficher les paramètres en abscisse, mais la différence centrée au carré entre la solution de l'algorithme et la densité de probabilité générée aléatoirement.

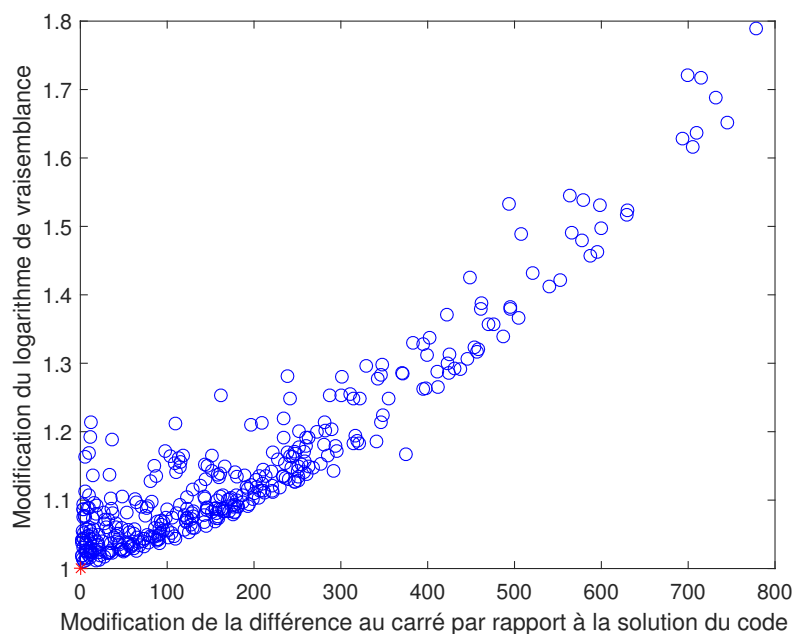


FIGURE 4.19 – Convergence de l'algorithme Exp-Max dans l'espace à 5 dimensions

Il est possible de voir que la solution donnée par le code est celle qui a le meilleur maximum de vraisemblance. On remarque que plus la solution s'écarte de la densité de probabilité du code avec une différence centrée au carré, plus le maximum de vraisemblance est mauvais. Enfin, on note, près de l'origine, de grandes modifications du logarithme de vraisemblance. Cela peut être expliqué par la différence de critère pour mesurer l'erreur. Une modification en queue de distribution n'aura pas le même impact pour les deux critères.

2.3 Convergence de l'algorithme Exp-Max vers la solution optimale

Dans la section 1.3, il avait pu être observé que le code Exp-Max donnait une solution optimale avec le critère de différence centrée au carré. Cette observation prouvait que la convergence du code était bonne et indépendante de la fonction d'erreur.

Dans cette section, cette observation n'a pas pu être réalisée. Il existe des différences apparentes

entre la solution de l'algorithme Exp-Max et la reconstruction réalisée avec les deux signaux. Les résultats qu'on obtient si on résout le problème avec un algorithme Exp-Max ou un algorithme de moindre carré ne seront pas identiques. Cette différence vient du fait qu'il n'est pas possible de reconstituer parfaitement la densité de probabilité conjointe des capteurs 35 et 36. La figure 4.20 représente cet effet pour une échelle linéaire. La figure 4.21 représente aussi cet effet, sauf que cette fois, c'est la différence au carré pour une échelle logarithmique des résultats. La figure 4.20 a en abscisse la modification du paramètre de la coupe et en ordonnée, la différence au carrée obtenue entre la PDF générée et la PDF obtenue avec les signaux de la soufflerie.

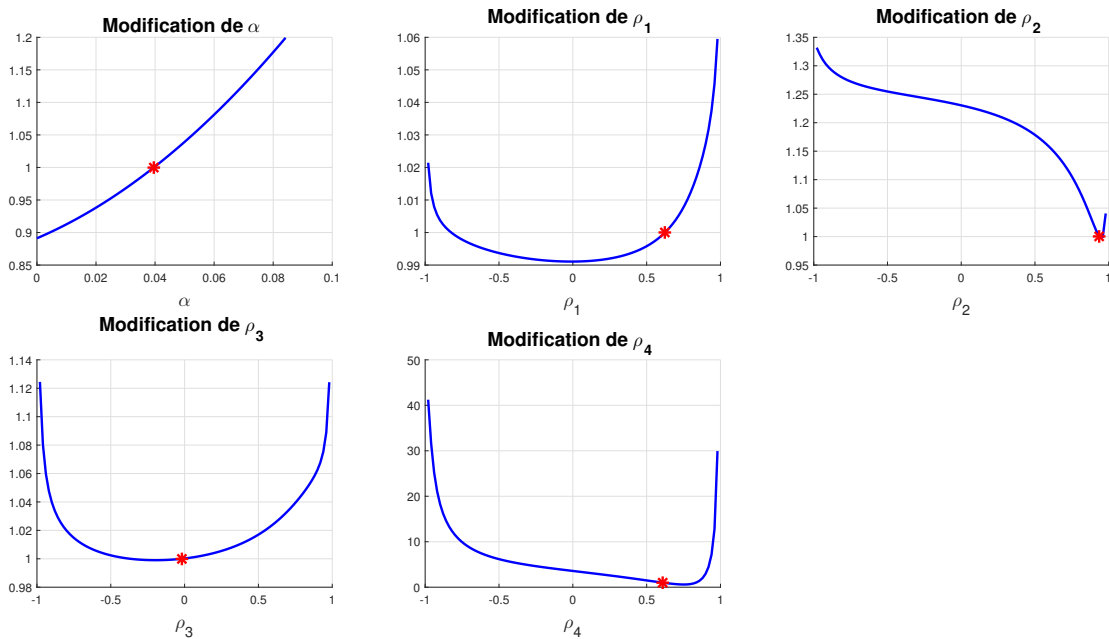


FIGURE 4.20 – Différence d'optimum pour la différence au carré avec une échelle linéaire

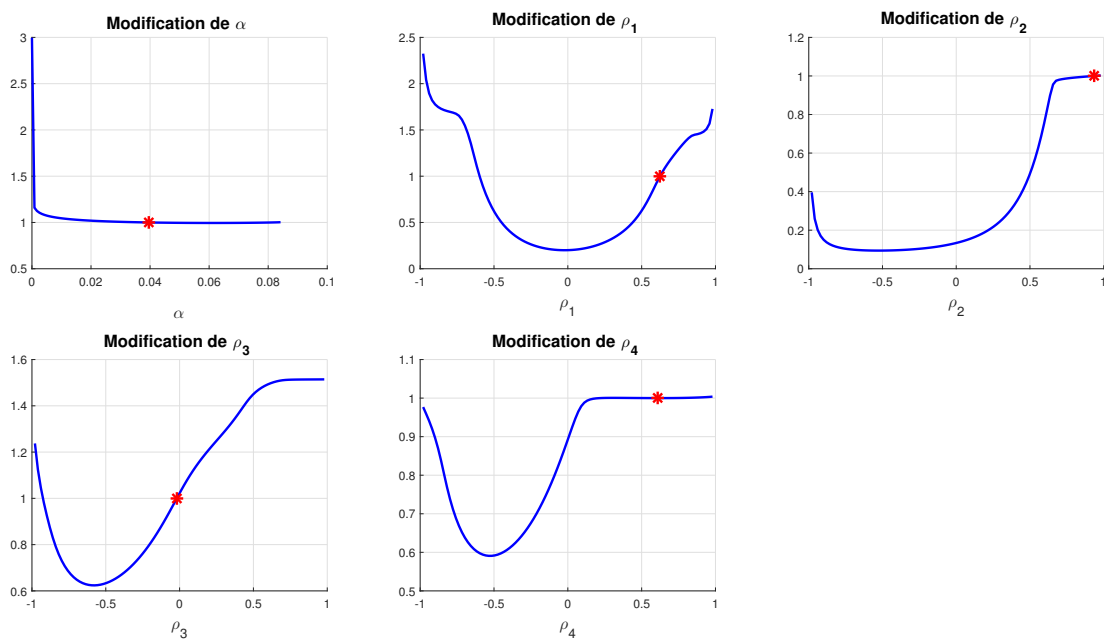


FIGURE 4.21 – Différence d'optimum pour la différence au carré avec une échelle logarithmique

On peut voir sur les figures 4.20 et 4.21 l'aspect contradictoire des différentes fonctions d'erreurs à minimiser. Une seule modification converge pour les deux fonctions d'erreur. Il s'agit de celle pour la modification de la corrélation du mode 1. Il n'est cependant pas possible d'affirmer si cette modification représente un autre puits de convergence. Ce qui peut être cependant affirmé avec la section 2.4, c'est que le code ne converge jamais vers ces paramètres-là.

2.4 Convergence des paramètres pour n générations

Dans cette partie, le code de calcul pour déterminer les paramètres corrélés va être généré n fois. Le but sera d'observer les paramètres corrélés et le facteur de pondération, et de voir si ceux-ci sont modifiés d'une génération à l'autre.

Pour les statistiques unilatérales, de faibles différences ont pu être observées d'une génération à l'autre (voir section 1.4). Pour les statistiques corrélées, aucune modification n'apparaît d'une itération à l'autre. Cela peut être expliqué par le fait que les paramètres d'initialisation sont fixes pour l'ensemble des générations, ce qui n'était pas le cas pour les statistiques unilatérales. Les paramètres obtenus pour la corrélation reliant le capteur 36 au capteur 35 sont :

	α	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
Génération :1 \rightarrow 10	0.0396	0.6241	0.9362	-0.0189	0.6096

TABLE 4.3 – Paramètres des n générations

2.5 Longueur du signal et impact sur la résolution

Il est aussi intéressant d'observer si la longueur du signal impacte la solution du code pour les statistiques corrélées. Dans cette partie, on a choisi de conserver les statistiques unilatérales équivalentes pour l'ensemble des simulations où on réduit la taille des vecteurs de mesures.

Il a été observé qu'en réduisant le nombre de vecteurs pour l'algorithme, cela n'impactait pas la variance des solutions d'une simulation à l'autre. Si on génère n fois l'algorithme avec un nombre réduit de signaux identiques, on convergera toujours vers la même solution.

On va observer l'évolution de chacun des paramètres en fonction de la taille du signal. Il n'est pas possible de mesurer la différence à l'aide d'une fonction d'erreur. Ceci est lié aux observations faites sur les fonctions d'erreur dans la section 2.3.

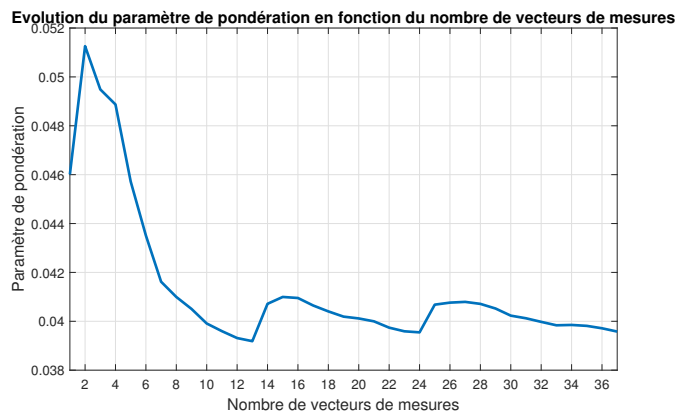


FIGURE 4.22 – Évolution du facteur de pondération en fonction de la longueur du signal

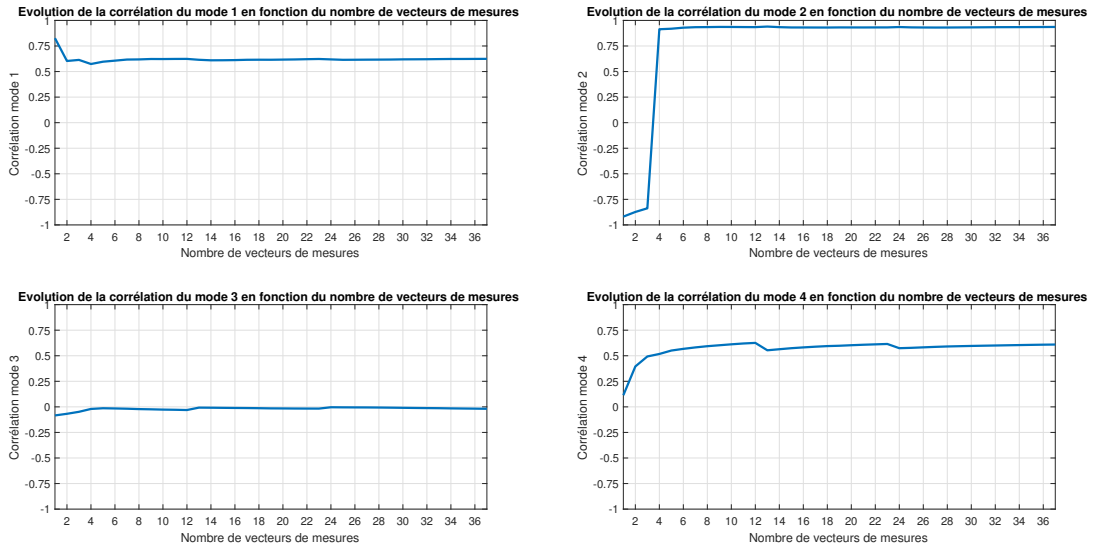


FIGURE 4.23 – Évolution des corrélations en fonction de la longueur du signal

Il est possible d'observer des modifications importantes des statistiques corrélées lorsqu'on a moins de 10 vecteurs de mesures. Après ce nombre de vecteurs, des modifications apparaissent toujours, mais elles sont moins importantes.

2.6 Limitation identifiée

On a observé que l'algorithme a des difficultés pour faire correspondre la densité de probabilité conjointe avec celle mesurée avec les données de soufflerie lorsque les deux signaux utilisés pour la corrélation sont identiques. La figure 4.24 illustre cette problématique pour la densité de probabilité conjointe du capteur 1, pris 2 fois.

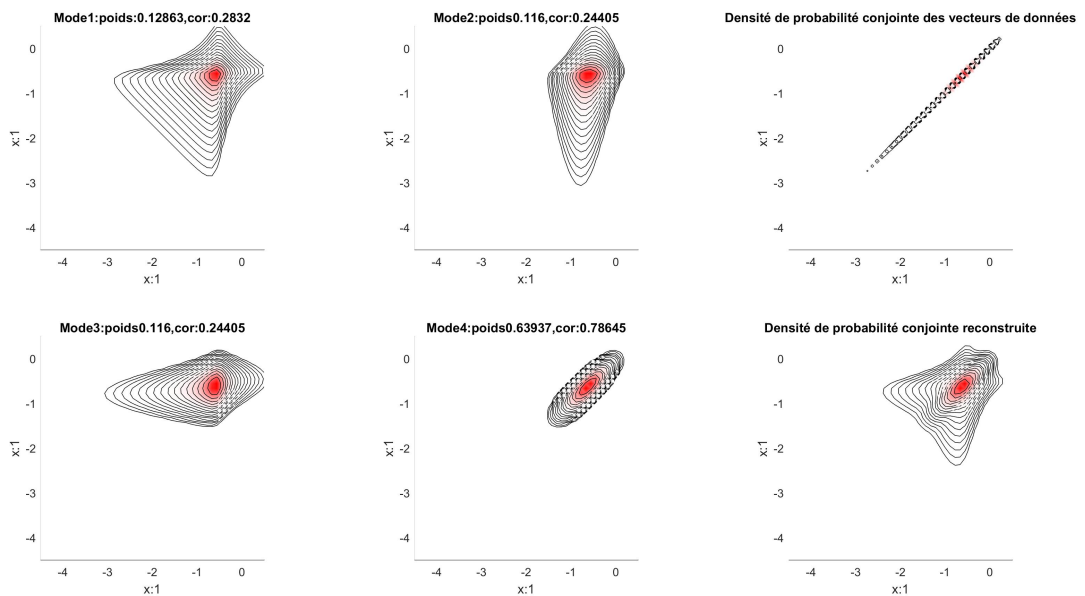


FIGURE 4.24 – Densité de probabilité conjointe entre les capteurs 1

Une partie du problème vient du fait de la concentration de la solution sur une seule et même ligne. Les résultats en soufflerie se reportent directement sur un plan 2D car les 2 mesures en un moment identique sont équivalentes. Le problème avec l'algorithme développé vient de l'espérance. L'espérance est calculée en chacune des combinaisons de mesures de soufflerie. Or, les mesures se situent uniquement sur la diagonale au vu du choix des capteurs. Le logarithme de vraisemblance sera donc uniquement vérifié sur cette droite et nulle part ailleurs dans le domaine de la densité de probabilité conjointe. Les erreurs de dispersion observées visuellement sur la figure 4.24 ne seront donc pas prises en compte par l'algorithme.

Le choix des paramètres initiaux va directement influencer les résultats qui vont être obtenus par l'algorithme.

Le problème identifié ici va cependant pouvoir être contourné. Il est possible de déterminer analytiquement les statistiques croisées sans l'utilisation de l'algorithme. Les paramètres qui pourront être pris pour les différents modes sont :

- **Mode 1** : $\rho_1 = 1, \alpha_1 = \pi$
- **Mode 2** : $\rho_2 = /, \alpha_2 = 0$
- **Mode 3** : $\rho_3 = /, \alpha_3 = 0$
- **Mode 4** : $\rho_4 = 1, \alpha_4 = (1 - \pi)$

3 Résultats obtenus pour les densités de probabilité de 3 capteurs

Comme précisé pour les résultats des statistiques corrélées, il existe un nombre important de combinaisons entre les différents capteurs. Ce nombre de relations est donné par la relation : $C_{121}^3 = \frac{121!}{118!3!} = 121 \times 119 \times 20 = 287980$. Le temps de simulation pour générer toutes ces relations serait démesuré. De plus, le nombre de figures correspondant au problème ne permettrait pas d'avoir un rapport lisible.

Comme il a pu être détaillé dans les chapitres précédents (section 4 du chapitre 3), aucun nouveau moment statistique n'est attribué à la tri-corrélation. La seule information qu'il a fallu déterminer est un coefficient de pondération permettant de contrôler les 7 autres coefficients qui en dépendent.

Il est nécessaire de respecter les conditions illustrées dans le système d'équations 3.28. Cette condition permet de construire la densité de probabilité sans valeur imaginaire. Lors d'essais de combinaisons, certaines ont pu être identifiées comme impossibles. Il ne sera donc pas possible d'utiliser cette approche pour l'ensemble de l'espace. Cette information va fortement limiter la reconstruction des résultantes de pression pour un ensemble de capteurs. Il ne sera pas possible d'utiliser l'ensemble de la matrice de covariance pour générer 3 signaux aléatoirement : une perte d'informations aura lieu. Cet aspect sera étudié plus en détail dans le chapitre 6 de reconstruction des pressions.

Afin de montrer les possibilités de l'algorithme, l'analyse de rang 3 a été réalisée entre le capteur 34, 36 et 38. Elle n'était pas possible pour les capteurs 35, 36, 37. Les résultats obtenus sont repris sur la figure 4.25. Cette figure montre des isoparamétriques avec différentes probabilités d'occurrence. Il est possible de voir que la reconstruction approche de manière fiable les résultats. De petites différences sont tout de même visibles. Elles sont prévisibles, comme cela avait été le cas pour les densités de probabilité pour 2 capteurs.

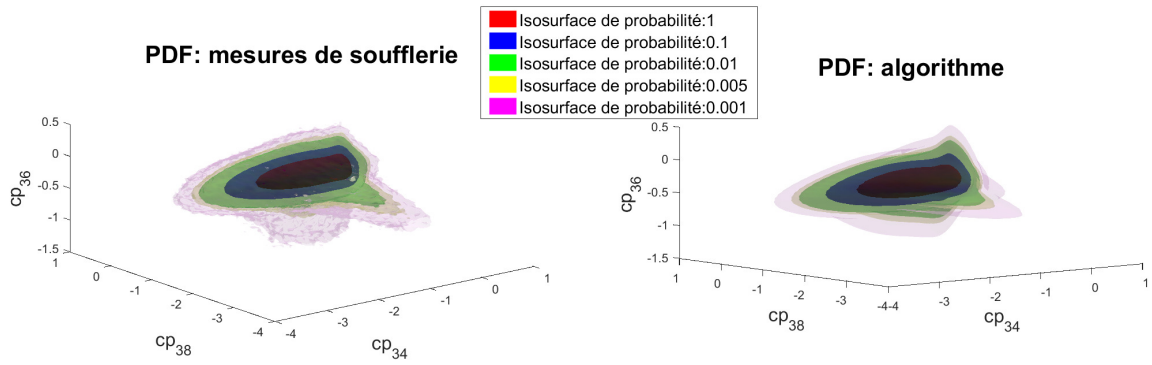


FIGURE 4.25 – Reconstruction d’une PDF pour les capteurs 34, 36 et 38

4 Résultats obtenus pour les densités de probabilité de rang supérieur à 3

Il est possible d’utiliser la même méthodologie pour les rangs supérieurs à 3. L’information qui devra être déterminée est la valeur du coefficient de pondération du rang étudié. Il faut cependant que la matrice de corrélation reste définie positive.

Il est nécessaire aussi de se demander quelle serait l’utilité du calcul d’un tel coefficient.

Chapitre 5

Présentation générale des résultats obtenus avec les mesures en soufflerie

1 Densités de probabilité obtenues pour les 121 capteurs, étude statistique unilatérale

En appliquant l'algorithme aux 121 capteurs de pression, il a été possible d'observer les décompositions des figures 5.1 et 5.2. Les résultats ont été présentés selon l'échelle linéaire et logarithmique.

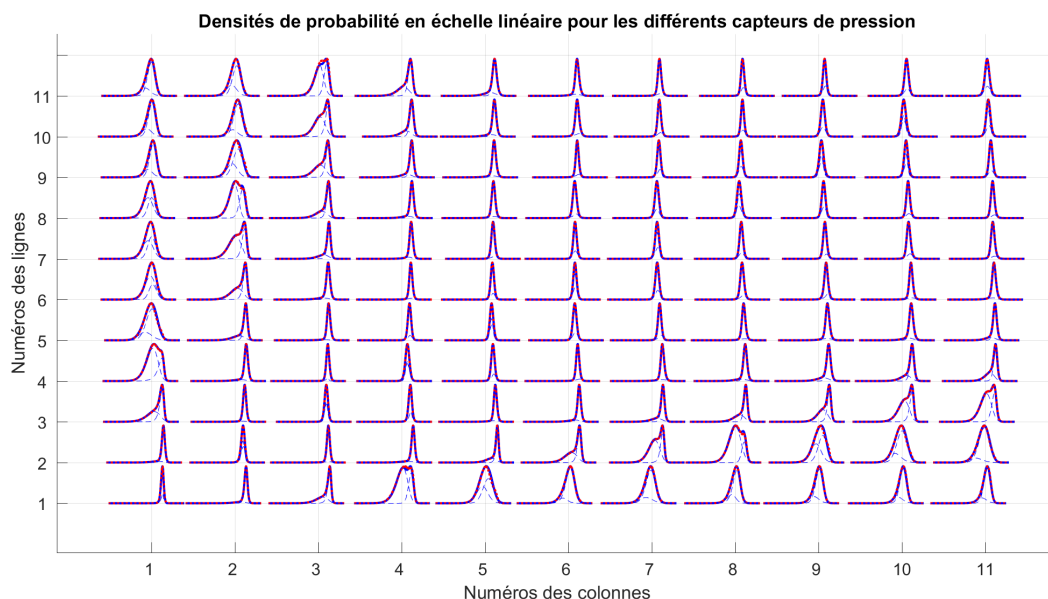


FIGURE 5.1 – Reconstruction des signaux selon l'échelle linéaire (courbes rouges : PDF des mesures de soufflerie, courbes épaisses bleues : PDF reconstruites par l'algorithme, courbes en trait bleu : 2 composantes du mélange)

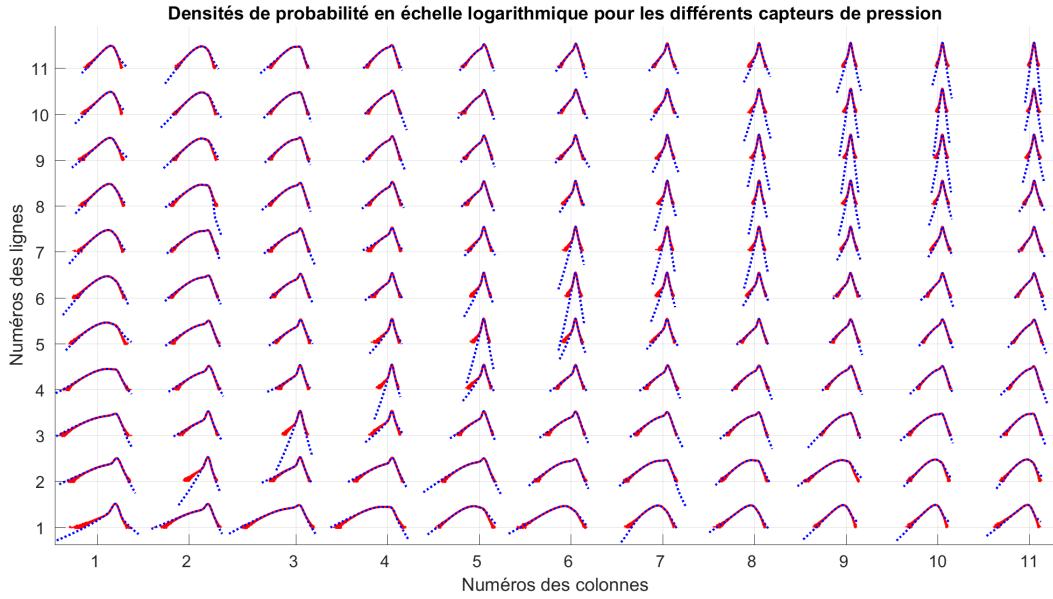


FIGURE 5.2 – Reconstruction des signaux selon l'échelle logarithmique (courbes rouges : PDF des mesures de soufflerie, courbes bleues : PDF reconstruites par l'algorithme)

Après une analyse rapide des résultats montrés dans les figures 5.1 et 5.2, il est possible de voir que l'algorithme permet de bien approcher les données de la soufflerie. Selon l'échelle linéaire, figure 5.1, on constate de faibles différences entre les densités de probabilité en rouge et celles en bleu pour les capteurs (ligne/colonne) : $(1/4)$, $(2/8)$, $(8/2)$, $(11/3)$.

Pour l'analyse logarithmique, il est possible d'observer des différences plus importantes, entre la courbe rouge et la courbe bleue, que pour l'échelle linéaire. Elles se situent surtout en queue de distribution. Cette dissemblance pouvait être attendue au vu du comportement de l'échelle logarithmique. Si la probabilité qu'un événement se produise est peu élevée, alors, la valeur du logarithme en base 10 sera excessivement faible (le logarithme tend vers moins l'infini lorsque la probabilité tend vers 0). Une différence ténue entre la courbe bleue et la courbe rouge en queue de distribution aura donc une grande influence selon l'échelle logarithmique.

Afin d'approcher les densités de probabilité des 121 capteurs de pression, l'algorithme a dû déterminer 9 paramètres pour chacun des capteurs de pression. Ce sont :

- Le facteur de pondération : π
- Les 4 moments statistiques du premier signal : $\mu_1, \sigma_1, \gamma_{3,1}, \gamma_{4,1}$
- Les 4 moments statistiques du deuxième signal : $\mu_2, \sigma_2, \gamma_{3,2}, \gamma_{4,2}$

Il est intéressant d'observer la distribution de ces 9 paramètres pour les 121 capteurs de pression, voir figure 5.3. Les distributions observées rappellent fortement les résultats obtenus pour les différents moments statistiques obtenus avec les 121 capteurs de pression (voir figure 1.8). Il est possible de voir que les résultats de la composante 1 ressemblent fortement aux distributions des moments statistiques des densités de probabilité non dé-mixées. Pour la composante 2, on constate que les moments statistiques sont plus faibles que pour la composante 1. Les modifications des moments statistiques d'un capteur à l'autre sont plus faibles pour la deuxième composante du mélange.

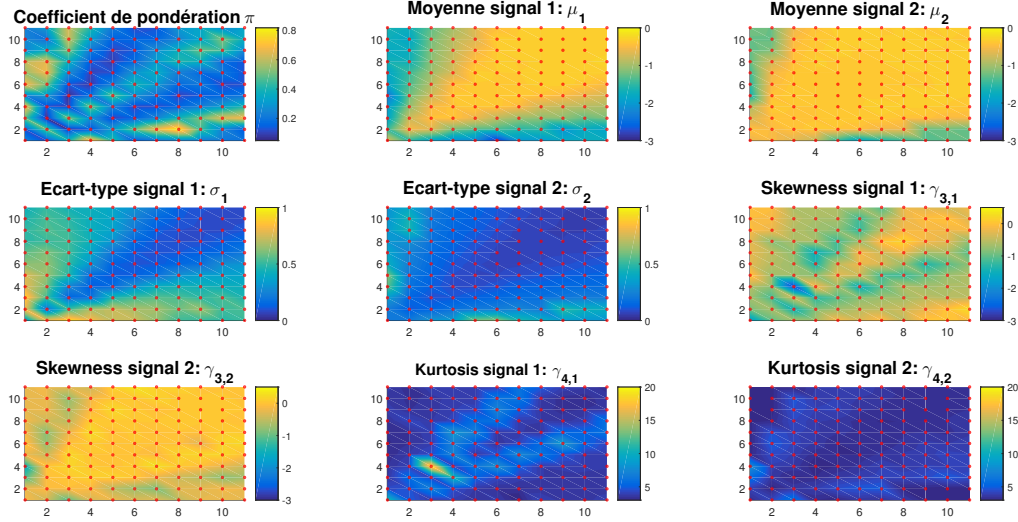


FIGURE 5.3 – Relation surfacique pour les 9 paramètres du code

1.1 Tri des données

Afin d'analyser les 4 modes pour les densités de probabilité conjointes, il est nécessaire de réaliser un tri pour les 2 composantes du mélange de chacun des signaux. Il est important de fixer les deux modes en fonction d'un paramètre donné.

Après analyse des modes des densités de probabilité conjointes, il a été possible d'observer que l'écart-type était un bon paramètre de tri afin d'avoir une continuité entre modes de corrélation de manière spatiale sur la toiture.

Chacune des deux densités de probabilité composant les 121 capteurs sera triée comme suit :

- **Composante 1** : densité de probabilité de mélange avec l'écart-type le plus grand.
- **Composante 2** : densité de probabilité de mélange avec l'écart-type le plus faible.

Comme on l'a vu dans le chapitre 3, 4 modes vont devoir être déterminés afin de reconstruire les densités de probabilité conjointes. À l'aide du tri réalisé pour les signaux étudiés séparément, on peut classer les 4 modes comme suit :

- **Mode 1** : densité de probabilité conjointe de la composante 1 du premier signal et de la composante 1 du deuxième signal.
- **Mode 2** : densité de probabilité conjointe de la composante 1 du premier signal et de la composante 2 du deuxième signal.
- **Mode 3** : densité de probabilité conjointe de la composante 2 du premier signal et de la composante 1 du deuxième signal.
- **Mode 4** : densité de probabilité conjointe de la composante 2 du premier signal et de la composante 2 du deuxième signal.

Lorsqu'on parle de composantes pour les modes, on fait référence au tri décrit dans cette section pour les 121 signaux mélangés.

2 Densités de probabilité obtenues pour 1 capteur choisi corrélé aux 121 capteurs, étude statistique corrélée

Comme précisé dans le chapitre 4, un grand nombre de relations relient les différents capteurs : 7260 ($C_{121}^2 = \frac{121!}{119!2!} = 121 \times 60 = 7260$). Il n'est pas possible de toutes les représenter, ni de les

En travaillant avec 1 capteur corrélé aux 120 autres et à lui-même, on peut faire apparaître des relations spatiales entre les corrélations des capteurs. Il a été possible d'isoler 5 zones avec des comportements différents, comme montré sur la figure 5.4. On est en mesure de distinguer une symétrie par rapport à la diagonale. Il est donc évident que les comportements observés dans les zones 1 et 2 seront équivalents à ceux des zones 4 et 5. Les zones correspondent à la figure de Banks *et al.* (2000) montrée sur la figure 1.9.



L'ensemble des figures va être donné pour les 121 corrélations en fonction du capteur 1. Pour les relations en fonction des capteurs 4, 6, 11, 41, 61 et 121, seules les figures mettant en évidence les corrélations et les facteurs de pondération des modes 1 et 4 seront données. On travaille seulement avec les modes 1 et 4 afin de limiter le nombre de figures et de représenter uniquement celles qui auront un impact sur le dimensionnement par zones. Le mode 1 correspond à la corrélation liant les densités de probabilité de mélange ayant l'écart-type le plus important pour chacun des deux capteurs corrélés. Le mode 4 représente, lui, les deux densités de probabilité de mélange ayant l'écart-type le plus faible pour chacun des deux capteurs corrélés. L'intérêt de cette partie est surtout de comprendre les relations spatiales liant les corrélations. Afin de représenter l'ensemble des résultats sur une même figure, on travaillera selon la méthodologie présentée ci-dessous.

Les densités de probabilité conjointes sont générées de 6 manières différentes dans cette partie. La première génération est réalisée à l'aide des mesures de soufflerie. On va donc

réaliser l’histogramme 2D pour deux signaux donnés. La deuxième génération est la densité de probabilité résultante de la somme des 4 densités de probabilité conjointes des modes. Pour finir, les densités de probabilité conjointes pour chacun des 4 modes sont représentées. Ces 4 densités sont obtenues à l’aide de la reconstruction analytique obtenue par la formule de la densité de probabilité normale transformée par une bi-cubique.

Une densité de probabilité représente donc un histogramme pour deux capteurs. Afin de représenter le comportement spatial, il a été décidé de fixer un des capteurs ($capt_1$). Pour un capteur ($capt_1$), on va étudier la corrélation qui le lie avec les 120 autres capteurs et lui-même. Un ensemble de 121 densités de probabilité va devoir être réalisé sur une même figure.

Pour illustrer les 121 densités de probabilité conjointes, on dispose les histogrammes de la même manière que les capteurs sur la toiture. Afin de bien illustrer les positions, le référencement des lignes et des colonnes est repris en abscisse et en ordonnée. Par exemple : la densité de probabilité conjointe du capteur ($capt_1$) avec le capteur de la ligne 3 et de la colonne 4 se trouvera à la figure ligne 3 et colonne 4.

Afin d’identifier le capteur fixé ($capt_1$), il a été choisi d’encadrer sa densité de probabilité en rouge.

— Figures en bâtonnets pour les corrélations

Pour représenter les valeurs des corrélations des différents modes, il a été choisi de travailler avec un graphique en bâtonnets. Les résultats présentés par les bâtonnets sont directement en lien avec les densités de probabilité conjointes.

Pour l’étude de corrélation, on a besoin de 2 capteurs. Le premier sera fixé et est identifié sur la figure en bâtonnets à l’aide d’une flèche. Les deuxièmes capteurs de la corrélation sont les 121 de la toiture. Les bâtonnets vont être disposés, comme les densités de probabilité conjointes, à l’endroit du second capteur de la corrélation.

— Figures en bâtonnets pour les pondérations

Pour chacune des densités de probabilité générée par un mode, un facteur de pondération sera attribué afin de déterminer l’importance du mode. La figure en bâtonnets pour les pondérations utilise la même disposition que pour la figure en bâtonnets des corrélations. Il est important de garder à l’esprit que la somme des pondérations pour les 4 modes donne 1. Pour bien observer l’effet des différents modes, on ne travaille pas avec une échelle globale entre 0 et 1, mais avec une échelle entre la pondération minimale et la pondération maximale du mode pour les 121 densités de probabilité conjointes.

2.1 Résultats pour le capteur 1 corrélé aux 121 autres

En comparant les résultats des figures 5.5 et 5.6, on constate que la reconstruction est de qualité pour les différentes densités de probabilité conjointes du capteur 1 avec les 120 autres capteurs et lui-même. On considère ici qu’une reconstruction de qualité est donnée par un modèle qui permet de bien reconstituer les histogrammes obtenus en soufflerie repris à la figure 5.5.

Des différences apparaissent dans le voisinage direct du capteur 1. Mais le comportement global des deux modes est bien respecté. Il est donc intéressant d’observer le comportement des modes.

Une observation interpellante est faite pour les résultats de l'algorithme dans le cas d'une densité de probabilité conjointe pour deux signaux identiques. L'algorithme n'arrive pas à converger vers la densité de probabilité. Ce cas a été étudié plus en détail dans la section 2.6 du chapitre 4.

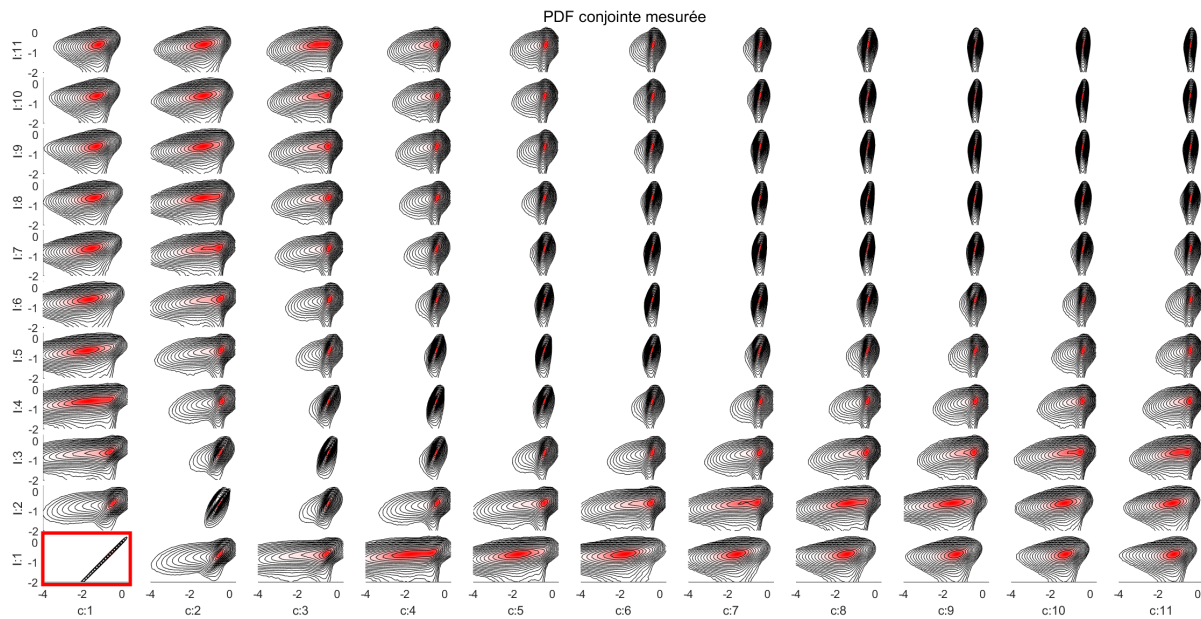


FIGURE 5.5 – Évolution des densités de probabilité conjointes en fonction du capteur 1

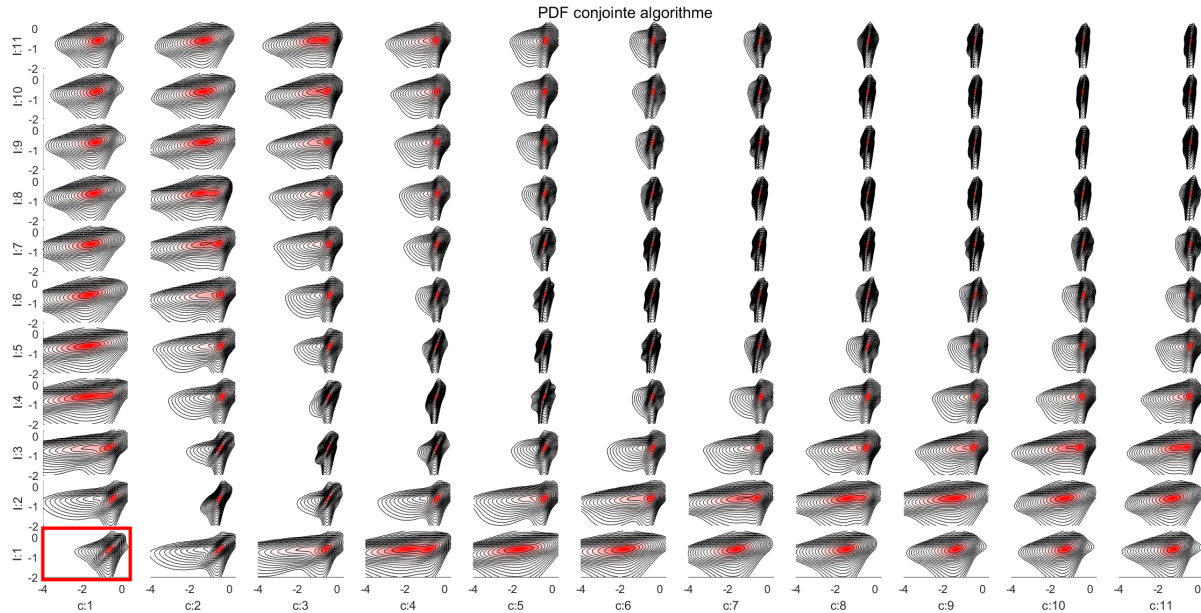


FIGURE 5.6 – Résolution des densités de probabilité conjointes en fonction du capteur 1 par l'algorithme

1. MODE 1

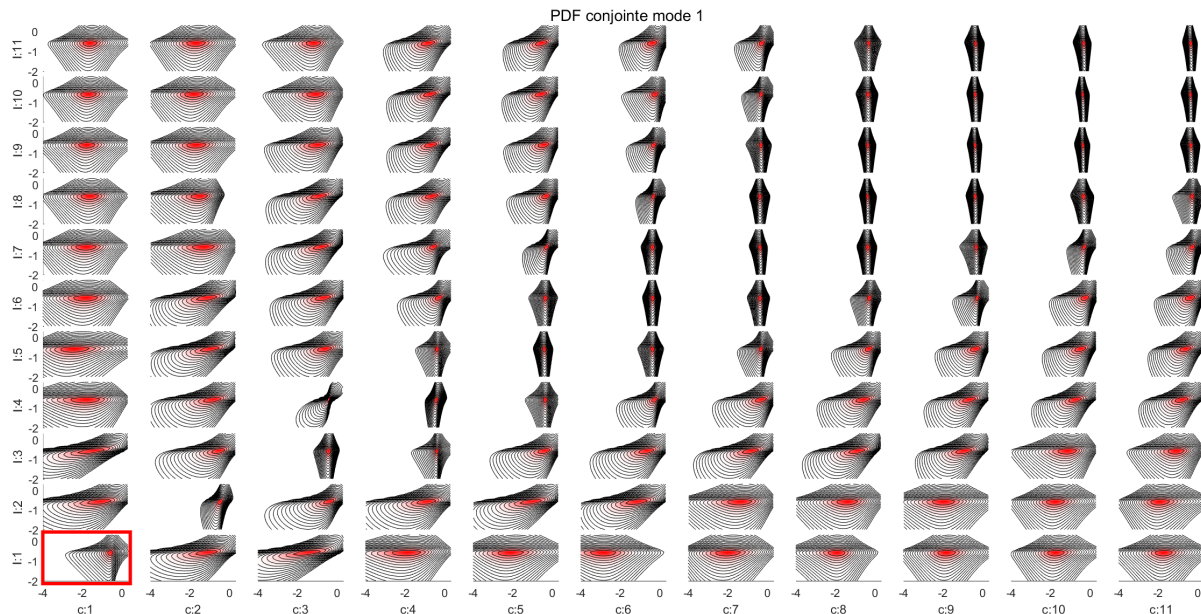


FIGURE 5.7 – Résolution des densités de probabilité conjointes pour le premier mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

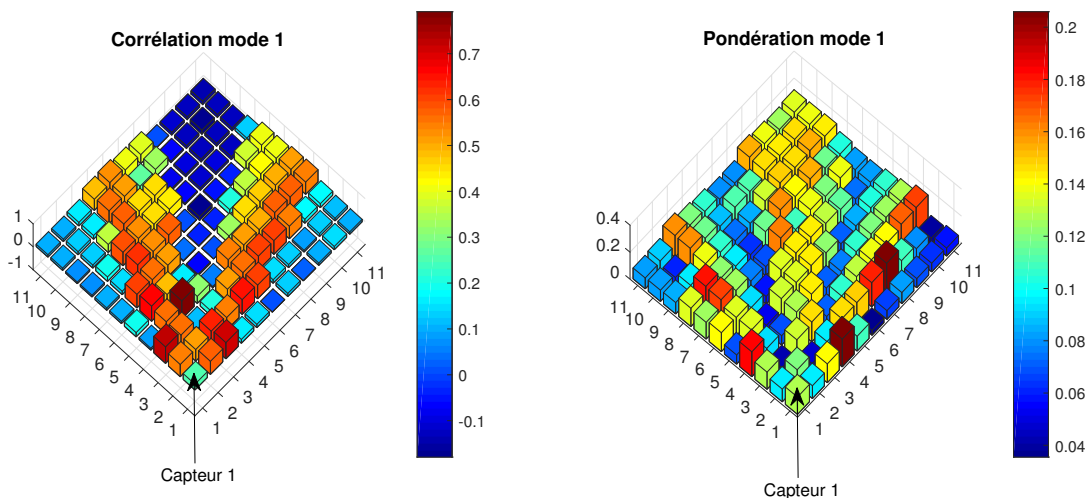


FIGURE 5.8 – Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

Il est possible d'observer une corrélation importante aussi bien dans la zone 2 que dans la zone 4. La corrélation diminue doucement en s'écartant du capteur 1 dans ces deux zones. Pour les zones 1, 3 et 5, on remarque des corrélations beaucoup plus faibles, proches de 0.

Pour les facteurs de pondération, on note que ces derniers sont faibles (inférieurs à 22%). On constate une pondération maximale pour les capteurs de la zone 2 faisant la limite avec la zone 1 et les capteurs de la zone 4 faisant la limite avec la zone 5. Les pondérations sont aussi importantes pour ce mode dans le cas de la zone 3.

On distingue l'effet des corrélations et des facteurs de pondération sur la figure 5.7. On observe tout de même que les statistiques unilatérales influencent fortement les densités de probabilité conjointes. Pour le mode 1, l'écart-type est beaucoup plus faible dans la zone 3 que dans les autres zones.

2. MODE 2

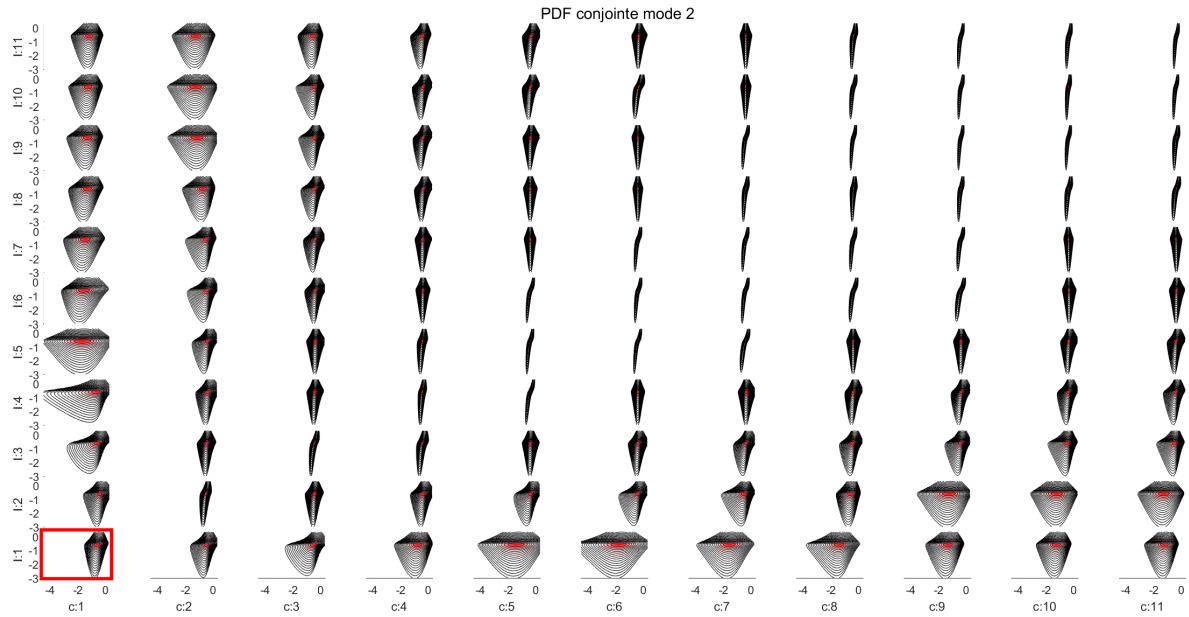


FIGURE 5.9 – Résolution des densités de probabilité conjointes pour le deuxième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

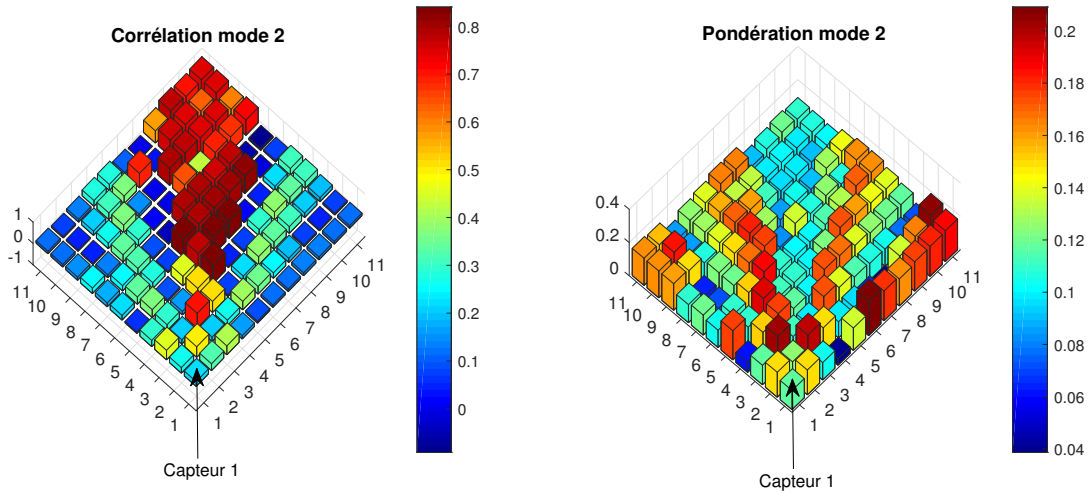


FIGURE 5.10 – Paramètres de résolution pour le deuxième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

Pour le mode 2, on aperçoit une forte corrélation dans la zone 3. Cependant, cette forte corrélation dépend d'un facteur de pondération faible, autour de 12%.

Les pondérations les plus importantes correspondent aux corrélations avoisinantes 0. Ces dernières valeurs sont observées pour les capteurs de la zone 3 faisant la limite avec les zones 2 et 4, mais aussi dans la zone 1 et 5. La figure 5.9 représente la contribution du mode 2 pour la reconstruction de la densité de probabilité conjointes. Il est évident qu'il existe une forte corrélation liant les signaux de la zone 3. Cette observation est aussi impactée par de faibles écarts-types dans la zone 3 par rapport aux autres zones.

3. MODE 3

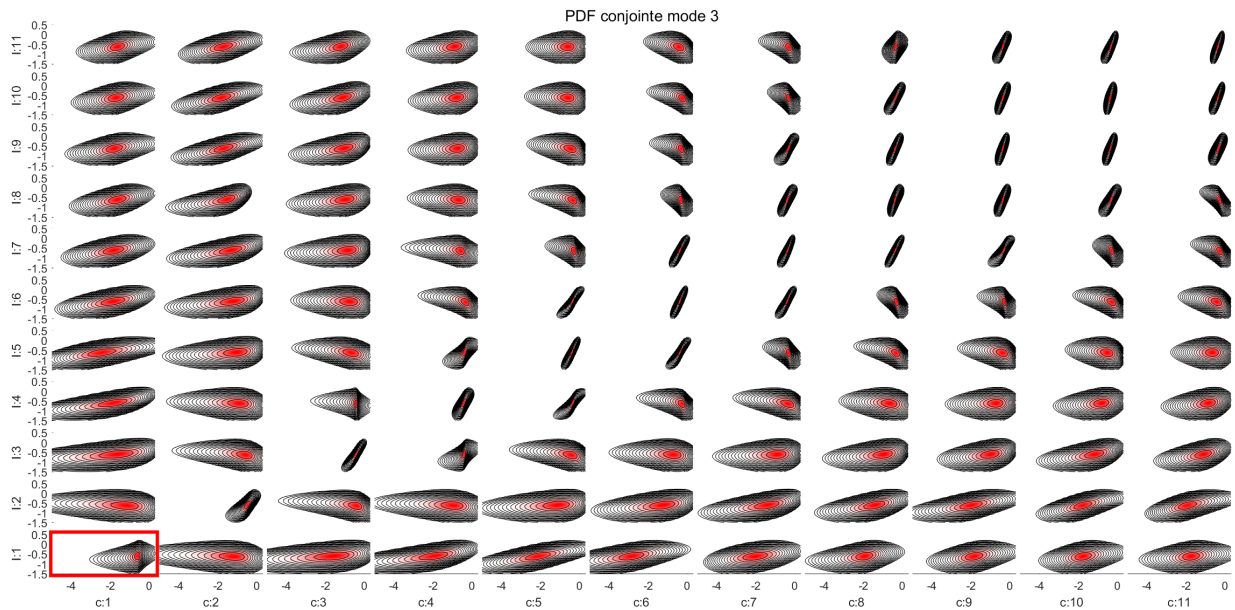


FIGURE 5.11 – Résolution des densités de probabilité conjointes pour le troisième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

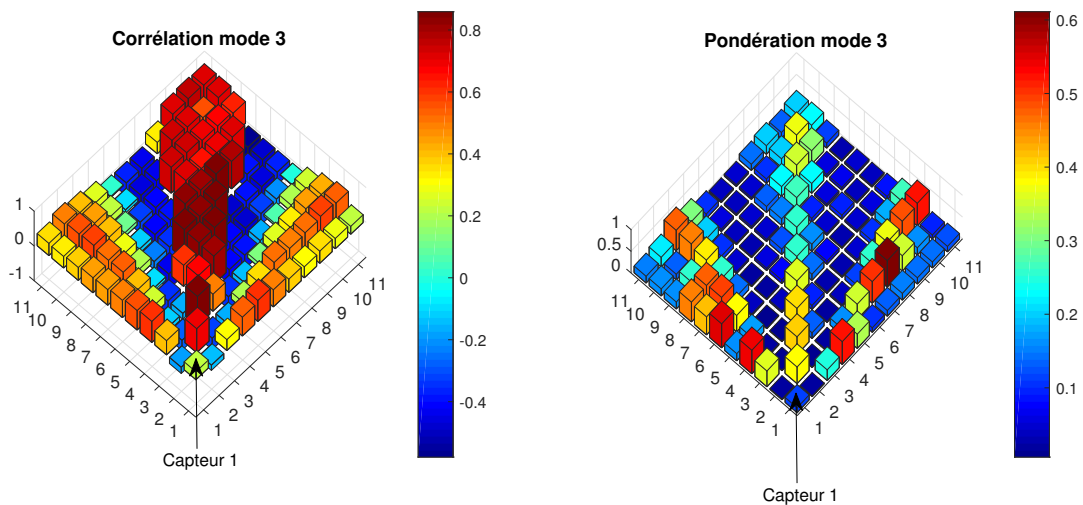


FIGURE 5.12 – Paramètres de résolution pour le troisième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

On remarque que le mode 3 a des pondérations variant fortement dans l'espace. Ceci va notablement influencer l'analyse des corrélations. Les pondérations évoluent entre 0 et 60%.

On observe une première zone avec des pondérations non négligeables se situant sur la diagonale. Ces capteurs ont une forte corrélation. On note une pondération importante pour les capteurs de la zone 2 faisant la limite avec la zone 1 et pour les capteurs de la zone 4 faisant la limite avec la zone 5. Les corrélations pour ces capteurs sont aussi importantes. Elles influenceront donc beaucoup la densité de probabilité conjointe mélangée.

Sur la figure 5.11, le changement d'écart-type du capteur 1 est bien visible pour le mode 3. Pour les mode 1 et 2, la composante avec l'écart-type le plus important était utilisée pour le capteur 1.

4. MODE 4

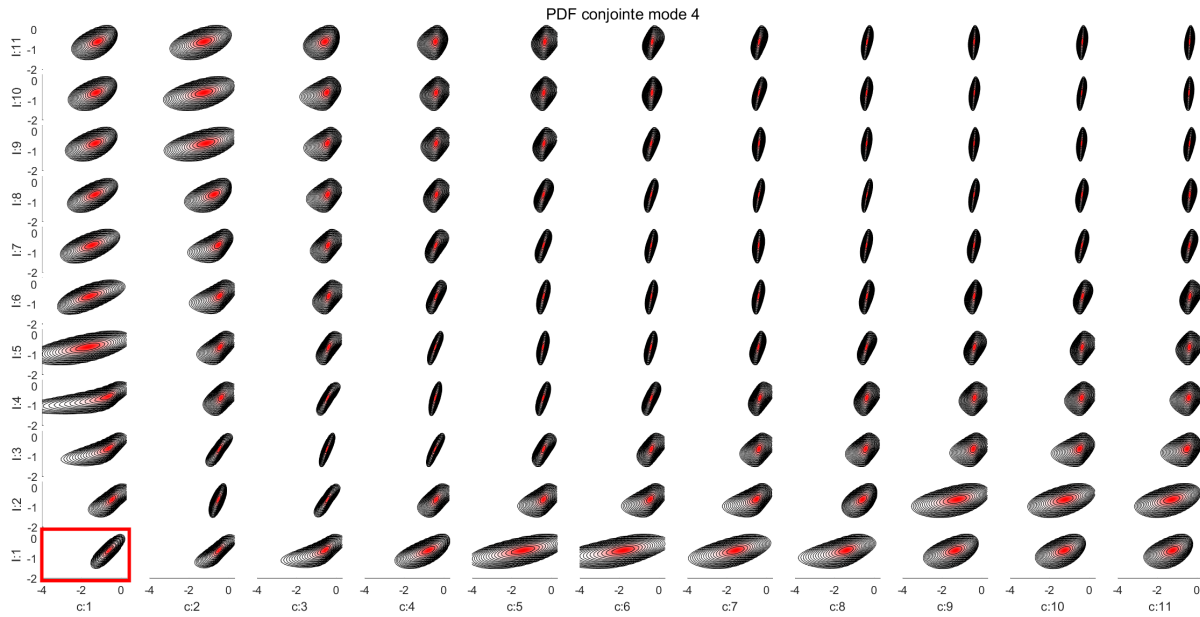


FIGURE 5.13 – Résolution des densités de probabilité conjointes pour le quatrième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

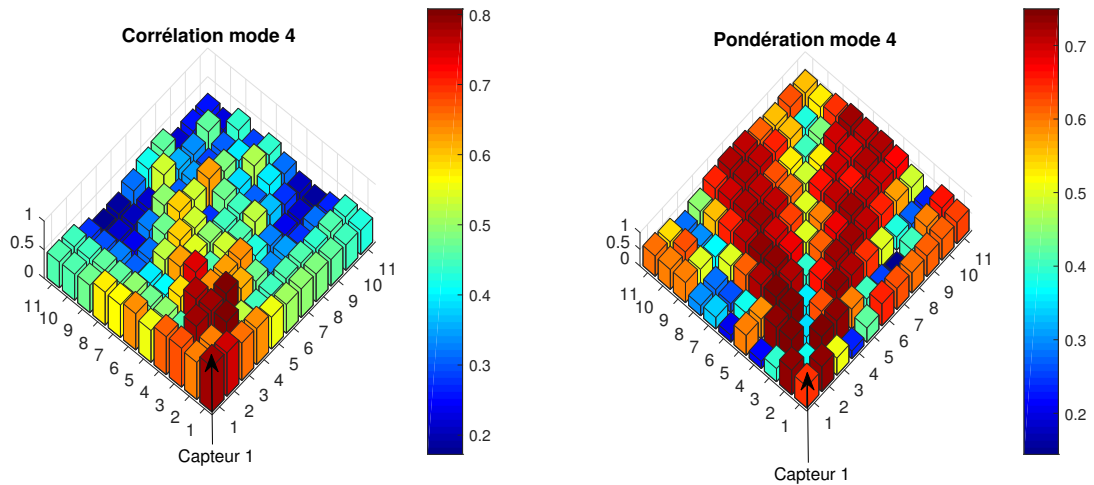


FIGURE 5.14 – Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 1 corrélé aux 121 autres)

Pour le mode 4, on observe des corrélations qui diminuent en fonction de la distance. La vitesse de décroissance dépend de la section où on se trouve. Elle est plus rapide pour les zones 2 et 4 que pour les 3 autres.

Les facteurs de pondération sont importants pour la majorité des corrélations (de l'ordre de 70%).

Le mode 4 ne crée pas de sous-pressions importantes sur la figure 5.13. Ce mode servira principalement à représenter le comportement où les sous-pressions mesurées ont une grande probabilité d'occurrence.

2.2 Résultats pour les capteurs 6/11 corrélés aux 121 autres (zone 1)

1. MODE 1

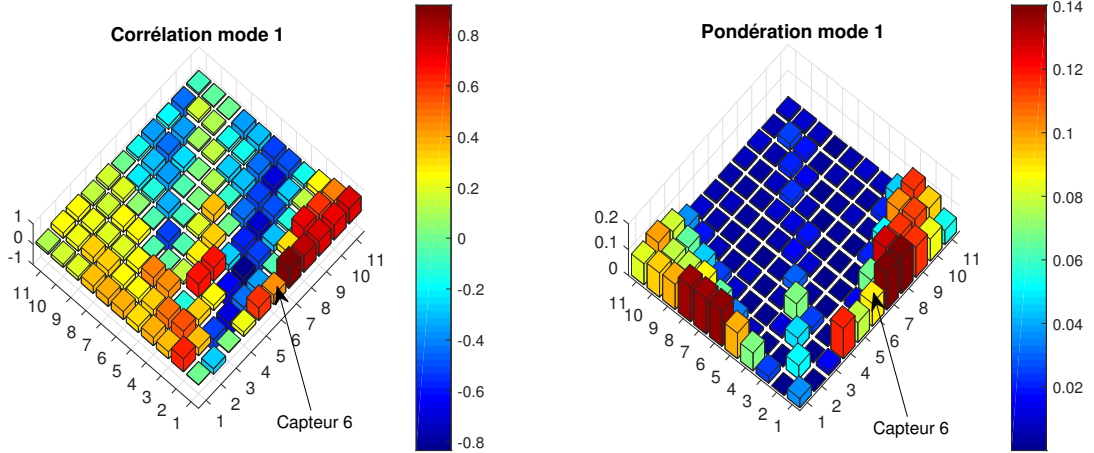


FIGURE 5.15 – Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 6 corrélé aux 121 autres)

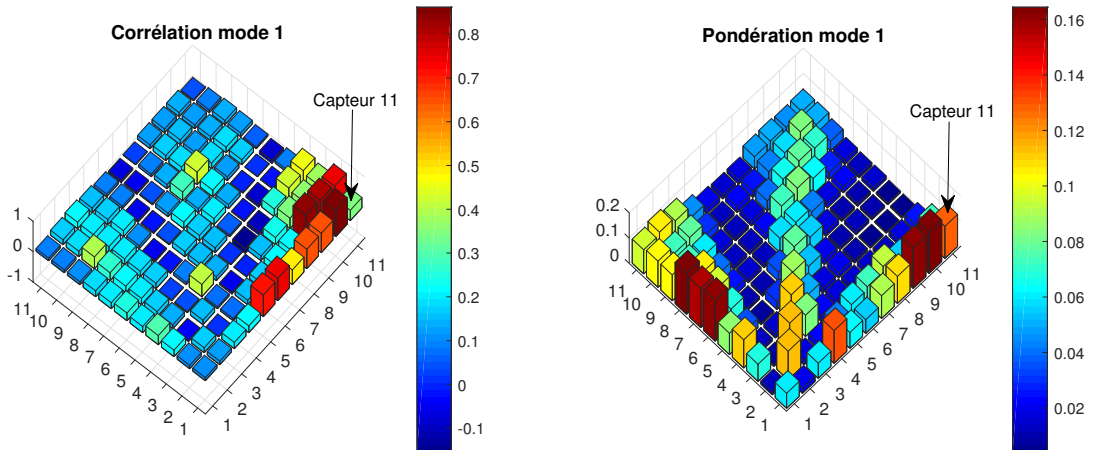


FIGURE 5.16 – Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 11 corrélé aux 121 autres)

Pour le mode 1, les capteurs 6 et 11 appartenant à la première section montrent une forte corrélation dans cette dernière. Les facteurs de pondération, même s'ils sont faibles (inférieurs à 20%), sont maximaux pour les sections 1 et 5. Dans la section 5, on n'observe cependant pas une corrélation importante. Ce qui suppose que la section 1 est peu corrélée à la section 5 pour le mode 1.

2. MODE 4

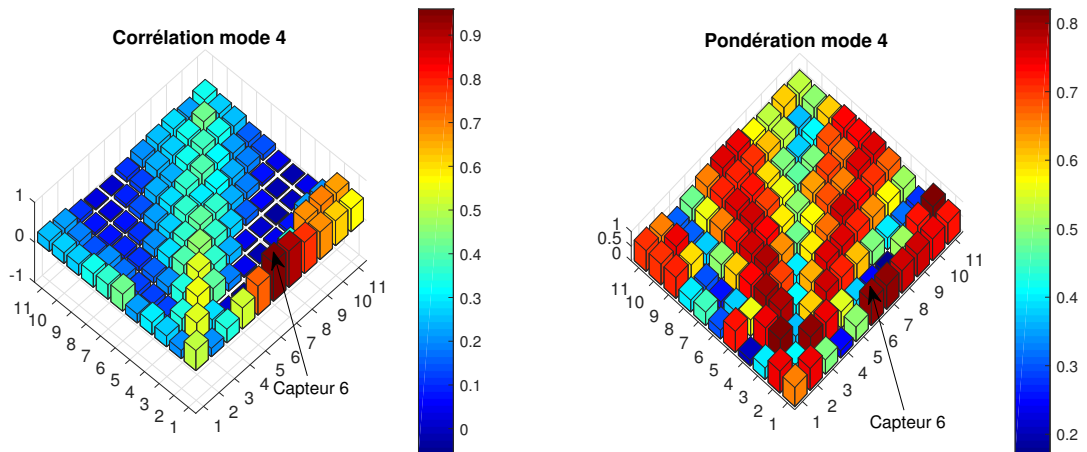


FIGURE 5.17 – Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 6 corrélé aux 121 autres)

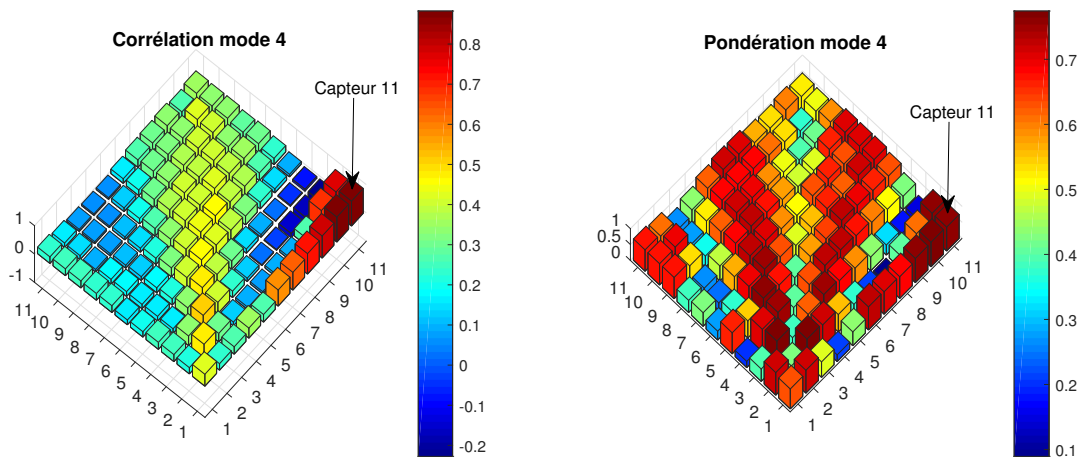


FIGURE 5.18 – Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 11 corrélé aux 121 autres)

Pour le mode 4, on observe de fortes corrélations dans la zone 1. Elles diminuent lorsqu'on s'écarte du capteur pour lequel on calcule la corrélation avec les 121 autres capteurs. Lorsqu'on sort de la zone 1 étudiée, les corrélations chutent fortement. Une limite semble aussi être marquée par les facteurs de pondération qui sont faibles au passage de la zone 1 à la zone 2.

2.3 Résultats pour les capteurs 4/41 corrélés aux 121 autres (zone 2)

1. MODE 1

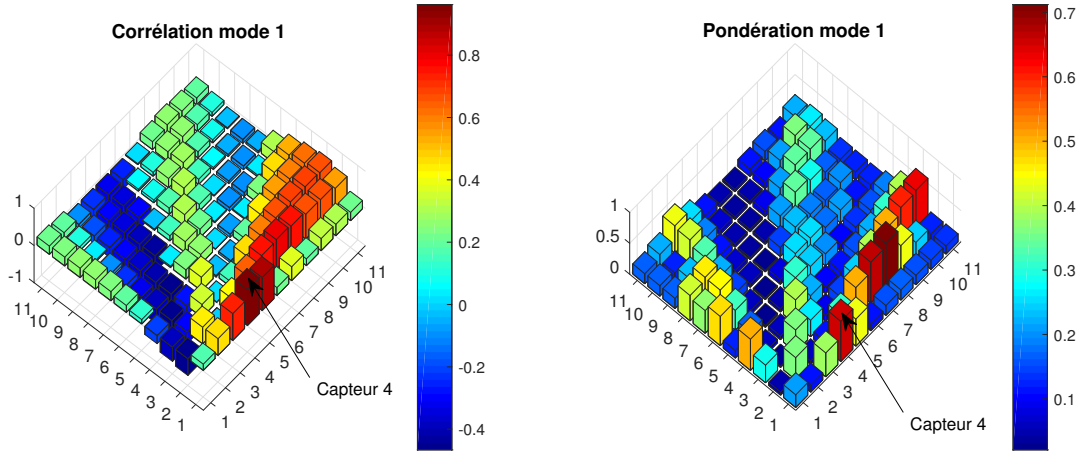


FIGURE 5.19 – Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 4 corrélé aux 121 autres)

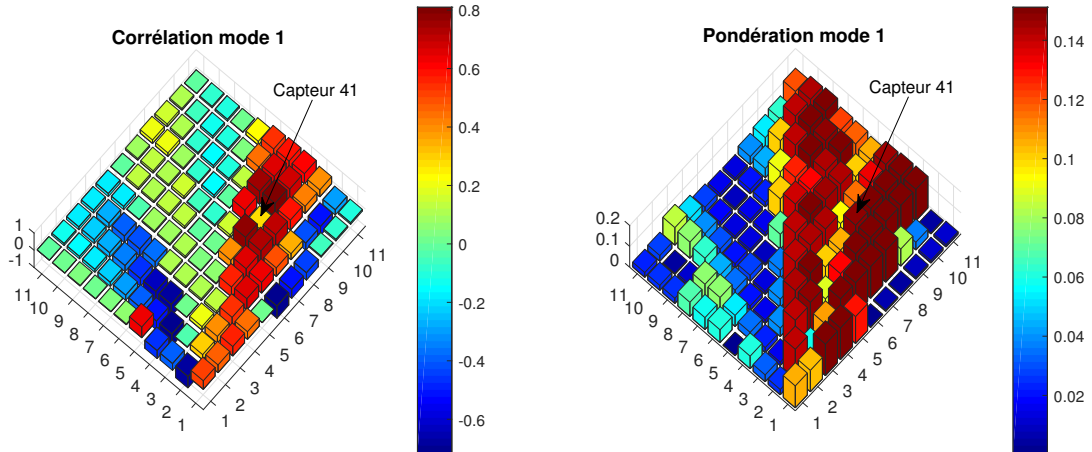


FIGURE 5.20 – Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 41 corrélé aux 121 autres)

En étudiant le mode 1 pour les corrélations liant les capteurs 4 et 41 avec les 121 capteurs, une forte corrélation apparaît dans la zone 2. Des différences importantes se remarquent pour les facteurs de pondération entre les corrélations des capteurs 4 et 41. Ceci est dû au critère de tri des 2 densités de probabilité du mélange. Le critère de tri est choisi en fonction des écarts-types et non en fonction des facteurs de pondération.

Pour l'étude de la section 2, des corrélations négatives apparaissent pour le mode 1 dans la section 4 opposée. L'effet d'une corrélation négative peut être expliqué avec l'exemple suivant : lorsqu'une forte sous-pression en zone 2 est observée on risque d'observer au même moment une faible sous-pression en zone 4. Cependant, le facteur de pondération tend vers 0 en zone 4. Cet effet est donc négligeable.

2. MODE 4

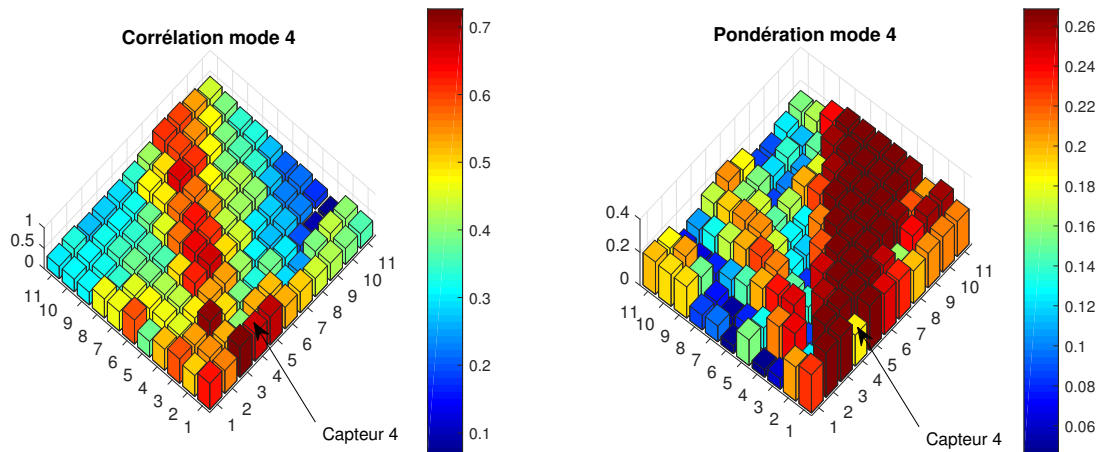


FIGURE 5.21 – Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 4 corrélé aux 121 autres)

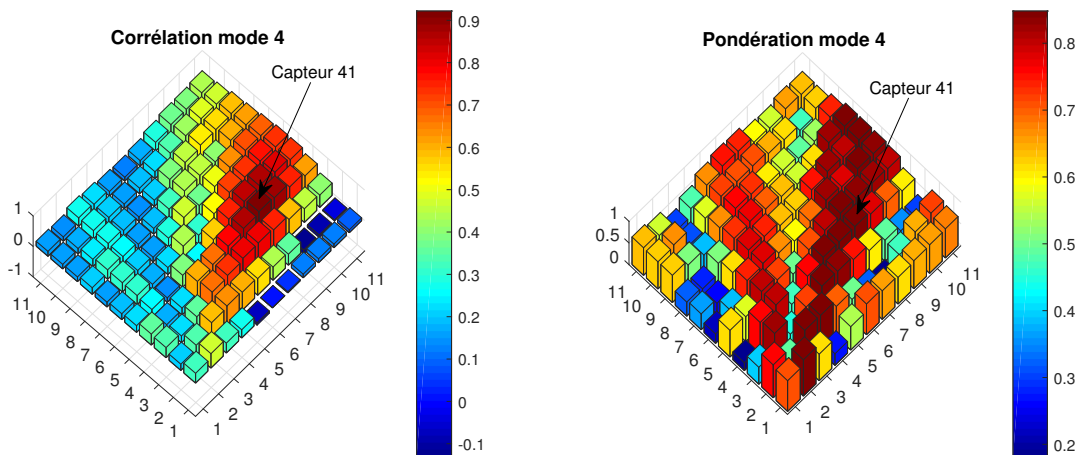


FIGURE 5.22 – Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 41 corrélé aux 121 autres)

Pour le mode 4, des corrélations importantes semblent se réduire lorsqu'on s'écarte du capteur pour lequel on calcule les 121 corrélations. Ceci est particulièrement visible pour le capteur 41. Pour le capteur 4, on observe une réduction de la corrélation lente selon la ligne horizontale et du côté opposé de la diagonale par rapport au capteur 4. Cependant, il est possible d'obtenir de faibles coefficients de pondération pour les fortes corrélations se situant de l'autre côté de la diagonale. Les pondérations sont encore une fois très différentes pour les corrélations entre les capteurs 4 et 41.

2.4 Résultats pour les capteurs 61/121 corrélés aux 121 autres (zone 3)

1. MODE 1

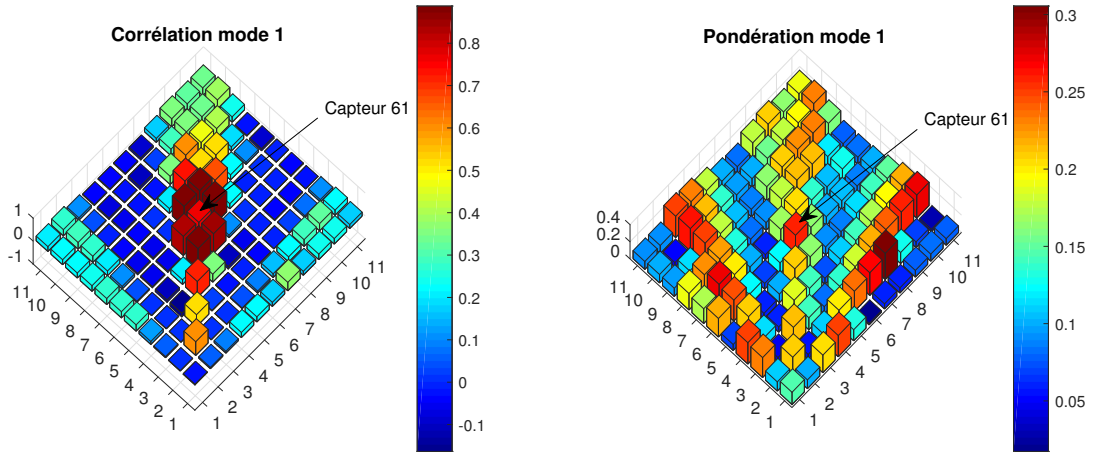


FIGURE 5.23 – Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 61 corrélé aux 121 autres)

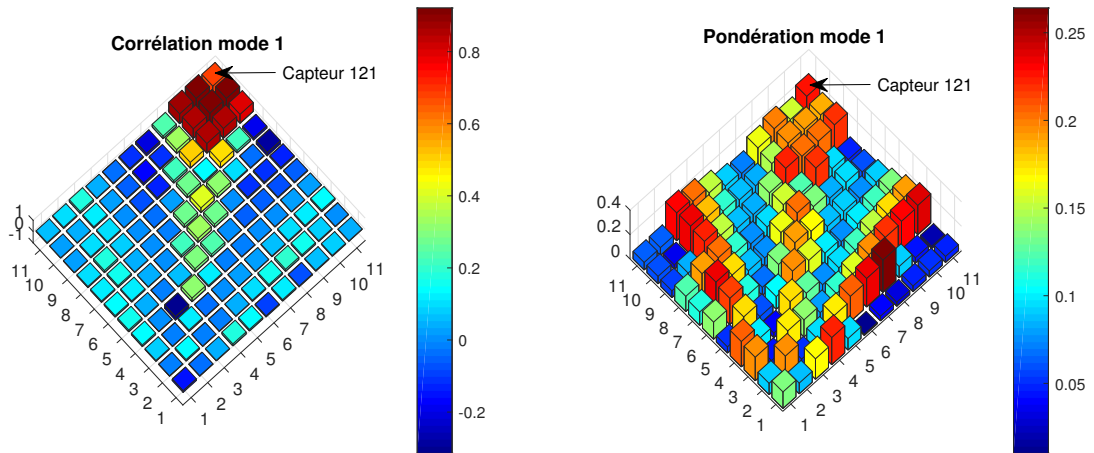


FIGURE 5.24 – Paramètres de résolution pour le premier mode (capteur 121 corrélé aux 121 autres)

Pour le mode 1, on aperçoit une forte corrélation localisée dans le voisinage direct du capteur pour lequel on a une corrélation avec les 121 autres. Les pondérations sont limitées à 30%, ce qui représente une faible partie du mélange.

La réduction rapide de la corrélation va avoir un impact important sur les résultantes de pression qui vont être étudiées dans une partie ultérieure.

2. MODE 4

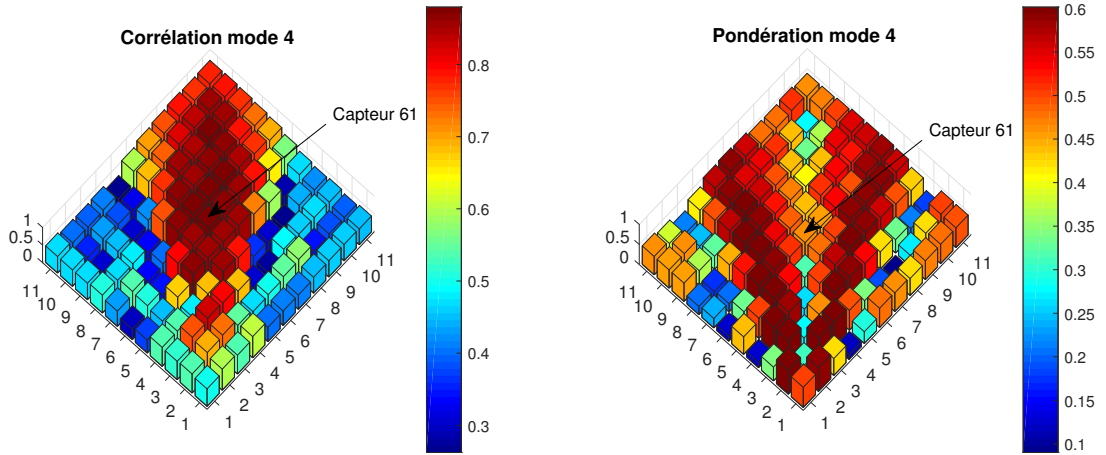


FIGURE 5.25 – Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 61 corrélé aux 121 autres)

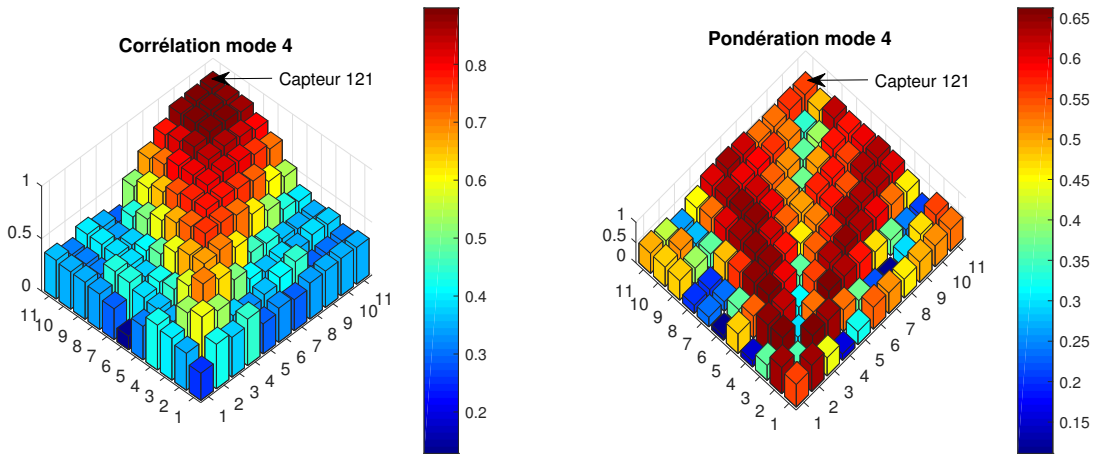


FIGURE 5.26 – Paramètres de résolution pour le quatrième mode (capteur 121 corrélé aux 121 autres)

Pour le mode 4, il existe une corrélation importante dans la section 3. Elle semble dépendre directement de la distance du capteur corrélé aux capteurs 61 ou 121.

Les corrélations tendent vers 0 pour les zones 1,2,4 et 5.

Les facteurs de pondération sont importants pour l'ensemble des capteurs, sauf pour les 3 "droites" observées pour le mode 3, qui se situe hors de la zone 3. L'impact est faible sur la zone sur laquelle ce travail se focalise.

2.5 Conclusion pour les densités de probabilité conjointes

Suite aux différentes figures de densité de probabilité conjointes, il est possible d'observer la qualité de reconstruction de la méthode développée. On peut reconstruire de manière fiable les densités de probabilité conjointes obtenues en soufflerie.

On a pu aussi séparer de manière équivalente les différents modes pour un capteur corrélé aux 121 capteurs de la toiture. Ceci a pu être réalisé à l'aide du tri développé pour les signaux étudiés séparément. Il est possible d'observer des comportements qui ont une continuité spatiale pour les 121 densités de probabilité conjointes des 4 modes.

Suite aux études réalisées pour les 3 sections, pour le mode 1, on a pu observer de fortes corrélations dans la section étudiée. Ceci met en lumière le fait que conserver une composante unique du mélange de la densité de probabilité fait du sens. Cette approche sera étudiée dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

ÉTUDE DES RÉSULTANTES DE PRESSION À PARTIR DES RÉSULTATS DE L'ALGORITHME DÉVELOPPÉ

Le but d'une des deux applications envisagées à l'aide du nouvel algorithme est d'apporter des améliorations à l'approche TVL. Comme expliqué dans l'introduction (1), l'approche TVL est basée sur la distribution des covariances de manière spatiale. La première étude qui va donc être réalisée ici visera à vérifier s'il existe une relation spatiale entre les corrélations pour un des modes des statistiques croisées des signaux mélangés. La deuxième étude portera sur les méthodes utilisées pour la reconstruction du coefficient de pression de dimensionnement pour une surface donnée. Ce chapitre va être articulé en différents points. Une première partie théorique permettra de décrire les outils dont on dispose et d'introduire les limites connues pour la reconstruction des moments statistiques d'une résultante de plusieurs capteurs. Une deuxième partie décrira comment choisir les modes qui vont générer les plus fortes sous-pressions. Ensuite, plusieurs analyses seront faites pour la corrélation et la covariance, de manière à mieux appréhender les phénomènes spatiaux des différents modes mis en avant par l'algorithme.

- On va commencer par réaliser une analyse spatiale des intégrales de corrélation réalisées en différentes positions de la toiture. Cette étude pourra servir à améliorer la disposition des capteurs de pression pour le futur.
- On va ensuite faire une étude d'échelle pour des lignes d'intégration de corrélation autour de capteurs de la toiture.
- On réalisera une analyse plus poussée des corrélations afin de mettre en avant des relations spatiales observées sur la toiture et liant les capteurs entre eux.
- On terminera par une analyse des résultantes des coefficients de pression pour des surfaces composées de 4 capteurs. Cela permettra de vérifier la méthodologie développée dans la section 1.

1 Développement mathématique pour le calcul de résultantes de pression

1.1 Développement des formules de manière générale

Si on suppose qu'une pression est appliquée sur une surface carrée de longueur L , il est possible d'écrire le coefficient de pression résultant avec l'intégrale suivante :

$$cp_R(t) = \frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x, y, t) dx dy \quad (6.1)$$

On peut déterminer les moments statistiques du coefficient de pression résultant à l'aide des différents points décrits ci-dessous.

1. Moyenne

Il est possible de trouver la moyenne résultante avec la formule suivante :

$$\mu_R = E[cp_R(t)] = E \left[\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x, y, t) dx dy \right] = \frac{1}{L^2} \iint_0^L E[cp(x, y, t)] dx dy \quad (6.2)$$

La moyenne est calculée avec la formule 6.3 lorsqu'on a uniquement des capteurs discrétisés.

$$\mu_R = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} E[cp(x_i, y_j, t)] \quad (6.3)$$

La moyenne résultante est donc représentée par la somme des moyennes des capteurs composant la surface étudiée.

2. Écart-type

L'écart-type résultant peut être obtenu avec la formule ci-dessous :

$$\sigma_R^2 = E[(cp_R(t) - \mu_R)^2] = E \left[\left(\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_1, y_1, t) dx_1 dy_1 - \mu_R \right) \left(\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_2, y_2, t) dx_2 dy_2 - \mu_R \right) \right] \quad (6.4)$$

En développant les parenthèses de l'espérance mathématique, on peut obtenir l'équation 6.5. Il a été nécessaire d'utiliser la relation suivante : $E \left[\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_i, y_i, t) \mu_R dx_i dy_i \right] = \mu_R^2$

$$\sigma_R^2 = E \left[\frac{1}{L^4} \iiint_0^L cp(x_1, y_1, t) cp(x_2, y_2, t) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 - \mu_R^2 \right] \quad (6.5)$$

Or, il est possible d'écrire au vu de la formule 6.2 la relation suivante : $\mu_R = \frac{1}{L^2} \iint_0^L E[cp(x, y, t)] dx dy$. Ce qui donne :

$$\sigma_R^2 = E \left[\frac{1}{L^4} \iiint_0^L (cp(x_1, y_1, t) cp(x_2, y_2, t) - E[cp(x_1, y_1, t)] E[cp(x_2, y_2, t)]) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \right] \quad (6.6)$$

On a la possibilité de sortir l'intégrale de l'espérance. L'espérance au carré est équivalente à l'espérance. En appliquant ceci, on trouve la formule 6.7.

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{L^4} \iiint_0^L (E[cp(x_1, y_1, t) cp(x_2, y_2, t)] - E[cp(x_1, y_1, t)] E[cp(x_2, y_2, t)]) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (6.7)$$

On retrouve la formulation de la covariance : $cov_{(i,j)} = \rho_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j = E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j]$. Il est possible d'écrire l'écart-type résultant comme :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{L^4} \iiint_0^L \rho_{[(x_1, y_1) - (x_2, y_2)]} \sigma_{(x_1, y_1)} \sigma_{(x_2, y_2)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (6.8)$$

Dans la réalité, on a uniquement des capteurs discrétisés. On calculera l'écart-type résultant avec la formule :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} \rho_{[(x_i, y_j) - (x_k, y_l)]} \sigma_{(x_i, y_j)} \sigma_{(x_k, y_l)} \quad (6.9)$$

3. Skewness

On peut obtenir le skewness résultant avec la formule ci-dessous :

$$\gamma_{3,R} \sigma_R^3 = E[(cp_R(t) - \mu_R)^3] = E \left[\left(\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_1, y_1, t) dx_1 dy_1 - \mu_R \right) \left(\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_2, y_2, t) dx_2 dy_2 - \mu_R \right) \left(\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_3, y_3, t) dx_3 dy_3 - \mu_R \right) \right] \quad (6.10)$$

Si on développe les différentes parenthèses, on trouve l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_{3,R} \sigma_R^3 = E & \left[\frac{1}{L^6} \iiint \iiint \iint_0^L cp(x_1, y_1, t) cp(x_2, y_2, t) cp(x_3, y_3, t) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 \right. \\ & - \frac{1}{L^4} \iiint \iiint_0^L cp(x_1, y_1, t) cp(x_2, y_2, t) \mu_R dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ & - \frac{1}{L^4} \iiint \iiint_0^L cp(x_1, y_1, t) cp(x_3, y_3, t) \mu_R dx_1 dy_1 dx_3 dy_3 \\ & - \frac{1}{L^4} \iiint \iiint_0^L cp(x_2, y_2, t) cp(x_3, y_3, t) \mu_R dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 \\ & + \frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_1, y_1, t) \mu_R^2 dx_1 dy_1 \\ & + \frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_2, y_2, t) \mu_R^2 dx_2 dy_2 \\ & + \frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_3, y_3, t) \mu_R^2 dx_3 dy_3 \\ & \left. - \mu_R^3 \right] \quad (6.11) \end{aligned}$$

On remplace les moyennes résultantes μ_R de manière à faire apparaître les intégrales :

$\mu_R = \frac{1}{L^2} \iint_0^L E[cp(x, y, t)] dx dy$. On peut de même transformer : $E \left[\frac{1}{L^2} \iint_0^L cp(x_i, y_i, t) \mu_R^2 dx_i dy_i \right] = \mu_R^3$, comme μ_R est une constante.

$$\begin{aligned}
\gamma_{3,R}\sigma_R^3 = E & \left[\frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L cp(x_1, y_1, t)cp(x_2, y_2, t)cp(x_3, y_3, t)dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \right. \\
& - \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L cp(x_1, y_1, t)cp(x_2, y_2, t)E[cp(x_3, y_3, t)]dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \\
& - \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L cp(x_1, y_1, t)cp(x_3, y_3, t)E[cp(x_2, y_2, t)]dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \\
& - \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L cp(x_2, y_2, t)cp(x_3, y_3, t)E[cp(x_1, y_1, t)]dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \\
& + \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L cp(x_1, y_1, t)E[cp(x_2, y_2, t)]E[cp(x_3, y_3, t)]dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \\
& + \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L cp(x_2, y_2, t)E[cp(x_1, y_1, t)]E[cp(x_3, y_3, t)]dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \\
& + \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L cp(x_3, y_3, t)E[cp(x_1, y_1, t)]E[cp(x_2, y_2, t)]dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \\
& \left. - \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L E[cp(x_1, y_1, t)]E[cp(x_2, y_2, t)]E[cp(x_3, y_3, t)]dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \right] \quad (6.12)
\end{aligned}$$

On peut ensuite sortir les intégrales de l'espérance et introduire la moyenne et les corrélations :

$$\begin{aligned}
\gamma_{3,R}\sigma_R^3 = \frac{1}{L^6} \iiint \iiint \int_0^L & (E[cp(x_1, y_1, t)cp(x_2, y_2, t)cp(x_3, y_3, t)] \\
& - \rho_{[(x_1, y_1)/(x_2, y_2)]}\sigma_{(x_1, y_1)}\sigma_{(x_2, y_2)}\mu_{(x_3, y_3)} - \rho_{[(x_1, y_1)/(x_3, y_3)]}\sigma_{(x_1, y_1)}\sigma_{(x_3, y_3)}\mu_{(x_2, y_2)} \\
& - \rho_{[(x_2, y_2)/(x_3, y_3)]}\sigma_{(x_2, y_2)}\sigma_{(x_3, y_3)}\mu_{(x_1, y_1)} - \mu_{(x_1, y_1)}\mu_{(x_2, y_2)}\mu_{(x_3, y_3)}) dx_1dy_1dx_2dy_2dx_3dy_3 \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Un problème apparaît avec la formulation de l'équation 6.13. La problématique est l'espérance : $E[cp(x_1, y_1, t)cp(x_2, y_2, t)cp(x_3, y_3, t)]$. Cette dernière n'a pas été calculée dans ce travail. Elle n'a pas non plus été utilisée dans l'approche de la triple corrélation.

4. Kurtosis

Il est possible d'utiliser le même développement que pour le skewness. Le problème d'espérance non étudiée par l'algorithme va apparaître. Les espérances problématiques qui vont être obtenues sont :

- $E[cp(x_i, y_i, t)cp(x_j, y_j, t)cp(x_k, y_k, t)]$
- $E[cp(x_i, y_i, t)cp(x_j, y_j, t)cp(x_k, y_k, t)cp(x_l, y_l, t)]$

La dernière des espérances fait appel à une étude de quadri-corrélation. Ce qui n'a pas été étudié dans le cadre de ce travail.

1.2 Introduction des mélanges dans la formulation générale

Ce travail a mis en évidence un algorithme permettant de décomposer une densité de probabilité mélangée en deux densités de probabilité. Il est important d'introduire ce comportement dans le calcul de résultante de surface.

Comme un problème a été observé pour la formulation générale du skewness et du kurtosis, ces derniers n'ont pas été développés.

Les différentes relations du chapitre 2, illustrant les propriétés mathématiques de mélange se trouvant ci-dessous, ont été utilisées pour la suite :

$$p = \pi \times p_1 + (1 - \pi) \times p_2 \quad (6.14)$$

$$\mu = \pi \times \mu_1 + (1 - \pi) \times \mu_2 \quad (6.15)$$

$$\sigma^2 = \pi \times (\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu)^2) + (1 - \pi) \times (\sigma_2^2 + (\mu_2 - \mu)^2) \quad (6.16)$$

1. Moyenne

Comme on l'a développé pour la formulation générale dans la formule 6.3, il est possible de trouver la moyenne résultante comme :

$$\mu_R = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} E[cp(x_i, y_j, t)] \quad (6.17)$$

Si on introduit l'équation 6.15 dans l'équation de moyenne résultante, on trouve :

$$\mu_R = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \pi_{(i,j)} \times \mu_{(x_i, y_j, 1)} + (1 - \pi_{(i,j)}) \times \mu_{(x_i, y_j, 2)} \quad (6.18)$$

L'ensemble des paramètres est connu, il est donc possible de trouver la moyenne résultante.

On a pu identifier 4 modes avec une étude des signaux mélangés pour les statistiques croisées. Il est intéressant de déterminer la moyenne de la résultante de pression pour les 4 modes, car l'écart-type résultant dépend des statistiques croisées et non unilatérales. On peut déterminer la moyenne des coefficients de pression pour 2 capteurs avec les formules ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode1} &= (\mu_{(x_i, y_j, 1)} + \mu_{(x_k, y_l, 1)})/2 \\ \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode2} &= (\mu_{(x_i, y_j, 1)} + \mu_{(x_k, y_l, 2)})/2 \\ \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode3} &= (\mu_{(x_i, y_j, 2)} + \mu_{(x_k, y_l, 1)})/2 \\ \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode4} &= (\mu_{(x_i, y_j, 2)} + \mu_{(x_k, y_l, 2)})/2 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Si on a plus de capteurs, il est possible de déterminer la moyenne en réalisant la somme donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mu_R = \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} &\alpha_1 \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode1} + \alpha_2 \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode2} \\ &+ \alpha_3 \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode3} + \alpha_4 \mu_{((x_i, y_j)/x_k, y_l), mode4} \end{aligned} \quad (6.20)$$

2. Écart-type

Comme on l'a montré pour la formulation générale dans la formule 6.9, on peut trouver l'écart-type résultant comme :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} \rho_{[(x_i, y_j)/(x_k, y_l)]} \sigma_{(x_i, y_j)} \sigma_{(x_k, y_l)} \quad (6.21)$$

Il est ensuite utile de séparer la corrélation pour les différents modes des statistiques croisées. Pour réaliser cette décomposition, il a fallu repartir de la formulation de la

probabilité mélangée ici avec 4 modes pour 2 signaux. La somme des coefficients de pondération α_i doit valoir 1.

$$p\left(cp_{(x_i, y_j)}(m)/cp_{(x_k, y_l)}(n)\right) = \alpha_1 p_1\left(cp_{(x_i, y_j)}(m)/cp_{(x_k, y_l)}(n)\right) + \alpha_2 p_2\left(cp_{(x_i, y_j)}(m)/cp_{(x_k, y_l)}(n)\right) + \alpha_3 p_3\left(cp_{(x_i, y_j)}(m)/cp_{(x_k, y_l)}(n)\right) + \alpha_4 p_4\left(cp_{(x_i, y_j)}(m)/cp_{(x_k, y_l)}(n)\right) \quad (6.22)$$

Il est aussi important de reprendre la décomposition de la moyenne selon les 4 modes utilisés pour les statistiques corrélées :

$$\begin{aligned} \mu_{cp_{(x_i, y_j)}} &= (\alpha_1 + \alpha_2)\mu_{(x_i, y_j, mode:1)} + (\alpha_3 + \alpha_4)\mu_{(x_i, y_j, mode:2)} \\ \mu_{cp_{(x_k, y_l)}} &= (\alpha_1 + \alpha_3)\mu_{(x_k, y_l, mode:1)} + (\alpha_2 + \alpha_4)\mu_{(x_k, y_l, mode:2)} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Sachant que la covariance est calculée avec la formule de l'équation 6.25,

$$Cov((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) = E[(cp(x_i, y_j, t) - \mu_{(x_i, y_j)})(cp(x_k, y_l, t) - \mu_{(x_k, y_l)})] = E[cp(x_i, y_j, t)cp(x_k, y_l, t)] - \mu_{(x_i, y_j)}\mu_{(x_k, y_l)} \quad (6.24)$$

il est possible de décomposer la covariance pour les différents modes :

$$\begin{aligned} Cov((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) &= \alpha_1 E_1[cp(x_i, y_j, t)cp(x_k, y_l, t)] + \alpha_2 E_2[cp(x_i, y_j, t)cp(x_k, y_l, t)] + \\ &\quad \alpha_3 E_3[cp(x_i, y_j, t)cp(x_k, y_l, t)] + \alpha_4 E_4[cp(x_i, y_j, t)cp(x_k, y_l, t)] - \\ &\quad (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)\mu_{(x_i, y_j, mode:1)}\mu_{(x_k, y_l, mode:1)} - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_4)\mu_{(x_i, y_j, mode:1)}\mu_{(x_k, y_l, mode:2)} - \\ &\quad (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_3)\mu_{(x_i, y_j, mode:2)}\mu_{(x_k, y_l, mode:1)} - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_4)\mu_{(x_i, y_j, mode:2)}\mu_{(x_k, y_l, mode:2)} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} Cov((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) &= \\ &\alpha_1 Cov_1((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3))\mu_{(x_i, y_j, mode:1)}\mu_{(x_k, y_l, mode:1)} + \\ &\alpha_2 Cov_2((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_4))\mu_{(x_i, y_j, mode:1)}\mu_{(x_k, y_l, mode:2)} + \\ &\alpha_3 Cov_3((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_3 - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_3))\mu_{(x_i, y_j, mode:2)}\mu_{(x_k, y_l, mode:1)} + \\ &\alpha_4 Cov_4((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_4 - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_4))\mu_{(x_i, y_j, mode:2)}\mu_{(x_k, y_l, mode:2)} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Cette dernière formulation permet de faire le lien entre la formulation générale et celle des différents modes.

On peut réécrire enfin la formulation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} \\ &\alpha_1 Cov_1((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3))\mu_{(x_i, y_j, mode:1)}\mu_{(x_k, y_l, mode:1)} + \\ &\alpha_2 Cov_2((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_4))\mu_{(x_i, y_j, mode:1)}\mu_{(x_k, y_l, mode:2)} + \\ &\alpha_3 Cov_3((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_3 - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_3))\mu_{(x_i, y_j, mode:2)}\mu_{(x_k, y_l, mode:1)} + \\ &\alpha_4 Cov_4((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_4 - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_4))\mu_{(x_i, y_j, mode:2)}\mu_{(x_k, y_l, mode:2)} \end{aligned} \quad (6.27)$$

3. Conclusion

En conclusion, il est possible de trouver la moyenne (équation 6.20) et l'écart-type (équation 6.27) d'une résultante de pression en utilisant les moments statistiques calculés par l'algorithme.

Cependant, il est impossible de calculer le skewness et le kurtosis résultant avec le modèle utilisé dans ce travail.

2 Identification du mode critique pour les statistiques unilatérales

À travers ce travail, un algorithme permettant de dé-mixer un signal a été réalisé. L'hypothèse a été émise que chacun des signaux de la toiture a une densité de probabilité correspondante mélangée par deux densités de probabilité. Il importe de se poser la question : est-il nécessaire de conserver les deux signaux du mélange pour réaliser le dimensionnement ? Cette question sera résolue dans cette partie.

Pour ce faire, il a été nécessaire de réaliser des résultantes de pression dans les 5 zones de la figure 5.4 de manière séparée. Travailler avec les 5 zones permet d'observer un comportement semblable pour des groupes de capteurs appartenant à une même zone.

Les résultantes de pression qui vont être étudiées sont des résultantes de pression pour 2 capteurs. Il sera possible de reconstituer la densité de probabilité résultante, puis d'identifier lequel des 4 modes croisés crée les plus grandes sous-pressions. Les résultantes de pression ne vont pas être étudiées uniquement pour les capteurs voisins d'un capteur donné. Les résultantes pour l'ensemble des 121 capteurs vont être calculées en fonction d'un même capteur secondaire parmi les 121. Il sera possible de voir de cette manière quelles densités de probabilité composant le mélange de la résultante créent les sous-pressions les plus importantes sur la toiture en réalisant la combinaison de 2 capteurs.

2.1 Génération de résultante de pression pour deux capteurs

Comme cela a été montré pour l'étude des corrélations des signaux bimodaux dans le chapitre 4, il existe un nombre très important de combinaisons de 2 signaux. Il n'est pas possible de représenter l'ensemble de ces résultats dans ce rapport. Il a donc fallu opérer un choix. Afin de montrer la méthodologie utilisée pour générer la résultante de pression pour deux capteurs, les capteurs 35 et 36 ont été utilisés.

Deux approches peuvent être réalisées afin de calculer la résultante de pression pour les différents modes :

1. Générer des signaux avec les propriétés statistiques unilatérales et croisées trouvées dans le chapitre 4. Il sera nécessaire de créer des signaux avec une approche de Monte-Carlo. Il faudra respecter les corrélations et les statistiques unilatérales pour les deux signaux composant un mode. Le signal de chacun des modes peut être généré de manière indépendante car on s'intéresse à leur densité de probabilité.
2. Générer la densité de probabilité résultante à partir des densités de probabilité conjointes à l'aide d'un développement analytique. Cette méthode évite d'utiliser l'approche de Monte-Carlo. Il a été possible d'observer que les densités de probabilité résultantes sont obtenues en projetant la densité de probabilité conjointe sur une droite à 45 deg (le développement mathématique est repris dans l'annexe C). Utiliser la même discrétisation selon x et y pour la densité de probabilité conjointe permettra de respecter l'angle de 45 degrés des droites ayant une même résultante de pression. La discrétisation de la résultante a été fixée en fonction de la discrétisation du signal croisé.

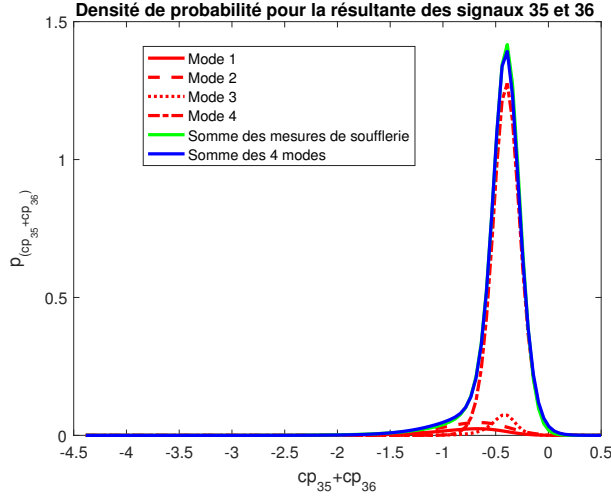


FIGURE 6.1 – Résultante avec une échelle linéaire avec la première approche

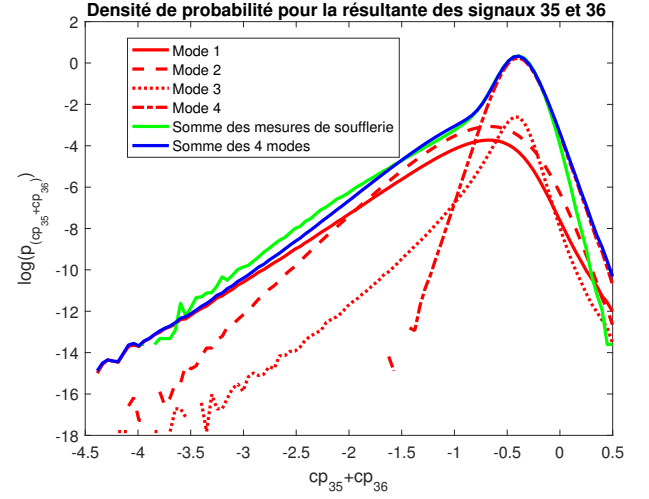


FIGURE 6.2 – Résultante avec une échelle logarithmique avec la première approche

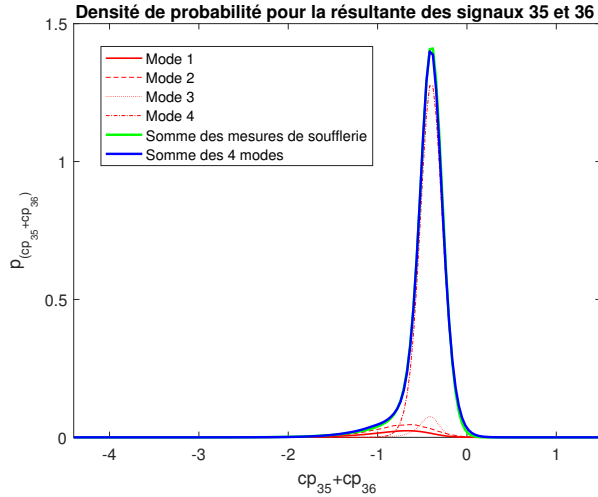


FIGURE 6.3 – Résultante avec une échelle linéaire avec la deuxième approche

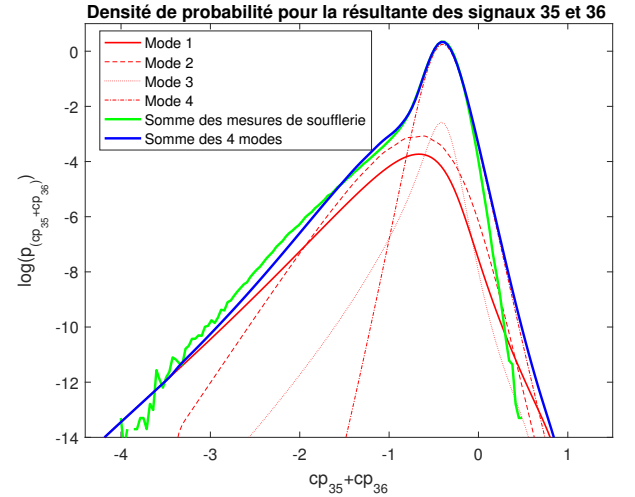


FIGURE 6.4 – Résultante avec une échelle logarithmique avec la deuxième approche

On observe que les deux méthodes donnent des résultats fort semblables. Cependant, on constate que pour la première méthode, des instabilités peuvent être observées. Elles viennent du fait qu'il est nécessaire d'avoir un vecteur de donnée d'une longueur infinie afin d'avoir la distribution de probabilité parfaite.

En analysant la figure 6.2, il est possible de voir que le mode qui génère les pressions les plus importantes est, dans ce cas, le mode 1. Ce mode est généré par les densités de probabilité ayant un écart-type le plus important pour les signaux 35 et 36.

Pour les différentes combinaisons, le mode 1 n'est pas toujours celui qui génère les sous-pressions les plus fortes.

Il a donc fallu développer un critère qui permet d'identifier le mode le plus critique en fonction des différents moments statistiques et des coefficients de pondération connus. Dans le cas de signaux normaux, il aurait pu être possible d'utiliser une approche SRSS, comme pour l'approche sismique. Il n'a pas été choisi dans un premier temps de travailler de cette manière pour la raison suivante : on s'intéresse dans ce cas aux queues de distribution. Donc, il est nécessaire d'avoir un critère qui prend en compte la distribution de probabilité pour ces points.

Dans ce travail, on fait appel à des signaux ayant un skewness et un kurtosis modifiés. Ces deux moments statistiques vont fortement influencer la distribution des probabilités en queue de distribution. Il sera donc nécessaire de les prendre en compte.

Le critère qui a été utilisé pour identifier le mode le plus critique consiste à observer quel est le mode à la probabilité la plus élevée pour la sous-pression la plus grande mesurée en soufflerie. Le mode le plus critique représentera la queue de distribution.

2.2 Analyse des résultantes de pression pour 2 capteurs

Comme il existe une symétrie pour les mesures de pression sur la toiture, on a choisi d'étudier uniquement les zones 1, 2 et 3 de la toiture de la figure 6.5, reprise ci-dessous. Les résultantes de pression vont être calculées pour les 121 capteurs combinés aux capteurs 6 et 11 pour la zone 1. Pour la zone 2, les capteurs 4 et 41 ont été retenus. Pour finir, pour la zone 3, ce sont les capteurs 61 et 121.

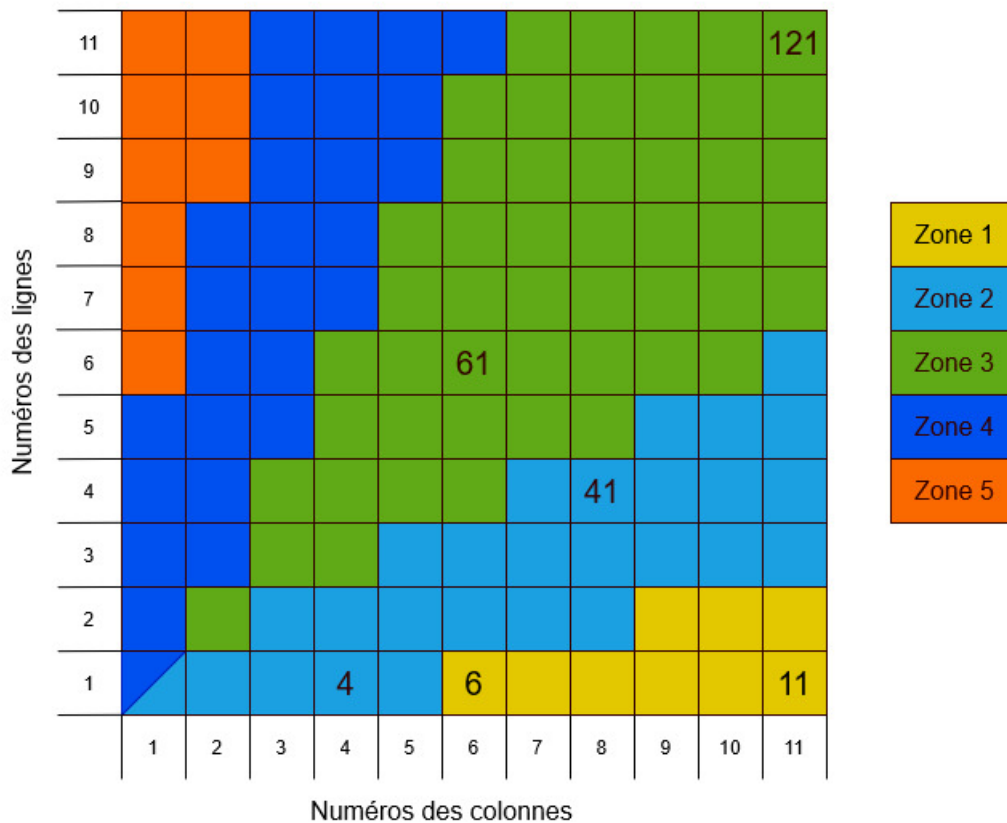


FIGURE 6.5 – Régions ayant des comportements différents

Les résultats qui vont être représentés sur les figures ci-dessous représentent les densités de probabilité des coefficients de pression moyens obtenus pour des combinaisons de deux capteurs. Sur les figures, il est possible d'observer 121 sous-figures disposées en 11 lignes et rangées. Chacune des sous-figures représente la combinaison de 2 signaux. Le premier des deux signaux qui sera utilisé pour les 121 résultantes est le capteur ($capt_1$). Ce capteur qui sera utilisé pour toutes les combinaisons est identifié sur les figures par la position de la sous-figure encadrée en bleu. La position de cette sous-figure est identique à la disposition des capteurs sur la toiture et sur la figure 6.5. Le deuxième capteur composant les résultantes de pression correspond au

capteur situé à la position de la sous-figure sur la toiture et sur la figure 6.5.

On a remarqué des comportements spécifiques pour les résultantes de pression se trouvant dans la zone du capteur fixé ($capt_1$). Afin de montrer ces zones au lecteur, les sous-figures composant la zone sont reprises en rouge. Pour identifier le mode critique pour chacune des sous-figures, on a choisi de représenter ce dernier à l'aide d'un trait plus épais que les 3 autres modes.

Il est aussi possible d'observer la qualité de reconstruction des résultantes de pression en comparant les mesures temporelles de soufflerie reprises en bleu et les résultats obtenus par l'algorithme en vert. Les différentes figures sont reprises en échelle logarithmique pour montrer le comportement en queue de distribution, où les probabilités d'occurrence sont très faibles.

2.2.1 Résultats pour la section 1 de la figure 6.5

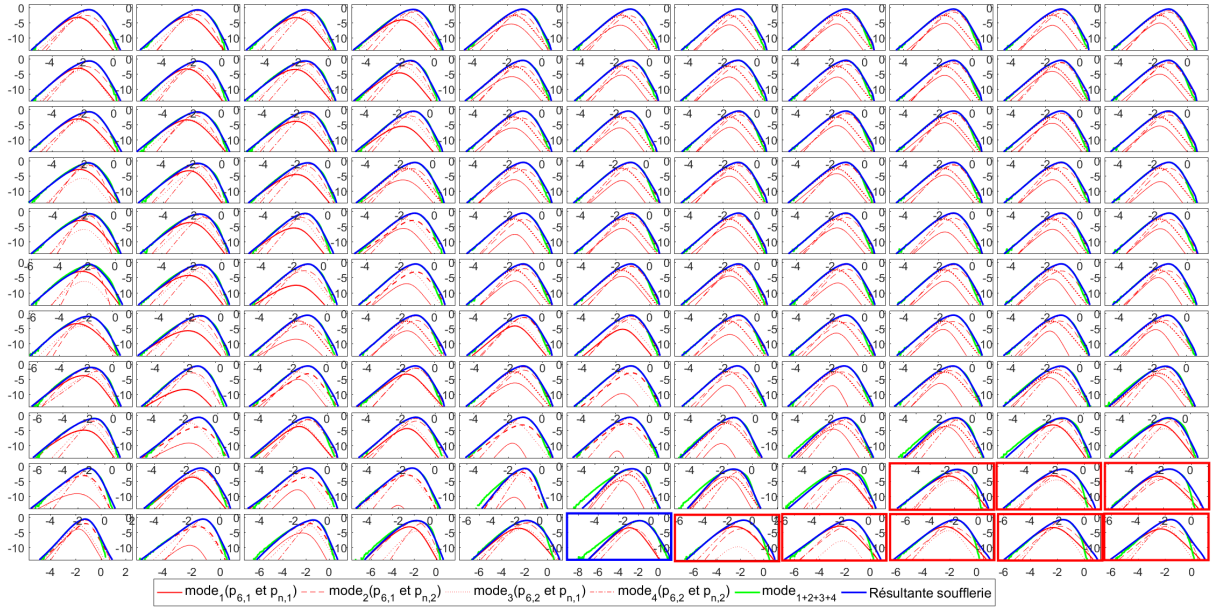


FIGURE 6.6 – Identification du mode critique dans la zone 1 en fonction du capteur 6

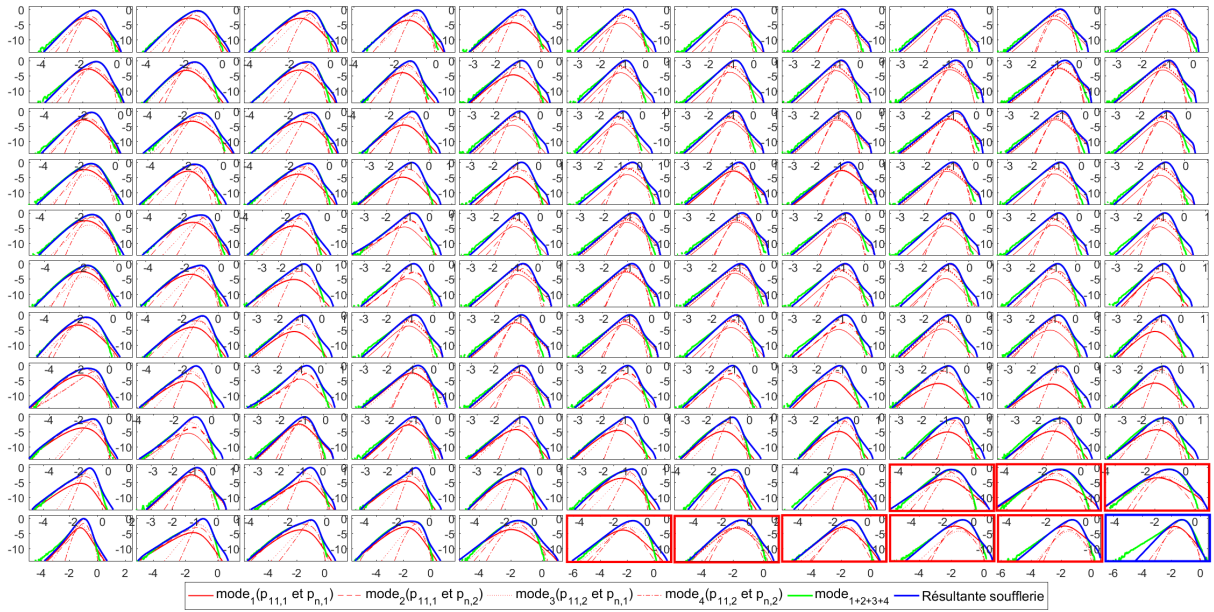


FIGURE 6.7 – Identification du mode critique dans la zone 1 en fonction du capteur 11

On remarque sur les figures 6.6 et 6.7 que les résultantes de pression maximales pour 2 capteurs se situant dans la zone 1 sont générées par le mode 1. Le mode générant la sous-pression maximale observée est illustré avec une épaisseur de trait supérieur à celle des 3 autres modes. On constate une faible distinction entre le mode 1 et les autres modes. Cependant, cette faible différence pour l'échelle linéaire est importante.

2.2.2 Résultats pour la section 2 de la figure 6.5

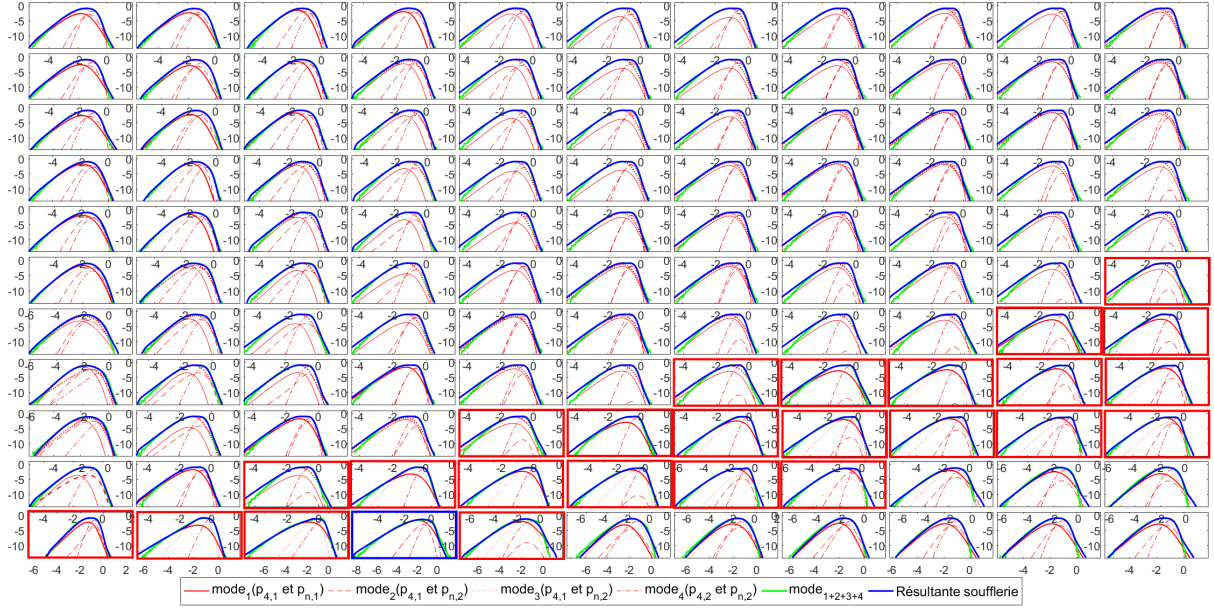


FIGURE 6.8 – Identification du mode critique dans la zone 2 en fonction du capteur 4

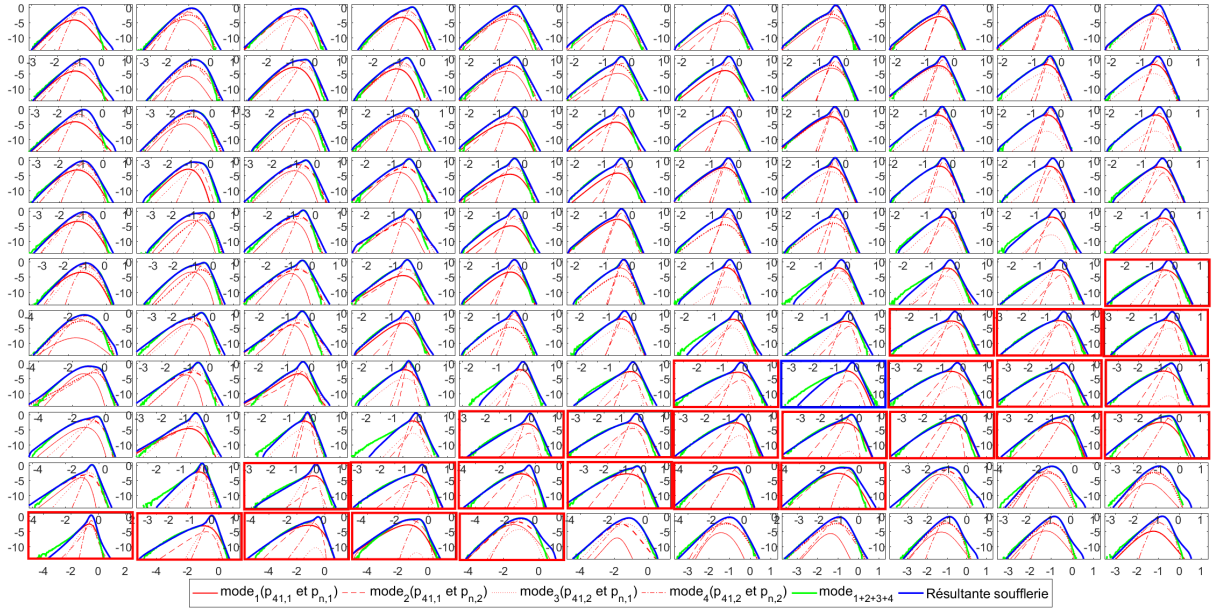


FIGURE 6.9 – Identification du mode critique dans la zone 2 en fonction du capteur 41

En analysant les résultats obtenus sur ces deux nouvelles figures, il est possible d'observer que le mode 1 est le plus critique pour la résultante de 2 capteurs dans la zone 2. On note des contradictions aux limites de la zone. Cependant, les différences entre le mode 1 et l'autre mode critique sont très faibles. Ce qui permet de conserver le modèle de zones décrit à la figure 6.5, mais aussi de garder comme composantes les plus critiques dans une même zone les signaux composant les mélanges ayant l'écart-type le plus important.

2.2.3 Résultats pour la section 3 de la figure 6.5

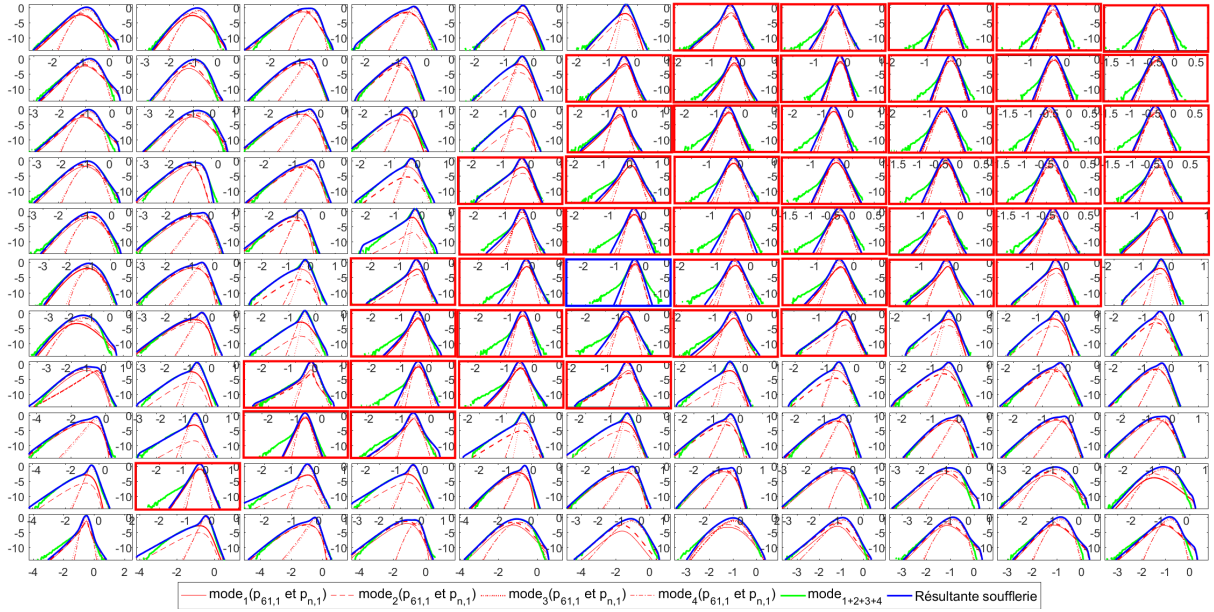


FIGURE 6.10 – Identification du mode critique dans la zone 3 en fonction du capteur 61

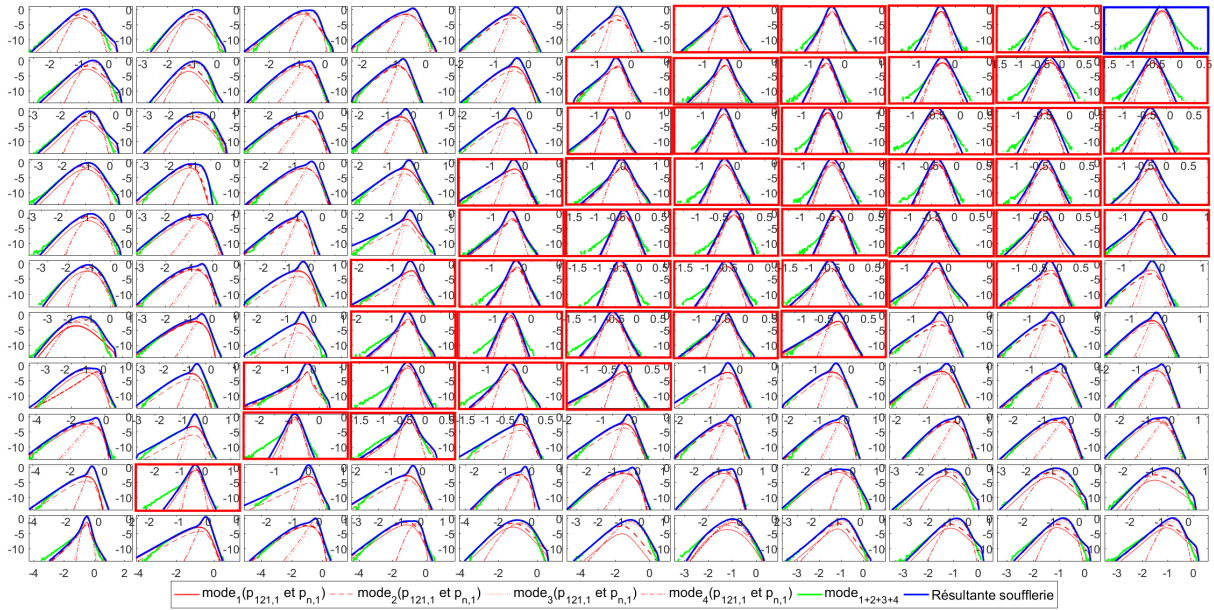


FIGURE 6.11 – Identification du mode critique dans la zone 3 en fonction du capteur 121

Dans la zone 3, un seul mode ne génère pas de manière prépondérante les sous-pressions maximales. Dès lors, le mode le plus critique n'est pas toujours le mode 1. Une seconde observation importante est que la résultante de pression mesurée pour les résultantes de pression de 2 capteurs sont plus faibles que pour les autres zones. On peut voir que les sous-pressions (-2.5) sont nettement inférieures à celles mesurées dans les sections 1 et 2 (-7.5). Enfin, les reconstructions réalisées avec une échelle logarithmique sont de moins bonne qualité que celles observées dans la zone 1 et 2.

Néanmoins, on observe que le mode 1 est toujours responsable d'une majorité des sous-pressions en queue de distribution, surtout quand on s'écarte de la droite de symétrie des mesures de

pression (45°). Ceci nous pousse dans un premier temps à conserver l'hypothèse que le mode 1 est le mode le plus critique pour des résultantes de pression pour deux capteurs dans une même zone.

2.2.4 Conclusion

On peut faciliter l'étude des sous-pressions résultantes dans les différentes zones en se concentrant uniquement sur le mode le plus critique. Il sera possible d'utiliser uniquement les densités de probabilité, composant les mélanges de densité de probabilité, ayant l'écart-type le plus important.

Ceci a été déterminé à l'aide des résultantes de pression calculée ci-dessus. Pour illustrer plus en détail cette simplification du problème, la densité de probabilité conjointe des capteurs de pression 33 et 41 a été illustrée à la figure 6.12. On remarque que la résultante de pression sera maximale pour les modes 1 et 3. Or, la pondération du mode 3 annule son effet. Le mode critique est donc le mode 1, comme attendu.

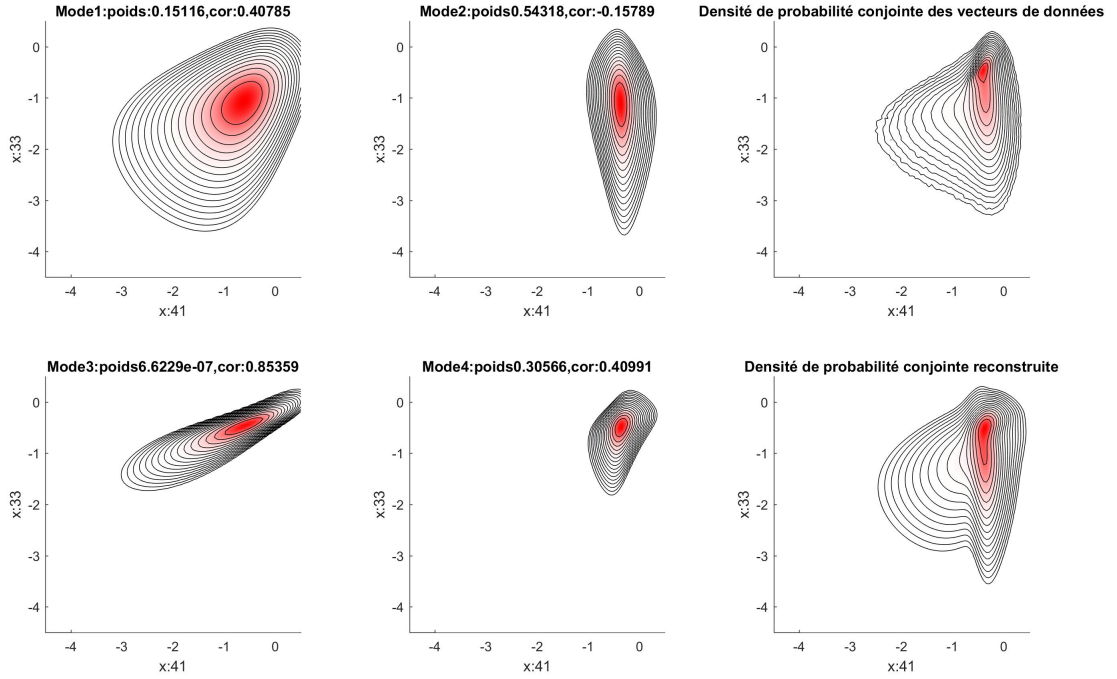


FIGURE 6.12 – Mise en avant du mode critique

3 Analyse d'intégrales de covariance et de corrélation

3.1 Analyse du comportement spatial des intégrales de corrélation

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'évolution du résultat d'intégrales de corrélation liant 4 capteurs entre eux. Ces intégrales de corrélation sont calculées comme suit :

$$\rho_R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \rho[(x_i, y_j)/(x_k, y_l)] \quad (6.28)$$

Cette somme peut être mise en relation avec l'équation 6.20. Si on a un écart-type qui est constant sur la surface, on peut trouver :

$$\sigma_R^2 = \rho_R \sigma^2 \quad (6.29)$$

Le ρ_R va être calculé d'une part avec les résultats de soufflerie sans dé-mixage et d'autre part avec le traitement de dé-mixage développé avec l'algorithme. Les résultats seront obtenus un certain nombre de fois en respectant les différentes sections spatiales développées dans ce travail. Les résultats sont repris sur les figures 6.13 et 6.14.

Une première observation intéressante portée sur les résultats des deux figures 6.13 et 6.14 est que lorsqu'on s'écarte du coin soumis directement au vent, l'intégrale de corrélation pour 4 capteurs augmente et tend vers l'unité. Ce constat peut être mis en lien avec les développements pour les facteurs d'échelle réalisés dans les documents suivants (Carassale (2012), Blaise *et al.* (2014)). Lorsqu'on a une intégrale de covariance qui vaut l'unité, cela signifie que pour les 4 capteurs, lorsqu'un d'eux a une forte sous-pression, les autres ont aussi une forte sous-pression au même moment. Si l'intégrale de corrélation tend vers 0, cela signifie que les mesures entre différents capteurs n'ont pas une relation qui les lie.

On peut donc conclure que plus on s'approche du coin soumis directement au vent, plus les différences de mesures de pression en un temps donné entre les 4 capteurs seront importantes. Ces résultats mettent en avant une information utile pour la disposition des capteurs sur la surface du toit.

Une deuxième observation est faite en comparant les résultats des figures 6.13 et 6.14. Deux méthodes différentes sont utilisées pour calculer la résultante de corrélation.

Pour les résultantes de corrélation de la zone 1, les résultats pour le mode 1 sont supérieurs aux résultats sans décomposition. L'intégrale de corrélation aura donc un effet plus important lorsqu'on applique un dé-mixage des signaux. Il sera possible d'observer des résultantes de pression plus importantes en utilisant les résultats de l'approche avec un dé-mixage. L'approche avec dé-mixage permet de prendre mieux en compte les fortes sous-pressions et de constater un impact lorsqu'on le néglige.

Pour les résultantes de corrélation dans la zone 2, il est possible de faire les mêmes observations que dans la zone 1.

Pour la zone 3, les différences sont faibles entre les deux approches lorsque la surface résultante n'est pas directement dans le voisinage des zones 2 et 4. Si on est proche des zones 2 et 4, on remarque une forte réduction de l'intégrale de corrélation.

On comprend la différence de résultats obtenus par les deux méthodes en observant les résultats mathématiques obtenus dans l'équation 6.27 reprise ci-dessous :

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} Cov((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) = \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} \\ &\alpha_1 Cov_1((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)) \mu_{(x_i, y_j, mode:1)} \mu_{(x_k, y_l, mode:1)} + \\ &\alpha_2 Cov_2((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_4)) \mu_{(x_i, y_j, mode:1)} \mu_{(x_k, y_l, mode:2)} + \\ &\alpha_3 Cov_3((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_3 - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_3)) \mu_{(x_i, y_j, mode:2)} \mu_{(x_k, y_l, mode:1)} + \\ &\alpha_4 Cov_4((x_i, y_j)/(x_k, y_l)) + (\alpha_4 - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_4)) \mu_{(x_i, y_j, mode:2)} \mu_{(x_k, y_l, mode:2)} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Lorsqu'on n'applique pas de décomposition, on illustre la corrélation entre deux signaux à l'aide d'un seul paramètre. Or, on a pu observer plus d'un mode de corrélation dans les densités de probabilité conjointes. La corrélation sans décomposition peut être mise en relation avec les 4

corrélations obtenues avec une approche de dé-mixage. Si le mode générant les sous-pressions résultantes les plus fortes a un α faible, alors la corrélation sans dé-mixage n'illustrera pas ce comportement-là.

Les impacts d'une non-utilisation de l'approche de dé-mixage peuvent être observés sur les figures 6.13 et 6.14.

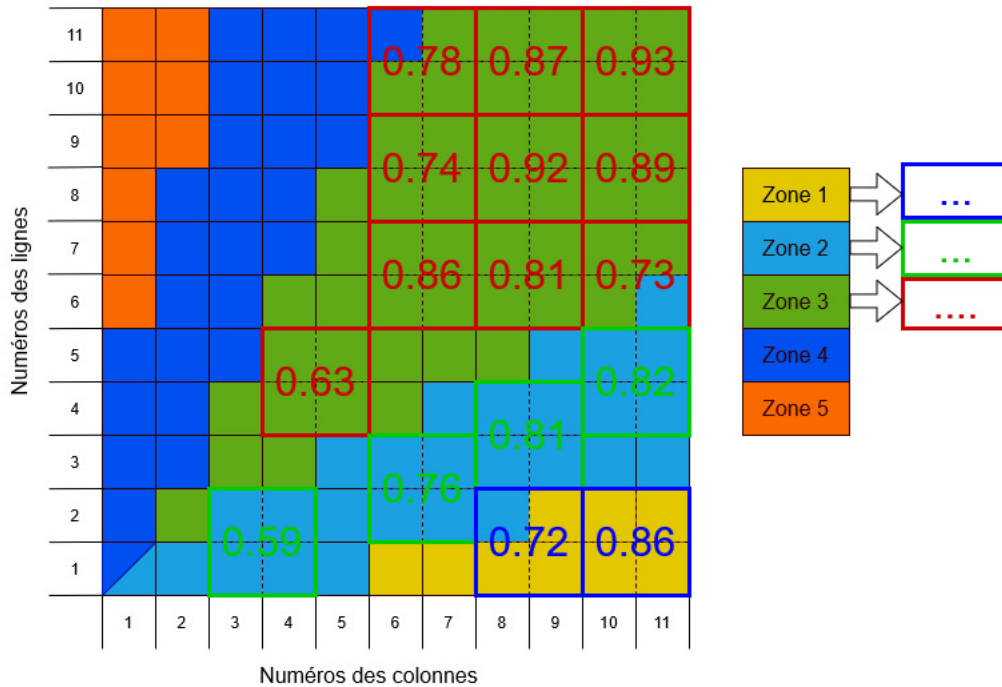


FIGURE 6.13 – Évolution des résultantes de corrélation pour le mode 1

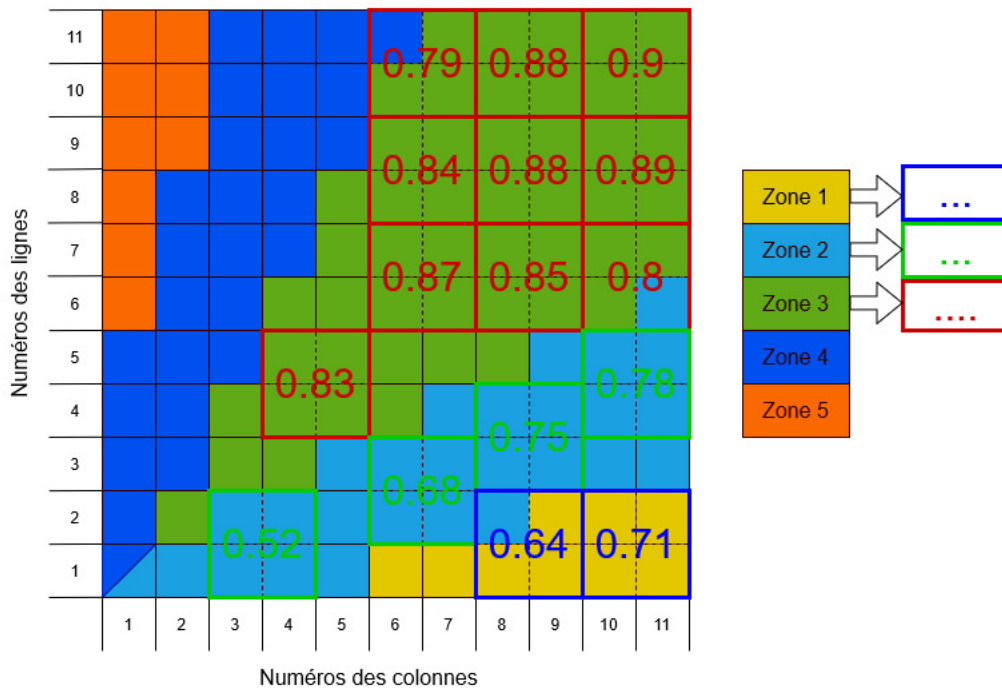


FIGURE 6.14 – Évolution des résultantes de corrélation sans décomposition

3.2 Analyse de l'intégrale de corrélation linéaire avec différentes orientations

Dans la section 3.1, on a pu constater que l'intégrale de corrélation augmente lorsqu'on s'écarte du coin soumis directement au vent. Les intégrales de corrélation évoluent de manière différente en fonction de leur situation dans les zones.

Le deuxième aspect qui va être étudié ici est celui du résultat des intégrales linéaires de corrélation autour d'un point. Cela va permettre de mettre en avant le fait qu'une fonction de corrélation n'est pas uniquement dépendante d'une distance r . Autre aspect qui va être étudié : le comportement de l'intégrale de corrélation lorsqu'on fait varier la taille de la ligne d'intégration autour d'un même capteur.

Cette étude a été localisée autour de 4 capteurs de pression situés dans des sections distinctes. Afin de réaliser une étude dans 4 directions, il a été nécessaire de prendre des capteurs qui ne sont pas localisés au niveau des extrémités. Les capteurs retenus sont les 29 et 85 (les capteurs 25 et 41 sont repris en annexe D).

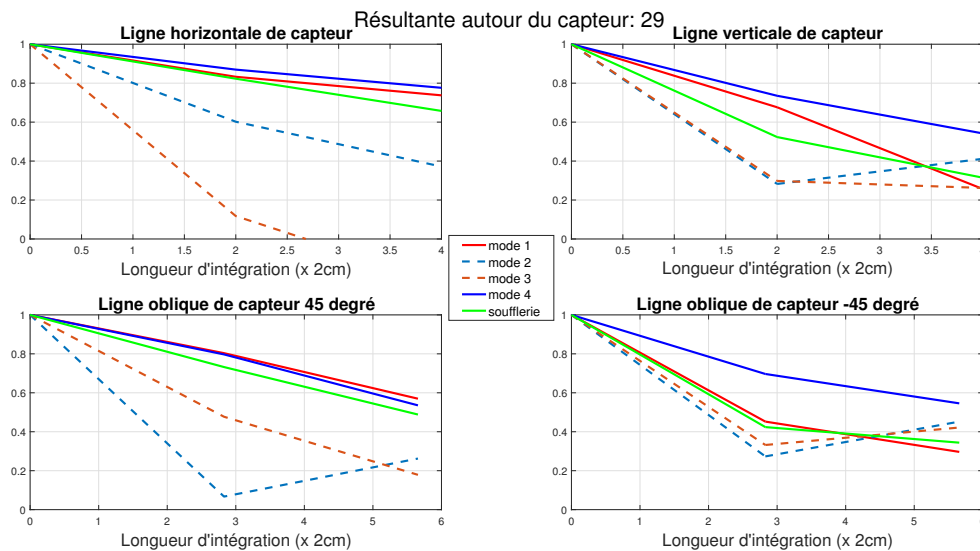


FIGURE 6.15 – Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 29

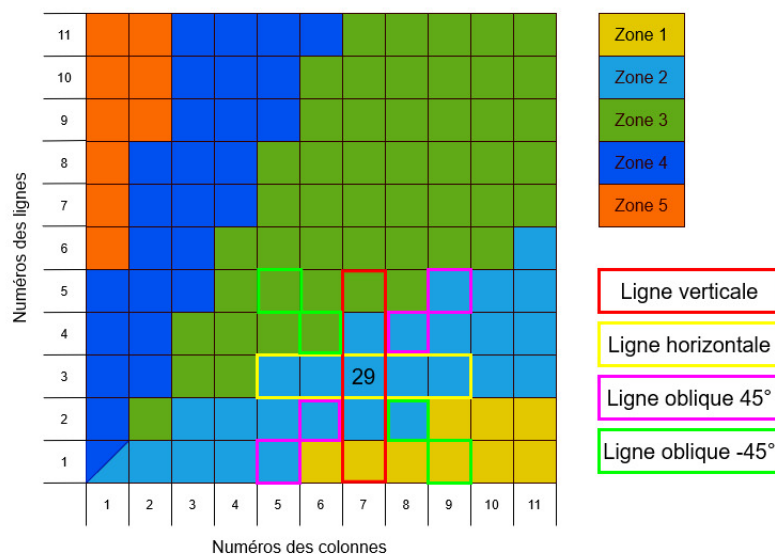


FIGURE 6.16 – Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 29

Sur la figure 6.15, on découvre que les intégrales de corrélation linéaires divergent pour les 4 modes de décomposition. Au vu de l'étude réalisée dans la section 2, il est surtout intéressant d'étudier les résultats du mode 1. On remarque que pour les 4 lignes d'intégration, les intégrales de corrélation diminuent lorsqu'on augmente la longueur. Ceci rejoint les développements donnés dans les articles Carassale (2012) et Blaise *et al.* (2014). Lorsqu'on prend une ligne d'intégration infinie, on va avoir une intégration de corrélation nulle. Ceci peut être expliqué par le fait qu'une petite modification locale n'impactera pas une grande surface d'intégration. Il aurait été intéressant de voir si la qualité de reconstruction est respectée avec des intégrations de corrélations en supprimant certains des capteurs pour voir si la qualité de reconstruction est conservée.

Pour l'approche TVL, l'intégrale de corrélation est imposée en fonction de la distance. Une hypothèse est donc émise selon laquelle l'intégrale de corrélation évolue de manière identique autour du capteur. En observant uniquement les intégrales de corrélation de mode 1 appartenant à la zone 2 de la figure 6.16, on voit que l'intégrale de corrélation ne décroît pas de la même manière pour les directions horizontale, verticale et oblique à 45° . La décroissance est plus faible pour l'intégrale à 45° que pour la direction horizontale ou encore la direction verticale.

Lorsqu'on sort de la zone 2 pour la ligne d'intégration verticale, l'intégrale de corrélation est fortement réduite. La ligne d'intégration à -45° donne des résultats semblables. On observe que la corrélation est fortement réduite dès le début, ce qui rejoint le fait que la ligne d'intégration prend directement des capteurs hors de la zone 2.

Enfin, il est possible d'observer que l'intégration de corrélation pour le mode 1 est supérieure à l'intégrale de corrélation donnée sans dé-mixage.

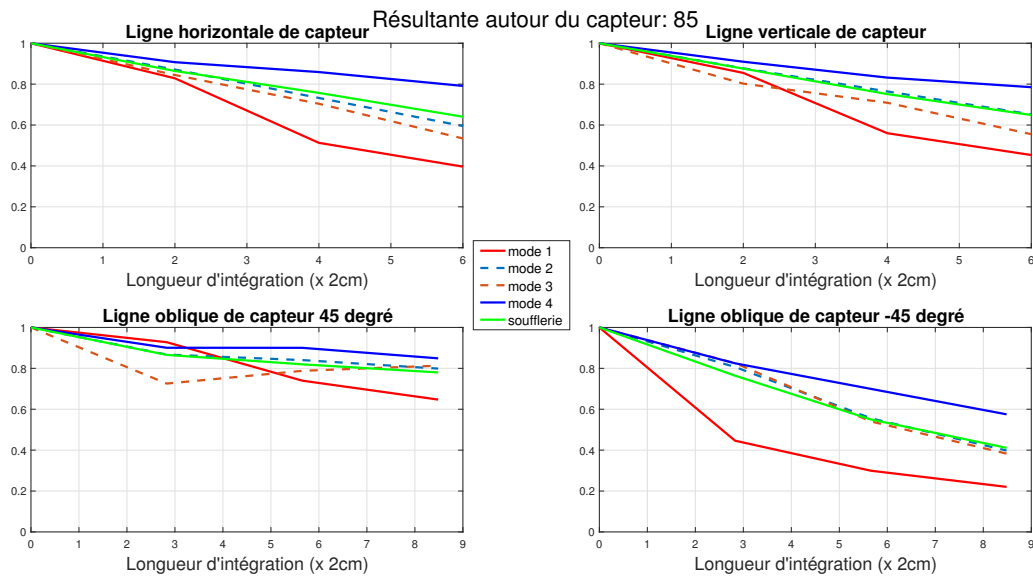


FIGURE 6.17 – Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 85

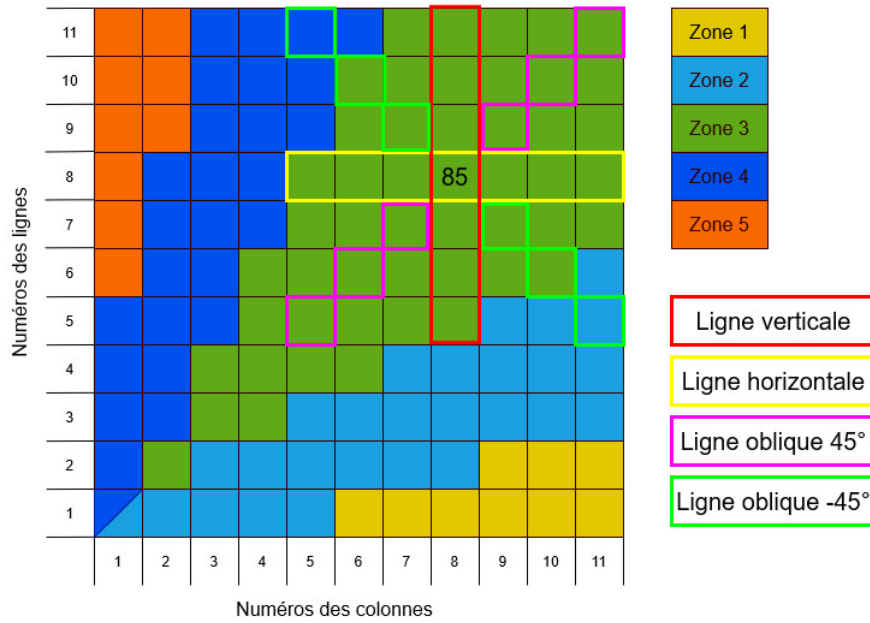


FIGURE 6.18 – Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 85

Les résultats obtenus autour du capteur 85 (voir figure 6.17) offrent des similitudes avec les résultats autour du capteur 29 : décroissance des intégrales de corrélation lorsque la surface augmente, représentation des intégrales de corrélation pour les 4 modes, résultats différents pour des directions différentes. Une différence importante se remarque entre les résultats autour du capteur 85 : l'intégrale de corrélation du mode 1 se situe en dessous de l'intégrale de corrélation sans dé-mixage.

Dans un second temps, on constate des comportements très semblables entre les lignes d'intégration verticale et horizontale. Cette forte ressemblance peut être expliquée par la symétrie des capteurs. Le capteur 85 se trouve sur la diagonale servant de droite de symétrie des résultats. Pour les lignes d'intégration, il est possible d'observer des comportements différents pour les lignes à 45° et -45° . Pour la droite d'intégration se situant à 45° , on distingue la plus petite réduction de corrélation de manière spatiale, tandis que pour la direction -45° , on observe la réduction de covariance la plus rapide lorsqu'on augmente la surface d'intégration.

3.3 Analyse de la corrélation spatiale avec un comportement polaire

Suite aux analyses d'intégration de corrélation réalisées sur les lignes, on a pu observer une décroissance de la corrélation variant selon les 4 directions. Un type de décroissance a cependant attiré mon attention. Ce sont les décroissances des capteurs se trouvant sur l'axe de symétrie. Il est possible d'observer une décroissance plus faible pour la direction de 45° que pour la direction verticale et horizontale, ou encore pour la direction de -45° .

De plus, avec l'analyse des résultantes de corrélation, lorsqu'on s'écarte du coin soumis au vent, les intégrales de corrélation augmentent.

En combinant ces deux observations, la question d'un comportement polaire a émergé. L'idée est que les intégrales de corrélation dépendraient de la distance des capteurs aux coins de toit soumis au vent et de la différence d'angle entre les droites liant les capteurs au coin soumis au vent. Si l'angle est nul, alors la corrélation est maximale. Si au contraire, l'angle augmente, la corrélation entre les capteurs diminue.

Pour le confirmer, 2 vérifications ont été réalisées. Une première vise l'évolution des intégrales de corrélation pour des capteurs n'ayant pas de différence d'angle. Plusieurs lignes d'intégration

ont été utilisées. La deuxième vérification a concerné l'ensemble des capteurs de la ligne de symétrie. Les lignes d'intégration de 3 capteurs qui ont été utilisées sont orientées selon les directions : 45° et -45° .

3.3.1 Première vérification

Pour la première vérification, on a observé des lignes d'intégration avec des inclinaisons différentes. La longueur des lignes d'intégration va être modifiée en ajoutant par étapes un capteur de plus en s'écartant du coin soumis directement au vent.

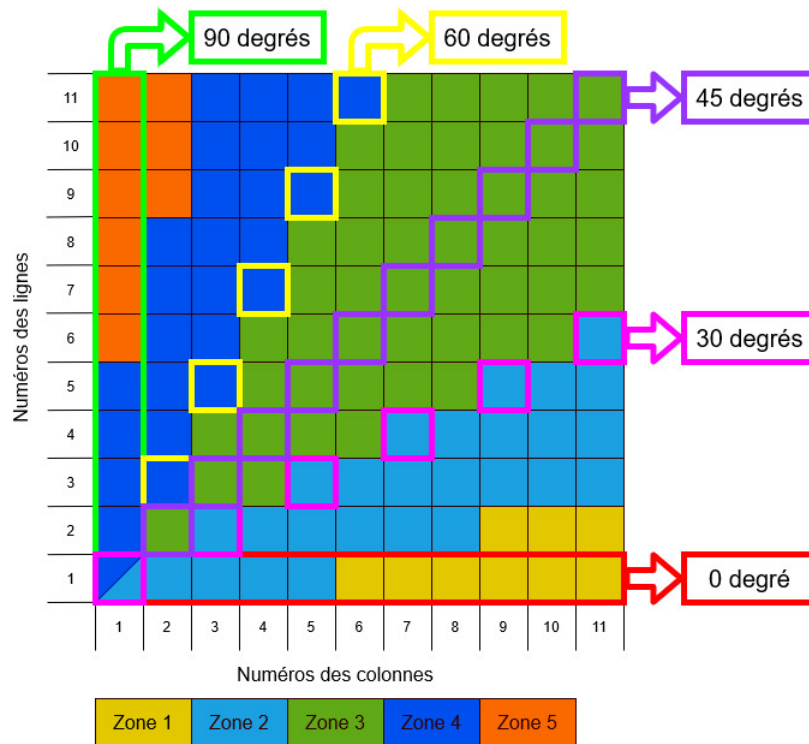


FIGURE 6.19 – Identification des lignes d'intégration et des capteurs composant les lignes

Il a été possible d'observer les résultats des figures 6.20, 6.21 et 6.22. Les figures pour les orientations de 60 et 90 degrés ne sont pas reprises dans le travail car elles ont moins d'importance au vu de la symétrie.

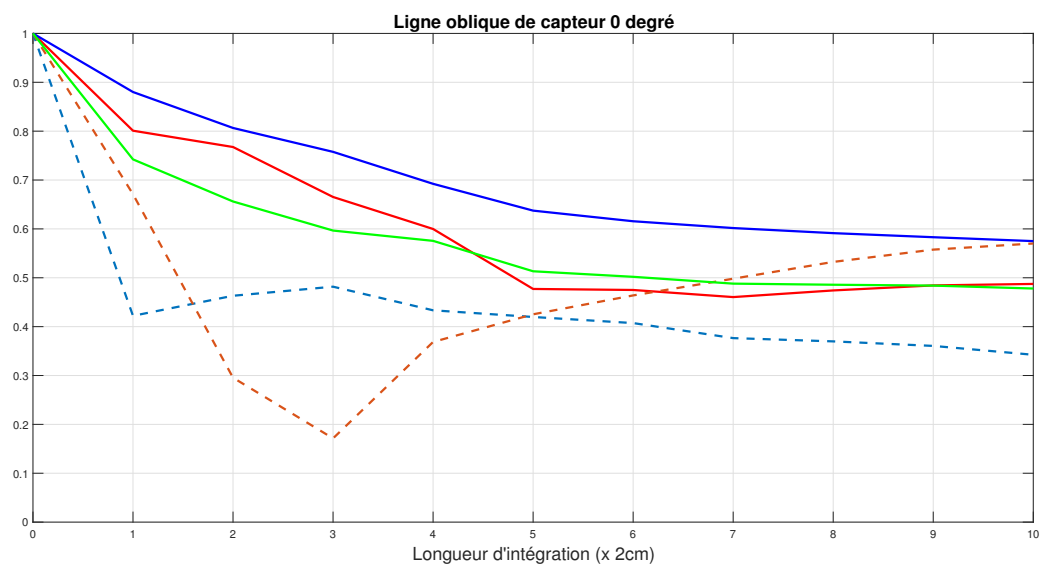


FIGURE 6.20 – Évolution des intégrales de corrélation en fonction de leurs longueurs

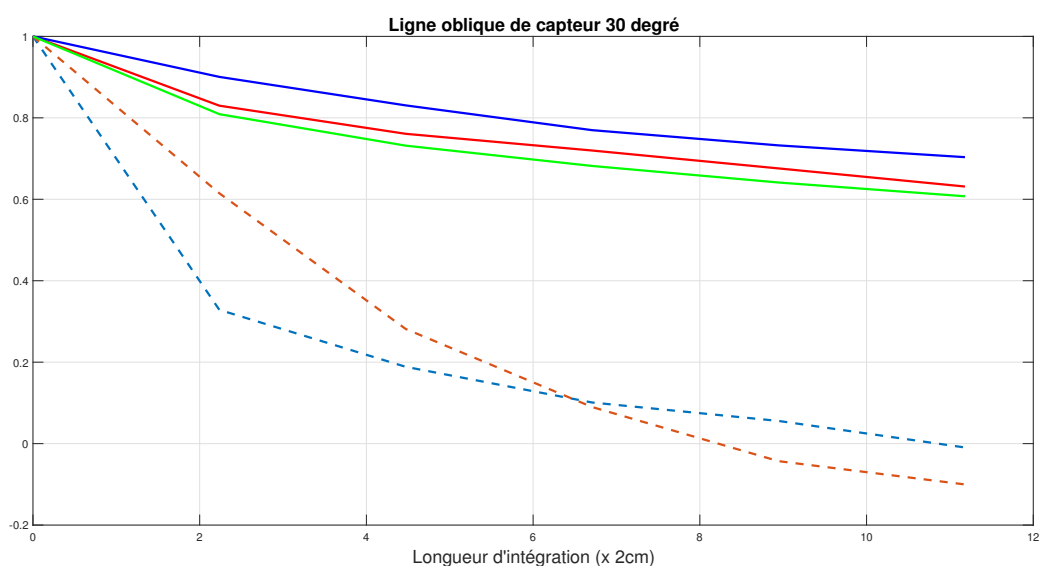


FIGURE 6.21 – Évolution des intégrales de corrélation en fonction de leurs longueurs

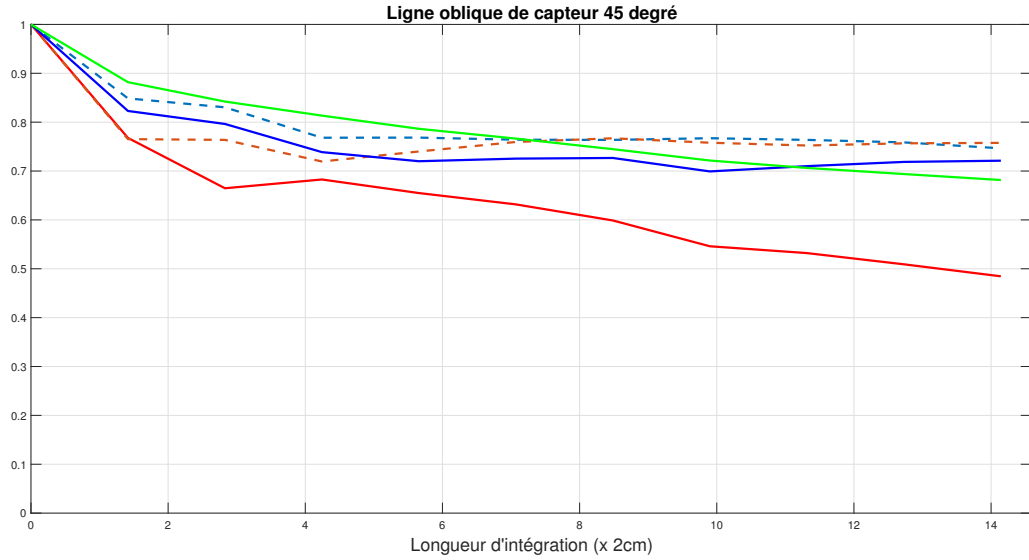


FIGURE 6.22 – Évolution des intégrales de corrélation en fonction de leurs longueurs

Il est possible d'observer des comportements décroissants des intégrales de corrélation pour les modes 1 et 4 en augmentant la longueur des lignes d'intégration pour les 3 orientations. Cependant, la décroissance n'est pas identique pour l'ensemble des orientations. Ce comportement va à l'encontre d'un modèle polaire. Néanmoins, les 3 droites d'intégration appartiennent à 3 zones différentes. On constate que les zones correspondent aux directions des lignes. Ceci renforce l'approche qui est étudiée avec 5 zones différentes.

Il aurait fallu étudier les zones séparément pour plusieurs orientations possibles pour confirmer ou rejeter cette hypothèse. Cependant, avec les mesures de [Blaise \(2016\)](#), il est impossible de le faire.

3.3.2 Seconde vérification

La seconde vérification s'opère pour les capteurs se situant sur la droite de symétrie à 45° . On va observer le comportement des lignes d'intégration présentées sur l'exemple de la figure 6.23.

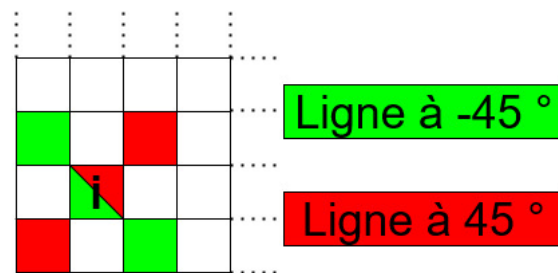


FIGURE 6.23 – Intégrales de corrélation pour le capteur i

Les résultats sont repris dans le tableau 6.1 avec les capteurs correspondant à la numérotation des cases de la figure 6.24. Les résultats sont donnés pour l'intégrale de corrélation du mode 1 et pour l'intégrale de corrélation sans dé-mixage pour l'orientation de 45° et de -45° .

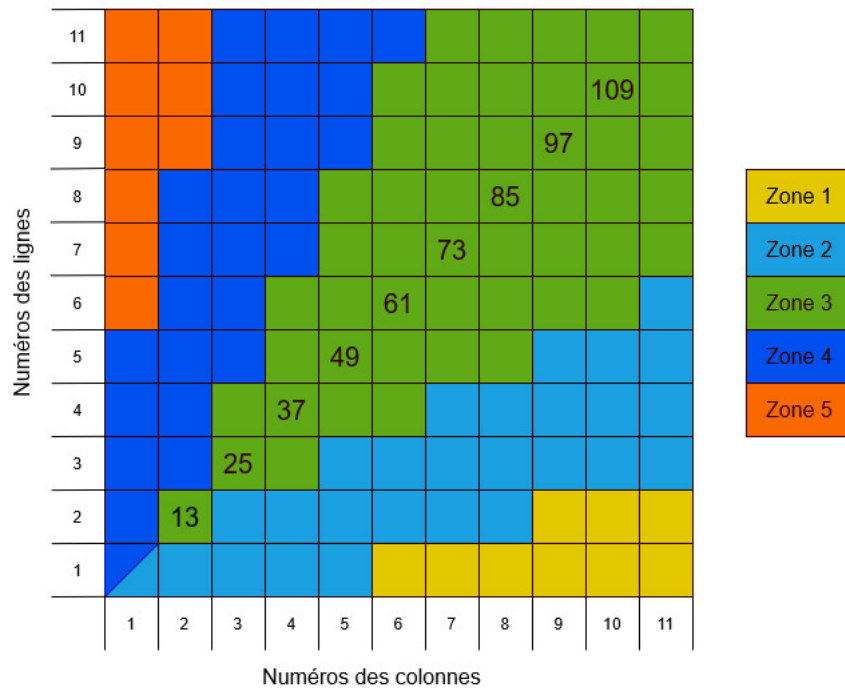


FIGURE 6.24 – Capteur utilisé pour vérifier le comportement polaire des intégrales de corrélation

Capteurs au centre	Mode 1 : 45°	Sans dé-mixage : 45°	Mode 1 : -45°	Sans dé-mixage : -45°
13	0.665	0.842	0.285	0.436
25	0.883	0.884	0.222	0.501
37	0.881	0.887	0.388	0.557
49	0.868	0.893	0.469	0.636
61	0.893	0.897	0.3082	0.7062
73	0.853	0.869	0.526	0.729
85	0.928	0.866	0.446	0.764
97	0.893	0.886	0.716	0.784
109	0.928	0.9	0.781	0.811

TABLE 6.1 – Évolution des intégrales de corrélation

Il est possible de voir avec les résultats du tableau 6.1 qu'on a deux comportements totalement différents selon la direction de 45° et de -45° . On observe, pour la direction de 45° , une forte corrélation du premier au dernier capteur. La corrélation va doucement augmenter en s'écartant du coin soumis directement au vent.

Pour la direction de -45° , on observe que le résultat de l'intégrale de corrélation commence avec des valeurs faibles et augmente rapidement lorsqu'on s'écarte du coin.

Ces deux constats montrent que l'idée d'un comportement polaire n'est pas absurde. On a une modification lente en s'écartant radialement du coin soumis directement au vent, tandis que pour la direction de -45° , la variation d'angle entre les 3 capteurs va diminuer lorsqu'on s'écarte du coin soumis directement au vent, ce qui rejoint le fait que les intégrales de corrélation augmentent plus on s'écarte du coin.

Il a été possible de voir que les augmentations ne croissent pas constamment lorsqu'on s'écarte du coin. Les analyses ont été réalisées en observant les tendances générales des intégrations.

Entre la méthode sans dé-mixage et le mode 1, des différences sont nettes. Elles sont maximales lorsqu'on est proche du coin. Pour le mode 1, on observe les intégrations de corrélation les plus

faibles dans les 2 directions. Plus on s'écarte du coin, plus les intégrales de corrélation vont converger vers les intégrales de corrélation de la méthode sans dé-mixage.

3.4 Analyse des résultantes de pression pour une surface de 4 capteurs

Afin d'étudier les résultantes de pression pour une intégrale de 4 capteurs, on a opté pour les mêmes surfaces d'intégration que dans la section 3.1.

Dans cette section, il a été possible de démontrer que le modèle statistique (reconstruction de la moyenne et de l'écart-type résultant avec les statistiques des différents modes de décomposition) développé dans la section 1 est applicable avec les signaux mélangés de la toiture. Dans un second temps, une méthode de reconstruction du coefficient de pression de dimensionnement pour chacun des modes croisés a été développée. La problématique avec l'approche actuellement utilisée est qu'on utilise les comportements moyens des statistiques des 121 signaux.

Pour calculer une résultante de pression sur une surface, 3 méthodes sont utilisées dans la pratique en soufflerie :

— **Méthode 1 (M_1) :**

La première méthode consiste à prendre la pression la plus importante pour les 4 capteurs de pression.

— **Méthode 2 (M_2) :**

La deuxième méthode consiste à prendre la pression moyenne maximale obtenue en réalisant la moyenne des coefficients de pression des 4 capteurs en chaque itération. Cette pression résultante sera obligatoirement inférieure à celle de la méthode 1.

— **Méthode 3 (M_3) :**

La troisième méthode consiste à utiliser une approche statistique (sans dé-mixage). On reconstitue le coefficient de pression de dimensionnement en utilisant la moyenne résultante (équation 6.3) et l'écart-type résultant (équation 6.9) comme présenté par l'équation :

$$cp_R = \mu_R + k_p \sigma_R \quad (6.31)$$

On émet comme première hypothèse que le paramètre k_p vaut 3.5.

On peut vérifier les développements mathématiques de la section 1 en comparant la résultante de la méthode 3 calculée avec ou sans dé-mixage. La méthode 3 calculée avec le dé-mixage utilise une autre formulation de la moyenne résultante (équation 6.20) et de l'écart-type résultant (équation 6.27) que la méthode sans dé-mixage. Les résultats de cette méthode sont repris dans le tableau 6.2 dans la colonne $M_{3,(1+2+3+4)}$.

De faibles différences apparaissent entre les résultats de la colonne M_3 et $M_{3,(1+2+3+4)}$. Il a été possible de démontrer que les erreurs ne viennent pas de la nouvelle formulation mais des imperfections des différentes statistiques croisées des capteurs. Pour le démontrer, des signaux ont été générés avec les propriétés statistiques des mélanges et on a mesuré les statistiques des résultantes avec ces mesures temporelles.

L'objectif final de cette méthode était d'observer le comportement des coefficients de pression de la surface résultante pour une décomposition des différents modes. Il a été nécessaire de déterminer la moyenne et l'écart-type pour chacun des modes. Les deux formulations des moments statistiques résultants ont été calculées comme dans les équations 6.32 et 6.33.

La formulation de la moyenne pour chacun des modes peut être écrite comme dans la formule 6.32. La formulation a dû faire apparaître le coefficient : $\frac{\alpha_{(x_i, y_j / x_k, y_l), mode_t}}{\alpha_{tot}}$.

Ce coefficient permet de contrôler la pondération des modes. Il est nécessaire de diviser par α_{tot} pour avoir la position de la moyenne du mode et non la participation à la moyenne résultante des 4 modes.

$$\mu_{R,mode_t} = \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \frac{1}{\alpha_{tot}} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} \alpha_{(x_i, y_j / x_k, y_l), mode_t} \mu_{((x_i, y_j) / (x_k, y_l), mode_t)} \quad (6.32)$$

avec $\alpha_{tot} = \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} \alpha_{(x_i, y_j / x_k, y_l), mode_t}$

Pour le mode t, il est nécessaire de prendre en compte les pondérations. Ces pondérations vont traduire l'effet de la réduction de l'influence d'un mode au vu de la pondération utilisée.

$$\sigma_{R,mode_t}^2 = \frac{1}{N_1^2 N_2^2} \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_1} \alpha_{(x_i, y_j / x_k, y_l), mode_t} Cov_{mode_t} ((x_i, y_j) / (x_k, y_l)) \quad (6.33)$$

Il est possible de calculer la résultante de pression pour le mode "t" avec la formule de l'équation 6.34.

$$cp_{R,t} = \mu_{R,t} + k_p \sigma_{R,t} \quad (6.34)$$

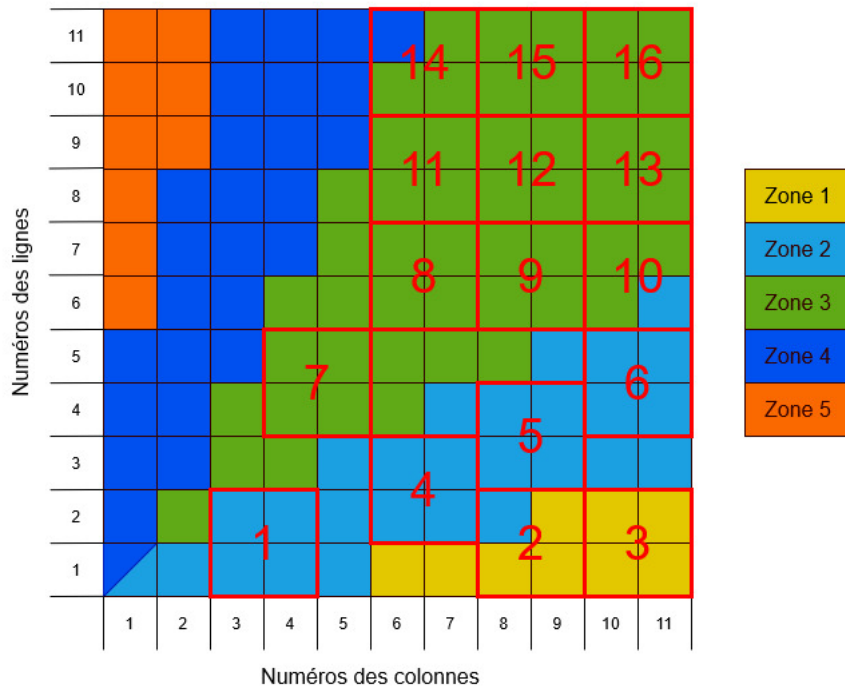


FIGURE 6.25 – Disposition des résultantes des coefficients de pression du tableau 6.2

Résultante	M_1	M_2	M_3	$M_{3,(1+2+3+4)}$	$M_{3,1}$	$M_{3,2}$	$M_{3,3}$	$M_{3,4}$
1	-9.746	-5.102	-2.577	-2.64	-2.915	-1.614	-1.252	-1.025
2	-7.338	-5.138	-3.095	-3.114	-2.738	-2.33	-1.819	-2.085
3	-6.592	-4.515	-2.716	-2.705	-2.378	-1.881	-1.702	-2.299
4	-6.668	-4.524	-2.328	-2.393	-2.381	-1.081	-1.09	-0.861
5	-5.982	-3.851	-1.772	-1.813	-1.78	-0.822	-0.902	-0.803
6	-4.761	-3.575	-1.431	-1.45	-1.425	-0.709	-0.769	-0.77
7	-3.364	-2.479	-0.718	-0.738	-0.572	-0.529	-0.549	-0.602
8	-2.6255	-2.140	-0.666	-0.669	-0.545	-0.481	-0.489	-0.572
9	-2.701	-2.061	-0.678	-0.6813	-0.514	-0.435	-0.434	-0.61
10	-3.215	-2.319	-0.748	-0.7564	-0.629	-0.415	-0.428	-0.649
11	-2.626	-2.119	-0.656	-0.662	-0.525	-0.464	-0.472	-0.574
12	-2.325	-1.579	-0.624	-0.63	-0.498	-0.478	-0.439	-0.542
13	-2.437	-2.051	-0.662	-0.669	-0.494	-0.398	-0.421	-0.598
14	-3.061	-2.152	-0.678	-0.685	-0.523	-0.464	-0.456	-0.6
15	-1.944	-1.368	-0.612	-0.615	-0.522	-0.462	-0.456	-0.506
16	-2.328	-1.681	-0.621	-0.627	-0.483	-0.46	-0.417	-0.548

TABLE 6.2 – Résultats des résultantes de pression pour différentes méthodes utilisées

Il est tout d'abord possible d'observer dans le tableau 6.2 que les 3 méthodes donnent des résultats forts différents ($M_1 > M_2 > M_3$). Ces résultats étaient attendus au vu des méthodes utilisées. Le choix d'une des trois méthodes va fortement influencer les résultats donnés aux bureaux d'étude. Les différences sont accentuées dans ce travail entre les méthodes 1 et 2, et la méthode 3 du fait de la durée importante des essais réalisés dans la soufflerie. Le paramètre 3.5 de l'équation 6.34 a été modifié en 5 pour la méthode 4 dans le tableau 6.3. Cette modification peut être justifiée avec la formule de [Kareem et Zhao \(1994\)](#) reprise à l'équation 1.10. Lorsque T (le temps de simulation) est important, la moyenne du facteur de pointe a des sous-pressions plus fortes.

Il est ensuite intéressant d'observer les coefficients de pression résultants obtenus pour les modes. On observe que pour les résultantes de 1-6 se situant dans les zones 1 et 2 de la figure 6.25, la résultante de pression du mode 1 est nettement supérieure aux 3 autres modes. Les résultantes du mode 1 sont proches des résultantes de pression de la somme des 4 modes.

Pour les résultantes de 7 à 16 se situant dans la section 3 de la figure 6.25, on observe que le mode le plus critique n'est plus le mode 1, mais le mode 4. Cette différence de comportement s'oppose à la simplification des composantes unilatérales prônée dans la section 2. Dans la section 2, la réduction des signaux unilatéraux de 2 à 1 composante a montré des problèmes pour la zone 3 en queue de distribution.

Au vu des résultats obtenus dans cette section, il semble que la réduction du nombre de composantes unilatérales soit applicable uniquement dans les zones 1, 2, 4 et 5.

Résultante	M_1	M_2	M_3	$M_{3,(1+2+3+4)}$	M_4	$M_{4,(1+2+3+4)}$
1	-9.746	-5.102	-2.577	-2.64	-3.261	-3.354
2	-7.338	-5.138	-3.095	-3.114	-3.767	-3.796
3	-6.592	-4.515	-2.716	-2.705	-3.289	-3.274
4	-6.668	-4.524	-2.328	-2.393	-2.98	-3.076
5	-5.982	-3.851	-1.772	-1.813	-2.274	-2.334
6	-4.761	-3.575	-1.431	-1.45	-1.828	-1.857
7	-3.364	-2.479	-0.718	-0.738	-0.848	-0.877
8	-2.6255	-2.140	-0.666	-0.669	-0.783	-0.788
9	-2.701	-2.061	-0.678	-0.6813	-0.807	-0.813
10	-3.215	-2.319	-0.748	-0.7564	-0.913	-0.926
11	-2.626	-2.119	-0.656	-0.662	-0.773	-0.782
12	-2.325	-1.579	-0.624	-0.63	-0.734	-0.742
13	-2.437	-2.051	-0.662	-0.669	-0.793	-0.803
14	-3.061	-2.152	-0.678	-0.685	-0.806	-0.817
15	-1.944	-1.368	-0.612	-0.615	-0.717	-0.721
16	-2.328	-1.681	-0.621	-0.627	-0.734	-0.742

TABLE 6.3 – Résultats des résultantes de pression pour différentes méthodes utilisées

Dans le tableau 6.3, deux colonnes ont été ajoutées pour la méthode 4. La méthode 4 est identique à la méthode 3, mais on a modifié le paramètre multipliant l'écart-type.

$$cp_R = \mu_R + 5\sigma_R \quad (6.35)$$

Cette modification du paramètre multipliant l'écart-type va permettre de mieux approcher les sous-pressions des méthodes 1 et 2 avec une approche statistique. Une différence importante est toujours observable. Elle provient du fait que l'approche statistique illustrée ici, utilise un coefficient 3.5 ou 5 venant du "*gust effect factor*" de l'article de [Kareem et Zhao \(1994\)](#). Ce coefficient permet de déterminer la valeur moyenne des sous-pressions extrêmes. On calcule donc avec les méthodes 3 et 4, le facteur de pointe moyen, tandis qu'avec les méthodes 1 et 2, on prend le facteur de pointe critique pour un temps de simulation de 13 heures. Il aurait fallu calculer les facteurs de pointe pour des périodes plus courtes et en faire la moyenne pour avoir des données comparables.

On ne peut utiliser la formulation entière de [Kareem et Zhao \(1994\)](#) reprise à l'équation 1.10, car il n'est pas possible de déterminer le skewness et le kurtosis pour les différents modes du mélange sur une surface résultante. Les coefficients qui ont été choisis pour les méthodes 3 et 4 sont basés sur l'annexe B de l'Eurocode ([NBN EN 1991-1-4 (2004)]). On y donne les valeurs du "*gust effect factor*" en fonction des paramètres vT et pour des signaux normaux. Ceci revient à calculer la formule 1.10 avec un h_3 et un h_4 nul.

On voit que les résultats sont fort semblables pour l'approche sans dé-mixage (M_4) et avec dé-mixage ($M_{4,(1+2+3+4)}$). Ceci rejoint les observations de la méthode 3.

Enfin, il aurait été intéressant d'augmenter le nombre de capteurs des surfaces d'intégration et d'observer leurs comportements respectifs. Car en théorie, selon le théorème central limite, plus on intégrera de capteurs sur une surface, plus la résultante du cp tendra vers une densité de probabilité gaussienne. Cela montre que la problématique de signaux fortement non gaussiens (un skewness et un kurtosis modifié) sera réduite plus le nombre de capteurs sera élevé. Cet aspect théorique n'a pas pu être traité dans ce travail. Dans cette section, on s'est limité à une étude des résultantes de pression pour 4 capteurs. Il serait tout de même intéressant d'étudier

cet aspect dans le futur.

4 Conclusion

Suite aux différentes études réalisées dans ce chapitre, il a été possible d'augmenter la compréhension des phénomènes se produisant sur le coin de la toiture. Les conclusions qui ont pu être tirées sont :

- Il est possible de réduire le nombre de composantes pour les signaux unilatéraux lorsqu'on réalise une étude dans les zones 1, 2, 4 et 5.
- Le comportement des corrélations au niveau du coin de la toiture ne se traduit pas comme l'approche TVL le présente. Un comportement du type polaire serait plus approprié. Une différenciation apparaît entre les différentes zones de la toiture.
- Le résultat d'intégrale de corrélation pour les études de 4 capteurs tend vers l'unité. Il est donc intéressant d'augmenter la concentration de capteurs au niveau du coin du toit.

Enfin, il a été possible de formuler la moyenne et l'écart-type résultant à l'aide des statistiques unilatérales et des statistiques croisées des mélanges. Cette nouvelle formulation a pu être validée à travers les simulations faites dans la section [3.4](#).

Chapitre 7

Conclusion

1 Conclusion

Comme expliqué dans l'introduction, il existe une problématique pour la reconstruction de coefficients de pression en soufflerie. Afin de reconstituer ces derniers, l'approche TVL est utilisée dans la majorité des souffleries, bien qu'on soit au courant des problèmes qui en découlent.

Dans la thèse de [Blaise \(2016\)](#), un set de données a été établi sur un coin de toit. En retraçant les densités de probabilité pour un signal et conjointes des mesures, on a découvert que les densités de probabilité semblaient mélangées. Il n'est cependant pas possible de trouver les propriétés statistiques de chacune des composantes du mélange à l'aide d'une formulation analytique. L'objectif de ce travail est d'identifier les différentes propriétés statistiques du mélange uniquement à l'aide des signaux mesurés en soufflerie.

Chaque signal étudié dans ce travail est supposé avoir une densité de probabilité mélangée par deux densités de probabilité normales transformées par une fonction cubique.

Dans un premier temps, il a été nécessaire d'identifier les paramètres statistiques permettant de représenter les densités de probabilité mélangée. Une approche générale a été utilisée pour identifier les divers moments statistiques. Un complément important a été réalisé pour l'étude des statistiques croisées et la tri-corrélation. L'approche des moments statistiques pourrait être facilement modifiée pour des mélanges avec plus de 2 composantes.

Une fois que l'ensemble des propriétés statistiques a été identifié, il a été possible de réaliser un algorithme permettant de déterminer les moments statistiques du mélange. Le choix a été fait de stratifier l'algorithme de résolution en commençant par établir les statistiques unilatérales pour les 121 capteurs. Dans un deuxième temps, on a utilisé les statistiques unilatérales afin de reconstituer les statistiques croisées pour une combinaison de 2 capteurs. Pour finir, l'algorithme a aussi été développé pour la tri-corrélation.

L'algorithme utilisé pour les différentes strates du code est un algorithme "Exp-Max". Une amélioration a été apportée à ce dernier, permettant de travailler avec des vecteurs de données plus importants.

Après avoir créé le code permettant de trouver les différents moments statistiques des densités de probabilité de mélange, il a fallu vérifier et critiquer les résultats obtenus. Cette partie est importante en vue d'identifier les possibilités du code créé. Des limitations conséquentes ont été identifiées au niveau des densités de probabilité pour un signal. On a pu prouver dans certains cas qu'il n'existe pas qu'une seule possibilité de décomposition permettant de bien approcher un signal mélangé.

Une fois l'algorithme développé et critiqué, on a pu s'intéresser aux résultats obtenus à l'aide des mesures en soufflerie. Les résultats importants ont pu être observés au niveau des corrélations permettant d'illustrer le lien entre deux signaux. À travers les histogrammes corrélés, on a été en mesure d'identifier 5 zones spatiales ayant des comportements différents. Pour ce faire, il a été nécessaire de choisir un certain nombre de points et d'observer les corrélations liant les 121 capteurs entre eux.

En travaillant de cette manière, il est apparu que les corrélations liant le capteur fixé et les autres capteurs de la même zone étaient fortes pour le mode 1. Les 5 zones ont été déterminées à l'aide de ce critère. Le mode 1 illustre la corrélation entre les densités de probabilité de mélange ayant l'écart-type le plus important.

Ensuite, une étude des résultantes de pression a été réalisée. À travers elle, les développements mathématiques ont été réalisés et ont mis en avant les différents moments statistiques qu'il serait nécessaire d'obtenir afin de déterminer la moyenne, l'écart-type, le skewness et le kurtosis de la densité de probabilité de la résultante de pression pour un ensemble de capteurs. Il a été démontré que l'ensemble des paramètres sont connus afin de trouver la moyenne et l'écart-type de la résultante de pression (avec et sans mélange des densités de probabilité). Pour le skewness et le kurtosis résultant, il manque certaines espérances qui n'ont pas été déterminées avec le modèle actuel. Une fois que les propriétés statistiques du mélange ont été déterminées de manière générale, une étude a été réalisée sur les résultantes de pression afin de déterminer s'il était possible de travailler uniquement avec une partie du signal (un des deux modes de la décomposition des signaux unilatéraux, le mode avec l'écart-type le plus important). On a remarqué que travailler de cette manière avait du sens dans les zones 1, 2, 4 et 5, si on utilisait des capteurs d'une même section.

Une fois la simplification réalisée, plusieurs études ont été menées par rapport aux intégrales de corrélation. Elles ont mis en évidence que les intégrales de corrélation augmentaient lorsqu'on s'écartait du coin soumis directement au vent. Ceci montre qu'il est intéressant d'augmenter la concentration de capteurs au niveau du coin afin d'avoir une qualité de reconstruction constante sur le coin de la toiture. Une seconde observation a mis en avant que le comportement des corrélations ne dépend pas de la distance par rapport au point. Un comportement de type polaire a été observé avec comme centre le coin de la toiture.

Enfin, une étude des résultantes de pression a permis de confirmer les formulations mathématiques pour la reconstruction de la moyenne et l'écart-type résultant. Cette étude a permis aussi de mettre en avant la problématique de réduction des composantes de mélange dans la zone 3 de la toiture.

En conclusion, ce travail permet de mieux approcher les résultats obtenus en soufflerie. Il est possible de reconstituer de manière fiable les histogrammes pour un signal et conjoints des différents capteurs de pression. Cette nouvelle approche a été élaborée sur une solide base mathématique et pourra être utilisée pour d'autres cas pratiques. Il a été possible de montrer sa fiabilité et ses limites.

La deuxième partie du travail se focalisait sur la recherche d'une méthode permettant d'améliorer l'approche TVL. Cette partie n'a pas pu être concrétisée. Cependant, on a pu mettre en avant des comportements observés sur la toiture pour les corrélations et les covariances. Ces observations pourraient être utilisées dans le futur afin d'améliorer la disposition des capteurs sur les modèles.

2 Recherches futures

2.1 Création d'un nouveau capteur

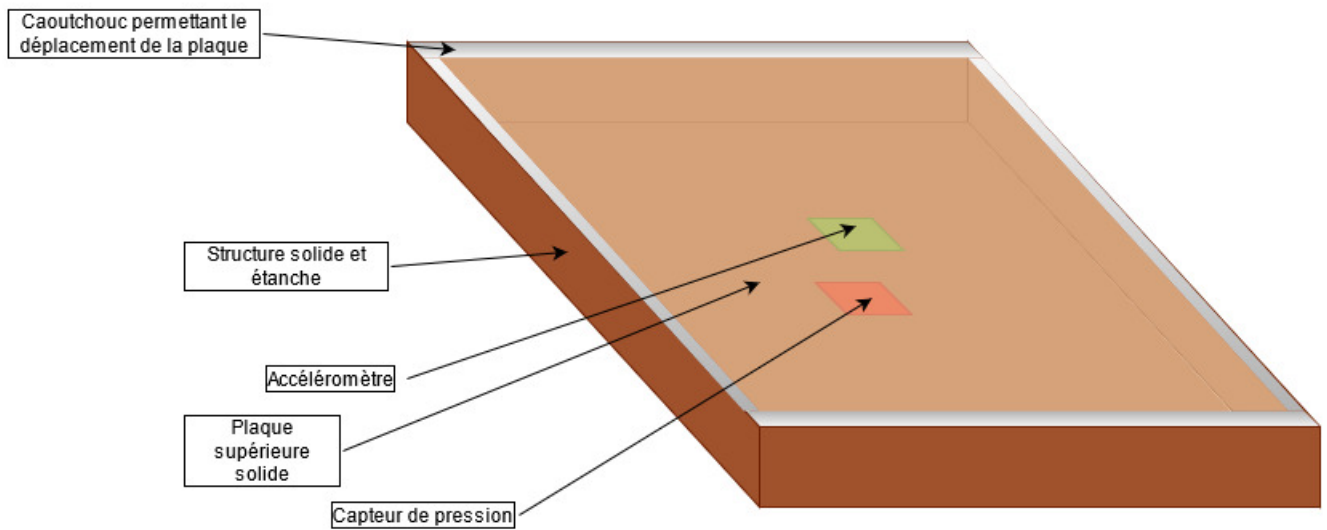


FIGURE 7.1 – Capteur de mesures de pression de surface imaginé

Suite à la conclusion mise en avant ci-dessus, une réflexion a été lancée sur l'ensemble de la méthodologie utilisée aujourd'hui en soufflerie. Elle avait déjà fait l'objet d'une partie de la thèse d'[Amerio \(2017\)](#). L'idée serait non plus de travailler avec des capteurs de pression locaux, mais d'utiliser des capteurs de pression permettant de mesurer la pression directement sur des surfaces.

Un nouveau modèle de capteur a été envisagé et est illustré à la figure 7.1. Il est composé d'un capteur de pression et d'un accéléromètre. Le principe serait de fonctionner comme le caisson d'un haut-parleur. La plaque supérieure du capteur mettrait sous pression sa chambre inférieure. Cette modification de pression pourrait être mesurée par le capteur de pression se situant dans la partie inférieure. Un accéléromètre serait ajouté sur la plaque supérieure. L'accéléromètre permettrait de donner des informations sur la distribution des pressions de manière spatiale sur la surface du capteur.

Il serait nécessaire de calibrer de manière optimale le capteur de pression. Les aspects importants du calibrage seront la masse de la plaque supérieure, la raideur des caoutchoucs et le volume d'air dans le capteur. La plaque supérieure du caisson et les caoutchoucs seraient dimensionnés de manière à avoir une fréquence de résonance nettement supérieure à celle du vent. De cette manière, il serait possible d'éviter que la plaque entre en résonance.

Un deuxième aspect important est l'effet du rayonnement acoustique. Un traitement fréquentiel devra être réalisé car une masse participante dans le piston va influencer la dynamique du capteur en fonction de la fréquence.

2.2 Restrictions des paramètres de l'algorithme

L'algorithme développé afin de trouver les statistiques unilatérales lors de ce travail est réalisé de manière indépendante pour les 121 capteurs. On pourrait envisager d'utiliser des relations entre les 121 capteurs afin de reconstruire les statistiques des densités de probabilité des capteurs. Une des relations qui pourrait être utilisée est la symétrie. Une hypothèse pourrait être émise selon laquelle 2 signaux symétriques ont une même densité de probabilité. Il sera ensuite possible d'étudier les statistiques croisées entre les deux capteurs symétriques. La densité de probabilité conjointe ne dépendra plus de 23 paramètres, mais de 14. Ceci peut être envisagé car on a pu constater que la corrélation entre deux capteurs symétriques n'est pas unitaire. Deux problèmes ont été identifiés avec cette nouvelle approche. Tout d'abord, il existe un problème sur la droite de symétrie, car il n'y a pas de capteur symétrique correspondant. De plus, pour des structures symétriques, cette approche ne pourra pas être appliquée.

Une seconde amélioration de l'algorithme serait de travailler par secteurs. L'idée serait de prendre N capteurs, et d'étudier la n -corrélation directement et d'imposer les paramètres statistiques à l'aide d'un algorithme unique. Les pertes d'informations seraient ainsi réduites. Le nombre de paramètres variables par algorithme pourrait rapidement et fortement augmenter avec cette méthode.

Bibliographie

- 1991-1-4, N. E. (2004). Eurocode 1 : Actions sur les structures - partie 1-4 : Actions générales - actions du vent.
- AMERIO, L. (2017). Experimental high resolution analysis of the pressure peaks on a building scale model façades.
- BANKS, D., MERONEY, R., SARKAR, P., ZHAO, Z. et WU, F. (2000). Flow visualization of conical vortices on flat roofs with simultaneous surface pressure measurement. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, 84:65–85.
- BEARMAN, P. W. (1971). An investigation of the forces on flat plates normal to a turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(1):177–198.
- BERGH, H. et TIJDEMAN, H. (1965). Theoretical and experimental results for the dynamic response of pressure measuring systems. *NLR-TR F.238*.
- BLAISE, N. (2016). Principal static wind loads within a rigorous methodology to the envelope reconstruction problem.
- BLAISE, N., ANDRIANNE, T. et DENOËL, V. (2017). Assessment of extreme value overestimations with equivalent static wind loads. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 168:123–133.
- BLAISE, N., CANOR, T. et DENOËL, V. (2014). Calculation of third order joint acceptance function for line-like structures.
- BOURCY, C. (2020). Travail de fin d'études : Analyse des pressions de vent sur les éléments de façade.
- CARASSALE, L. (2012). Scale effects on the buffeting response of wind-exited structures. *Mecanica dei Materiali e delle Strutture*, 3:41–48.
- COOK, N. J. (1985). The designer's guide to wind loading of building structures. part 1.
- DEMPSTER, A. P., LAIRD, N. M. et RUBIN, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 39.
- DENOËL, V. (2013). Elements de processus stochastiques.
- EVERITT, B. S. et HAND, D. J. (1981). Mixtures of normal distributions. *Finite Mixture Distributions*, pages 25–57.
- GREENWAY, M. E. (1979). An analytical approach to wind velocity gust factors. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 5:61–91.

- HOLMES, J. D. (1997). Equivalent time averaging in wind engineering. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 72.
- KAREEM, A. et ZHAO, J. (1994). Analysis of non-gaussian surge response of tension leg platforms under wind loads. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering-transactions of The Asme*, 116:137–144.
- LAWSON, T. V. (1976). The design of cladding. *Building and Environment*, 11:37–38.
- NEWBERRY, C., EATON, K. et MAYNE, J. (1973). Wind loading on tall buildings—further results from royex house.
- PENG, X., YANG, L., GAVANSKI, E., GURLEY, K. et PREVATT, D. (2014). A comparison of methods to estimate peak wind loads on buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 126.
- RAY, S. et LINDSAY, B. G. (2005). The topography of multivariate normal mixtures. *Annals of Statistics*, 33:2042–2065.
- RIGO, F. (2017). Unsteady pressure measurement around aerodynamic bodies : Development of a calibration apparatus and wind tunnel testing.
- RIGO, F., ANDRIANNE, T. et DENOËL, V. (2020). A de-mixing approach for the management of large negative peaks in wind tunnel data. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 206.
- ROSE, C. et SMITH, M. D. (2002). mathstatica : Mathematical statistics with mathematica. In HÄRDLE, W. et RÖNZ, B., éditeurs : *Compstat*, pages 437–442, Heidelberg. Physica-Verlag HD.
- XIE, W. et HUANG, P. (2021). Extreme estimation of wind pressure with unimodal and bimodal probability density function characteristics : A maximum entropy model based on fractional moments. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 214:104663.
- ZUCKER, I. J. (2008). 92.34 the cubic equation – a new look at the irreducible case. *The Mathematical Gazette*, 92(524):264–268.

Annexe A

Relation de bimodalité

Dans cette section, les relations reliant les moments du signal bimodal et les moments des signaux unimodaux (équations du système 2.8) vont être prouvées. Pour y arriver, on va devoir utiliser la définition des moments statistiques centrés :

$$E \left[(x_i - \mu_{x_i})^i \right] = \int (x - \mu)^i p(x) dx \quad (\text{A.1})$$

Et la relation de bimodalité de l'équation 2.7 :

$$p(x) = \pi \times p_1(x) + (1 - \pi) \times p_2(x) \quad (\text{A.2})$$

1 Moment d'ordre 1

La moyenne du signal bimodal est donnée avec la formule :

$$\mu = \int x p(x) dx \quad (\text{A.3})$$

En remplaçant $f(x)$ par l'équation A.2, on trouve :

$$\mu = \int x (\pi \times p_1(x) + (1 - \pi) \times p_2(x)) dx \quad (\text{A.4})$$

$$\mu = \int \pi (x \times p_1(x)) + (1 - \pi) (x \times p_2(x)) dx \quad (\text{A.5})$$

On peut transformer : $\int (x \times p_i(x)) dx = \mu_i$. On trouve :

$$\mu = \pi \mu_1 + (1 - \pi) \mu_2 \quad (\text{A.6})$$

2 Moment d'ordre 2

La variance du signal bimodal est donnée avec la formule :

$$\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (\text{A.7})$$

En développant tous les termes et en remplaçant $p(x)$ avec l'équation A.2, on trouve

$$\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma^2 = \int (x^2 + \mu^2 - 2\mu x)(\pi \times p_1(x) + (1 - \pi) \times p_2(x))dx \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma^2 = \int \pi(x^2 p_1(x) + \mu^2 p_1(x) - 2\mu x p_1(x)) + (1 - \pi)(x^2 p_2(x) + \mu^2 p_2(x) - 2\mu x p_2(x))dx \quad (\text{A.10})$$

On va injecter les termes afin de retrouver σ_1^2 et σ_2^2 :

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \int \pi(x^2 p_1(x) + (-2x\mu_1 p_1(x) + 2x\mu_1 p_1(x)) + (\mu_1^2 p_1(x) - \mu_1^2 p_1(x)) + \mu^2 p_1(x) - 2\mu x p_1(x)) \\ & + (1 - \pi)(x^2 p_2(x) + (-2x\mu_2 p_2(x) + 2x\mu_2 p_2(x)) + (\mu_2^2 p_2(x) - \mu_2^2 p_2(x)) + \mu^2 p_2(x) - 2\mu x p_2(x))dx \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

On trouve donc, en remplaçant ceci : $\sigma_i^2 = \int (x^2 p_i(x) + \mu_i^2 p_i(x) - 2\mu_i x p_i(x))dx$ dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \int \pi(\sigma_1^2 + 2x\mu_1 p_1(x) - \mu_1^2 p_1(x) + \mu^2 p_1(x) - 2\mu x p_1(x)) \\ & + (1 - \pi)(\sigma_2^2 + 2x\mu_2 p_2(x) - \mu_2^2 p_2(x) + \mu^2 p_2(x) - 2\mu x p_2(x))dx \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma^2 = \int \pi(\sigma_1^2 + 2x p_1(x)(\mu_1 - \mu) + (\mu^2 - \mu_1^2)p_1(x)) + (1 - \pi)(\sigma_2^2 + 2x p_2(x)(\mu_2 - \mu) + (\mu^2 - \mu_2^2)p_2(x))dx \quad (\text{A.13})$$

En développant : $\mu_i = x p_i(x)$ et $\int (cst)dx = 1$. On peut finir le développement :

$$\sigma^2 = \pi(\sigma_1^2 + 2\mu_1^2 - 2\mu_1\mu + (\mu^2 - \mu_1^2)) + (1 - \pi)(\sigma_2^2 + 2\mu_2^2 - 2\mu_2\mu + (\mu^2 - \mu_2^2)) \quad (\text{A.14})$$

On trouve :

$$\sigma^2 = \pi(\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu)^2) + (1 - \pi)(\sigma_2^2 + (\mu_2 - \mu)^2) \quad (\text{A.15})$$

3 Moment d'ordre 3

Le skewness est donné par la formule :

$$\gamma_3 = \frac{\int (x - \mu)^3 p(x)dx}{\sigma^3} \quad (\text{A.16})$$

En développant le terme au cube et en introduisant l'équation 2.7, on trouve :

$$\gamma_3 \sigma^3 = \int (x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3)(\pi p_1(x) + (1 - \pi)p_2(x))dx \quad (\text{A.17})$$

$$\gamma_3 \sigma^3 = \int (\pi p_1(x))(x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3) + ((1 - \pi)p_2(x))(x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3)dx \quad (\text{A.18})$$

On injecte les termes afin de calculer $\gamma_{3,1}$ et $\gamma_{3,2}$.

$$\begin{aligned} \gamma_3 \sigma^3 = & \int (\pi p_1(x))(x^3 + (3x^2\mu_1 - 3x^2\mu_1) - (3x\mu_1^2 - 3x\mu_1^2) + (\mu_1^3 - \mu_1^3) - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3) \\ & + ((1 - \pi)p_2(x))(x^3 + (3x^2\mu_2 - 3x^2\mu_2) - (3x\mu_2^2 - 3x\mu_2^2) + (\mu_2^3 - \mu_2^3) - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3)dx \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

On peut remplacer certains termes pour trouver $\gamma_{3,1}\sigma_1^3 = \int (x^3 - 3x^2\mu_1 + 3x\mu_1^2 - \mu_1^3)p_1(x)dx$ et $\gamma_{3,2}\sigma_2^3 = \int (x^3 - 3x^2\mu_2 + 3x\mu_2^2 - \mu_2^3)p_2(x)dx$:

$$\begin{aligned} \gamma_3 \sigma^3 = & \int (\pi p_1(x))(\gamma_{3,1}\sigma_1^3 + 3x^2\mu_1 - 3x\mu_1^2 + \mu_1^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3) \\ & + ((1 - \pi)p_2(x))(\gamma_{3,2}\sigma_2^3 + 3x^2\mu_2 - 3x\mu_2^2 + \mu_2^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3)dx \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 \sigma^3 = & \int (\pi p_1(x))(\gamma_{3,1}\sigma_1^3 + 3x^2(\mu_1 - \mu) + 3x(\mu^2 - \mu_1^2) + (\mu_1^3 - \mu^3)) \\ & + ((1 - \pi)p_2(x))(\gamma_{3,2}\sigma_2^3 + 3x^2(\mu_2 - \mu) + 3x(\mu^2 - \mu_2^2) + (\mu_2^3 - \mu^3))dx \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

On va ensuite introduire les termes afin de trouver les écart-types ($\sigma_i^2 = \int (x^2 p_i(x) + \mu_i^2 p_i(x) - 2\mu_i x p_i(x)) dx$) et supprimer les termes avec un x^2 :

$$\begin{aligned} \gamma_3 \sigma^3 = & \int (\pi p_1(x)) (\gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2(\mu_1 - \mu) + 3(\mu_1 - \mu)(2x\mu_1 - \mu_1^2) + 3x(\mu^2 - \mu_1^2) + (\mu_1^3 - \mu^3)) \\ & + ((1 - \pi) p_2(x)) (\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2(\mu_2 - \mu) + 3(\mu_2 - \mu)(2x\mu_2 - \mu_2^2) + 3x(\mu^2 - \mu_2^2) + (\mu_2^3 - \mu^3)) dx \end{aligned} \quad (A.22)$$

Il n'y a plus de terme dépendant de x ou ne dépendant pas de x . Or $\mu_i = \int x p_i(x) dx$ et $\int (cst) dx = 1$. On trouve donc :

$$\begin{aligned} \gamma_3 \sigma^3 = & (\pi) (\gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2(\mu_1 - \mu) + 3(\mu_1 - \mu)(2\mu_1^2 - \mu_1^2) + 3\mu_1(\mu^2 - \mu_1^2) + (\mu_1^3 - \mu^3)) \\ & + ((1 - \pi)) (\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2(\mu_2 - \mu) + 3(\mu_2 - \mu)(2\mu_2^2 - \mu_2^2) + 3\mu_2(\mu^2 - \mu_2^2) + (\mu_2^3 - \mu^3)) \end{aligned} \quad (A.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 \sigma^3 = & (\pi) (\gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2(\mu_1 - \mu) + 3(\mu_1 - \mu)(\mu_1^2) + 3\mu_1(\mu^2 - \mu_1^2) + (\mu_1^3 - \mu^3)) \\ & + ((1 - \pi)) (\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2(\mu_2 - \mu) + 3(\mu_2 - \mu)(2\mu_2^2 - \mu_2^2) + 3\mu_2(\mu^2 - \mu_2^2) + (\mu_2^3 - \mu^3)) \end{aligned} \quad (A.24)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 \sigma^3 = & (\pi) (\gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2(\mu_1 - \mu) + (-3\mu\mu_1^2 + 3\mu_1\mu^2 + \mu_1^3 - \mu^3)) \\ & + ((1 - \pi)) (\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2(\mu_2 - \mu) + (-3\mu\mu_2^2 + 3\mu_2\mu^2 + \mu_2^3 - \mu^3)) \end{aligned} \quad (A.25)$$

Ce qui donne :

$$\gamma_3 \sigma^3 = (\pi) (\gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 3\sigma_1^2(\mu_1 - \mu) + (\mu_1 - \mu)^3) + ((1 - \pi)) (\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2(\mu_2 - \mu) + (\mu_2 - \mu)^3) \quad (A.26)$$

4 Moment d'ordre 4

Le kurtosis est donné par la formule :

$$\gamma_4 = \frac{\int (x - \mu)^4 p(x) dx}{\sigma^4} \quad (A.27)$$

En développant la parenthèse exposée en 4 et en introduisant l'équation 2.7, on trouve l'équation :

$$\gamma_4 \sigma^4 = \int (x^4 - 4\mu x^3 + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4) (\pi p_1(x) + (1 - \pi) p_2(x)) dx \quad (A.28)$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 = & \int (x^4 - 4\mu x^3 + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4) \pi p_1(x) dx \\ & + \int (x^4 - 4\mu x^3 + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (A.29)$$

On peut supprimer le terme x^4 , introduisant le kurtosis pour les deux signaux, en utilisant la formule ci-dessous :

$$\gamma_{4,i} \sigma_i^4 = \int (x - \mu_i)^4 p_i(x) dx = \int (x^4 - 4\mu_i x^3 + 6x^2\mu_i^2 - 4x\mu_i^3 + \mu_i^4) p_i(x) dx \quad (A.30)$$

On pourra donc écrire (avec l'intégrale $\int p_i(x) dx = 1$) :

$$\int x^4 p_i(x) dx = \int (\gamma_{4,i} \sigma_i^4 + 4\mu_i x^3 - 6x^2\mu_i^2 + 4x\mu_i^3 - \mu_i^4) dx \quad (A.31)$$

En injectant l'équation A.31 dans l'équation A.29, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 = & \int (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu)x^3 - 6x^2(\mu_1^2 - \mu^2) + 4x(\mu_1^3 - \mu^3) - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi p_1(x) dx \\ & + \int (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)x^3 - 6x^2(\mu_2^2 - \mu^2) + 4x(\mu_2^3 - \mu^3) - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (A.32)$$

On peut supprimer le terme x^3 , introduisant le skewness pour les deux signaux, en utilisant la formule ci-dessous :

$$\gamma_{3,i} \sigma_i^3 = \int (x^3 - 3x^2\mu_i + 3x\mu_i^2 - \mu_i^3) p_i(x) dx \quad (A.33)$$

Ce qui donne :

$$\int x^3 p_i(x) dx = \int (\gamma_{3,i} \sigma_i^3 + 3x^2 \mu_i - 3x \mu_i^2 + \mu_i^3) p_i(x) dx \quad (\text{A.34})$$

En injectant l'équation A.34 dans l'équation A.32, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= \int (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu)(\gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 3x^2 \mu_1 - 3x \mu_1^2 + \mu_1^3) - 6x^2(\mu_1^2 - \mu^2) + 4x(\mu_1^3 - \mu^3) \\ &\quad - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi p_1(x) dx \\ &\quad + \int (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 3x^2 \mu_2 - 3x \mu_2^2 + \mu_2^3) - 6x^2(\mu_2^2 - \mu^2) + 4x(\mu_2^3 - \mu^3) \\ &\quad - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= \int (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu) \gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 4(\mu_1 - \mu) 3x^2 \mu_1 - 12(\mu_1 - \mu) x \mu_1^2 + 4(\mu_1 - \mu) \mu_1^3 - 6x^2(\mu_1^2 - \mu^2) \\ &\quad + 4x(\mu_1^3 - \mu^3) - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi p_1(x) dx \\ &\quad + \int (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 3x^2 \mu_2 - 3x \mu_2^2 + \mu_2^3) - 6x^2(\mu_2^2 - \mu^2) \\ &\quad + 4x(\mu_2^3 - \mu^3) - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

On développe les termes avec un x^2 , et on trouve :

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= \int (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu) \gamma_{3,1} \sigma_1^3 + (12\mu_1^2 x^2 - 12\mu_1 \mu x^2 - 6x^2 \mu_1^2 + 6x^2 \mu^2) \\ &\quad - 12(\mu_1 - \mu) x \mu_1^2 + 4(\mu_1 - \mu) \mu_1^3 + 4x(\mu_1^3 - \mu^3) - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi p_1(x) dx \\ &\quad + \int (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + (12\mu_2^2 x^2 - 12\mu_2 \mu x^2 - 6x^2 \mu_2^2 + 6x^2 \mu^2) \\ &\quad - 12(\mu_2 - \mu) x \mu_2^2 + 4(\mu_2 - \mu) \mu_2^3 + 4x(\mu_2^3 - \mu^3) - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= \int (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu) \gamma_{3,1} \sigma_1^3 + (6\mu_1^2 x^2 - 12\mu_1 \mu x^2 + 6x^2 \mu^2) \\ &\quad - 12(\mu_1 - \mu) x \mu_1^2 + 4(\mu_1 - \mu) \mu_1^3 + 4x(\mu_1^3 - \mu^3) - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi p_1(x) dx \\ &\quad + \int (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + (6\mu_2^2 x^2 - 12\mu_2 \mu x^2 + 6x^2 \mu^2) \\ &\quad - 12(\mu_2 - \mu) x \mu_2^2 + 4(\mu_2 - \mu) \mu_2^3 + 4x(\mu_2^3 - \mu^3) - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= \int (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu) \gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 6(\mu_1 - \mu)^2 x^2 \\ &\quad - 12(\mu_1 - \mu) x \mu_1^2 + 4(\mu_1 - \mu) \mu_1^3 + 4x(\mu_1^3 - \mu^3) - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi p_1(x) dx \\ &\quad + \int (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 6(\mu_2 - \mu)^2 x^2 \\ &\quad - 12(\mu_2 - \mu) x \mu_2^2 + 4(\mu_2 - \mu) \mu_2^3 + 4x(\mu_2^3 - \mu^3) - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

On remplace ensuite les termes en x^2 par l'équation $\sigma_i^2 = \int (x^2 + \mu_i^2 - 2\mu_i x) p_i(x) dx$, qui, une fois développée, donne $\int x^2 dx = \int (\sigma_i^2 - \mu_i^2 + 2\mu_i x) p_i(x) dx$.

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= \int (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu) \gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 6(\mu_1 - \mu)^2 (\sigma_1^2 - \mu_1^2 + 2\mu_1 x) \\ &\quad - 12(\mu_1 - \mu) x \mu_1^2 + 4(\mu_1 - \mu) \mu_1^3 + 4x(\mu_1^3 - \mu^3) - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi p_1(x) dx \\ &\quad + \int (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 6(\mu_2 - \mu)^2 (\sigma_2^2 - \mu_2^2 + 2\mu_2 x) \\ &\quad - 12(\mu_2 - \mu) x \mu_2^2 + 4(\mu_2 - \mu) \mu_2^3 + 4x(\mu_2^3 - \mu^3) - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) p_2(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Il n'y a plus de terme dépendant de x ou ne dépendant pas de x . Or, $\mu_i = \int x p_i(x) dx$ et $\int (cst) dx = 1$. On trouve donc :

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu) \gamma_{3,1} \sigma_1^3 + 6(\mu_1 - \mu)^2 \sigma_1^2 + 6(\mu_1 - \mu)^2 \mu_1^2 \\ &\quad - 12(\mu_1 - \mu) \mu_1^3 + 4(\mu_1 - \mu) \mu_1^3 + 4\mu_1(\mu_1^3 - \mu^3) - (\mu_1^4 - \mu^4)) \pi \\ &\quad + (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 6(\mu_2 - \mu)^2 \sigma_2^2 + 6(\mu_2 - \mu)^2 \mu_2^2 \\ &\quad - 12(\mu_2 - \mu) \mu_2^3 + 4(\mu_2 - \mu) \mu_2^3 + 4\mu_2(\mu_2^3 - \mu^3) - (\mu_2^4 - \mu^4)) (1 - \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

On obtient en développant toutes les parenthèses puis, en utilisant $(\mu_i - \mu)^4 = (\mu_i^4 - 4\mu_i \mu^3 + 6\mu_i^2 \mu^2 - 4\mu_i \mu^3 + \mu^4)$:

$$\begin{aligned} \gamma_4 \sigma^4 &= (\gamma_{4,1} \sigma_1^4 + 4(\mu_1 - \mu) \gamma_{3,1} \sigma_1^3 + (\mu_1 - \mu)^4) \pi \\ &\quad + (\gamma_{4,2} \sigma_2^4 + 4(\mu_2 - \mu)(\gamma_{3,2} \sigma_2^3 + 6(\mu_2 - \mu)^2 \sigma_2^2 + (\mu_2 - \mu)^4)) (1 - \pi) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Annexe B

Borne limitant les valeurs des moyennes des signaux unimodaux : μ_i

Il est possible de trouver le système d'équation 3.9 en développant les deux premières équations du système 2.8 et en introduisant comme borne minimale un écart-type de 0. Le développement démarre de l'équation :

$$\sigma^2 = \pi(\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu)^2) + (1 - \pi)(\sigma_2^2 + (\mu_2 - \mu)^2) \quad (\text{B.1})$$

On se met pour la première équation dans le cas critique où $\sigma_2 = 0$ et on développe les équations selon σ_1 . Dans la deuxième équation, on utilise le cas critique où $\sigma_1 = 0$ et on développe les équations selon σ_2 :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{(\sigma^2 - (1-\pi)(\mu_2 - \mu)^2)}{\pi} - (\mu_1 - \mu)^2 \\ \sigma_2^2 &= \frac{(\sigma^2 - \pi(\mu_1 - \mu)^2)}{(1-\pi)} - (\mu_2 - \mu)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ensuite, les termes $(\mu_2 - \mu)$ et $(\mu_1 - \mu)$ vont être développés, en utilisant la première équation du système 2.8

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{\mu - \pi\mu_1}{1-\pi} \implies (\mu_2 - \mu) = \frac{\mu - \pi\mu_1 - \mu + \pi\mu}{1-\pi} = \frac{\pi(\mu - \mu_1)}{1-\pi} \\ \mu_1 &= \frac{\mu - (1-\pi)\mu_2}{\pi} \implies (\mu_1 - \mu) = \frac{\mu - \mu_2 + \pi\mu_2 - \pi\mu}{\pi} = \frac{(1-\pi)(\mu - \mu_2)}{\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En introduisant ces deux équations dans les équations B.2, on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{(\sigma^2 - (1-\pi)(\frac{\pi(\mu - \mu_1)}{1-\pi})^2)}{\pi} - (\mu_1 - \mu)^2 \\ \sigma_2^2 &= \frac{(\sigma^2 - \pi(\frac{(1-\pi)(\mu - \mu_2)}{\pi})^2)}{(1-\pi)} - (\mu_2 - \mu)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Ce qui peut être développé en :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{\sigma^2}{\pi} - \frac{\pi(\mu - \mu_1)^2}{1-\pi} - (\mu_1 - \mu)^2 \\ \sigma_2^2 &= \frac{\sigma^2}{(1-\pi)} - \frac{(1-\pi)(\mu - \mu_2)^2}{\pi} - (\mu_2 - \mu)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{\sigma^2}{\pi} - \frac{(\mu_1 - \mu)^2}{(1-\pi)} \\ \sigma_2^2 &= \frac{\sigma^2}{(1-\pi)} - \frac{(\mu_2 - \mu)^2}{(\pi)} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

On veut que σ_1^2 et σ_2^2 soient supérieurs à 0. Pour que ce soit le cas, on doit satisfaire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\sigma^2}{\pi} - \frac{(\mu_1 - \mu)^2}{(1-\pi)} \\ 0 &\leq \frac{\sigma^2}{(1-\pi)} - \frac{(\mu_2 - \mu)^2}{(\pi)} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

On développe les inégalités selon μ_1 et μ_2 et on trouve :

$$\begin{aligned} \mu - \sqrt{\frac{\sigma^2(1-\pi)}{\pi}} &\leq \mu_1 \leq \mu + \sqrt{\frac{\sigma^2(1-\pi)}{\pi}} \\ \mu - \sqrt{\frac{\sigma^2\pi}{(1-\pi)}} &\leq \mu_2 \leq \mu + \sqrt{\frac{\sigma^2\pi}{(1-\pi)}} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Annexe C

Probabilité d'observer un évènement z

A l'aide des algorithmes développés dans le chapitre 3, il est possible de connaître les différents moments statistiques unilatérales et croisées pour les différents modes. A l'aide de ces différents paramètres, il est possible de générer la densité de probabilité : $p(x, y)$.

On peut écrire la densité de probabilité cumulative de la résultante en fonction de la densité de probabilité :

$$p_z(z_1) = \frac{d}{dz_1}(F_z(z_1)) \quad (\text{C.1})$$

Il est possible de déterminer la densité de probabilité cumulative de la résultante à l'aide de la figure C.1.

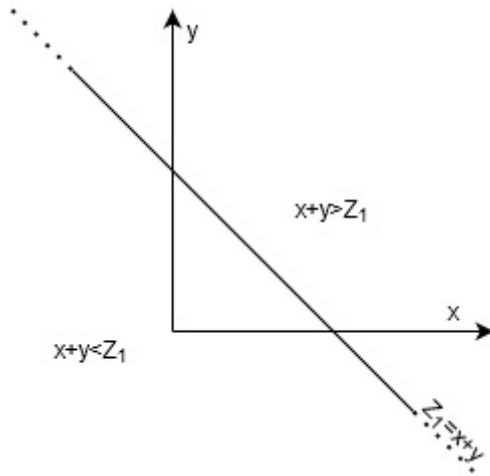


FIGURE C.1 – Représentation d'une résultante dans une densité de probabilité conjointe

On peut donc définir la probabilité cumulative comme l'intégrale se situant sous la droite Z_1 de la figure C.1. Ceci donne l'équation :

$$F_z(z_1) = \int_{-\inf}^{+\inf} \int_{-\inf}^{Z_1-y} p_{x,y}(x, y) dx dy \quad (\text{C.2})$$

Afin de trouver la densité de probabilité non cumulée, il est nécessaire de réaliser une simplification de l'intégrale et de la dérivée. On a une formulation du type suivant :

$$\frac{d}{dz_1} \int_{-\inf}^{Z_1-y} \phi(x) dx \quad (\text{C.3})$$

Lorsqu'on fait tendre la dérivée vers 0, on peut opérer la simplification suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{d}{dz_1} \int_{-\inf}^{Z_1-y} \phi(x) dx &= \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\int_{-\inf}^{Z_1+dz-y} \phi(x) dx \right) + \int_{-\inf}^{Z_1-y} \phi(x) dx \\ &= \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \int_{Z_1-y}^{Z_1+dz-y} \phi(x) dx \approx \phi(Z_1 - y) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Il est donc possible de déterminer la probabilité d'un point Z_1 avec l'équation ci-dessous :

$$p_z(Z_1) = \int_{-\inf}^{+\inf} p_{x,y}(Z_1 - y, y) dy = \int_{-\inf}^{+\inf} p_{x,y}(x, Z_1 - x) dx \quad (\text{C.5})$$

Annexe D

Compléments de mesure de la section 3.2 du chapitre 6

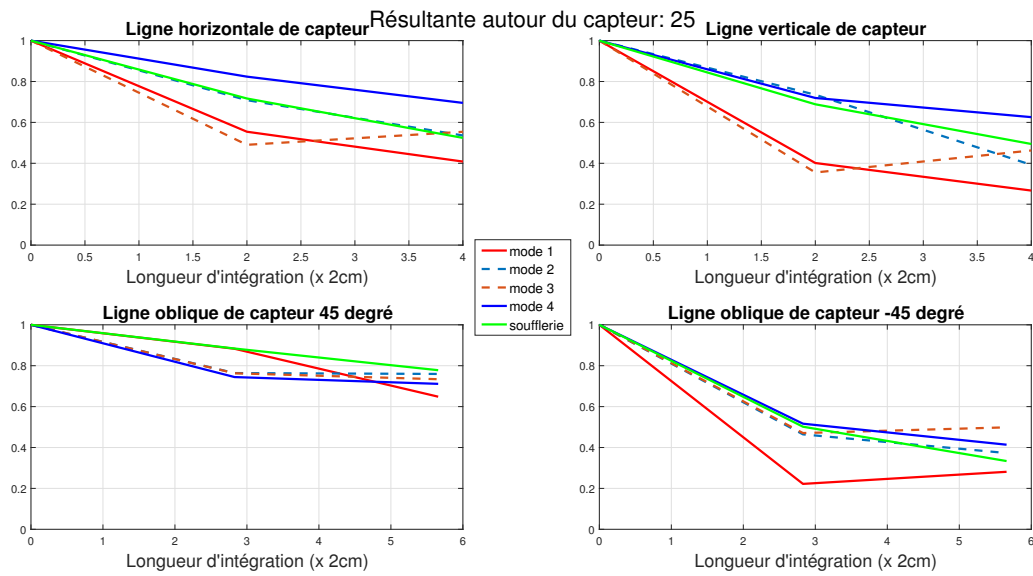


FIGURE D.1 – Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 25

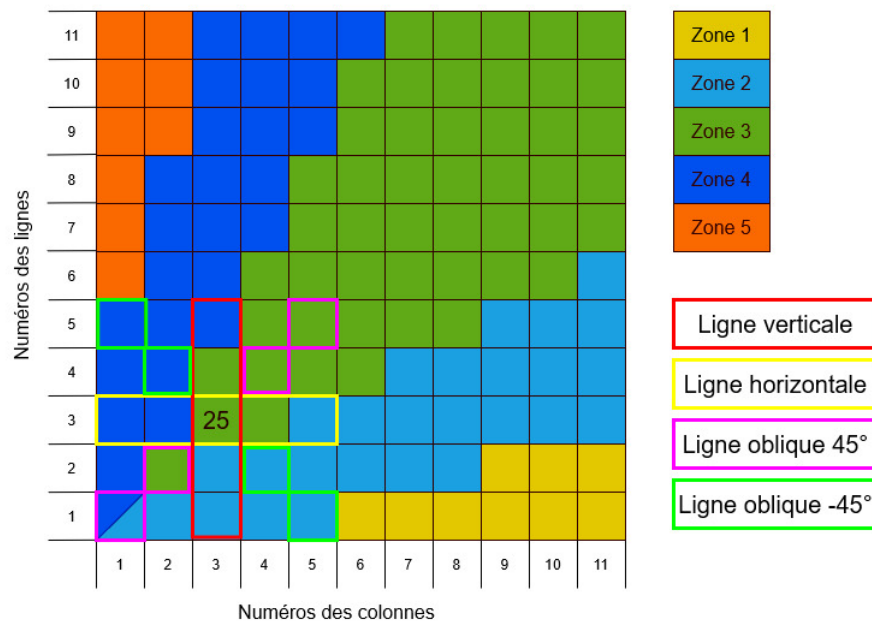


FIGURE D.2 – Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 25

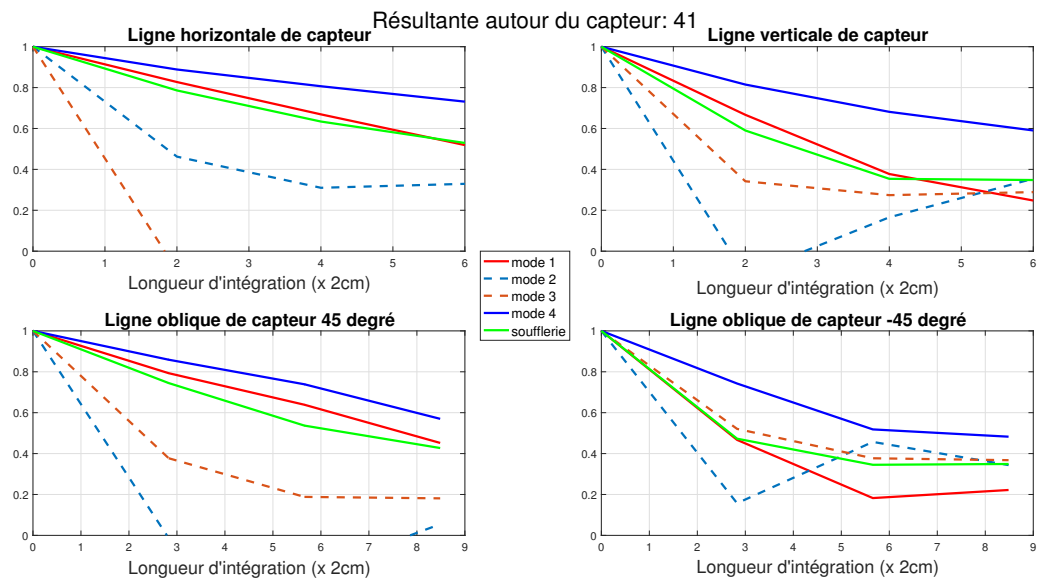


FIGURE D.3 – Évolution d'intégrales linéaires de corrélation autour du capteur 41

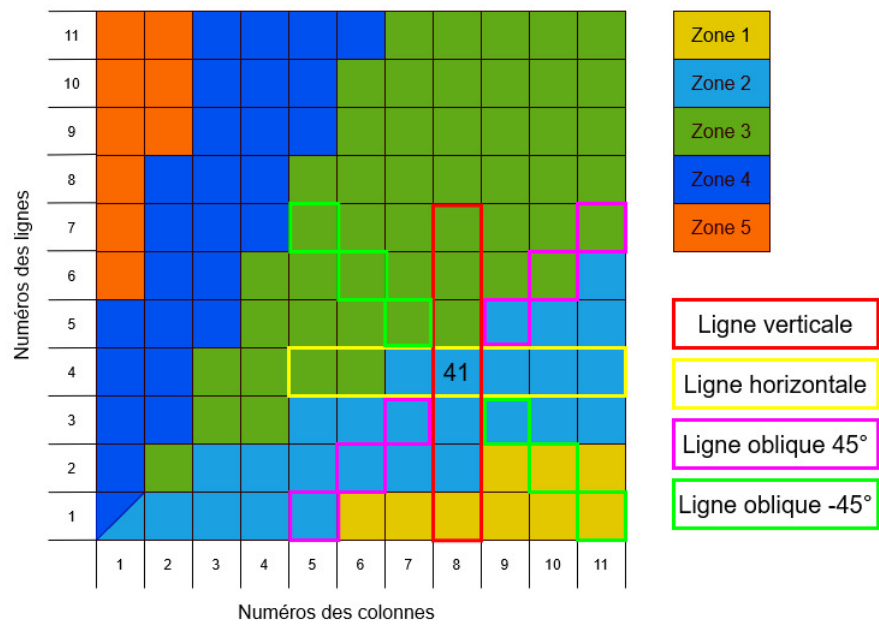


FIGURE D.4 – Disposition des lignes d'intégration autour du capteur 41